Pomůcka pro přednášku: 1. semestr Bc studia

Funkce a její aproximace Taylorovým polynomem

Taylorův polynom

balíček: plots

Pro náhradu funkce ***f(x)***v bodě x_0 Taylorovým polynomem (n-1) -ho řádu používáme v Maplu příkaz **taylor(f(x), x=x0, n).** Tento příkaz vypíše Taylorův polynom řádu *n*-1i s označením zbytku (je uveden v tzv. Peanově tvaru). Řád polynomu je nepovinný parametr, pokud ho nezadáme, je implicitně nastaven na n=6. Pro přímý výpočet Taylorova polynomu (bez zbytku) použijeme příkaz **mtaylor(f(x), x=x0, n)**. Tento příkaz použijeme, pokud chceme nakreslit graf polynomu, kterým funkci aproximujeme (při použití příkazu **taylor** by se nepodařil vykreslit graf kvůli zbytku).

Příklad 1. Napište Taylorův polynom třetího řádu funkce $f(x) = \ln x,$ v okolí bodu $x_0 = 1.$

```
> t1:=taylor(ln(x),x=1,4);
```

$$t1 := x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + O\left((x-1)^4\right)$$

Příklad 2. Napište Taylorův polynom třetího řádu funkce $f(x) = \cos\frac{x}{2},$ v okolí bodu $x_0 = \frac{\pi}{2}.$ Danou funkci i Taylorův polynom nakreslete.

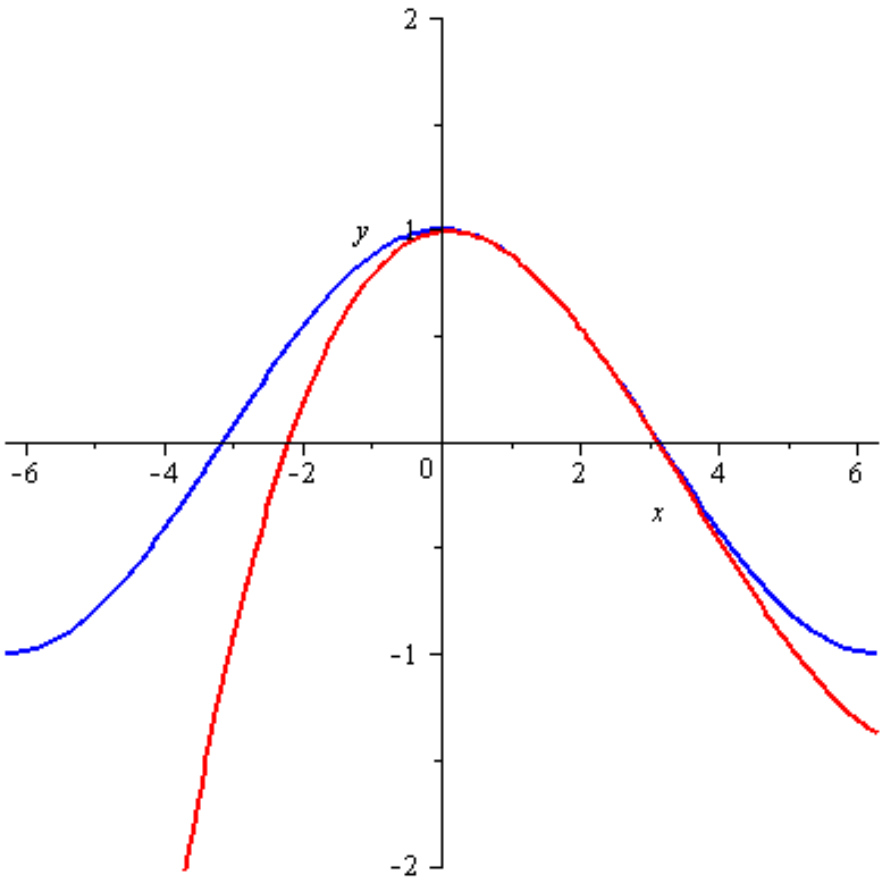
```
> with(plots):
> t2:=mtaylor(cos(x/2),x=Pi/2,4);
```

$$t2 := \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) - \frac{1}{16}\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)^2 + \frac{1}{96}\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)^3$$

```
> f:=cos(x/2);
```

$$f := \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

```
>
plot([f,t2],x=-2*Pi..2*Pi,y=-2..2,color=[blue,red],thickness=2);
```



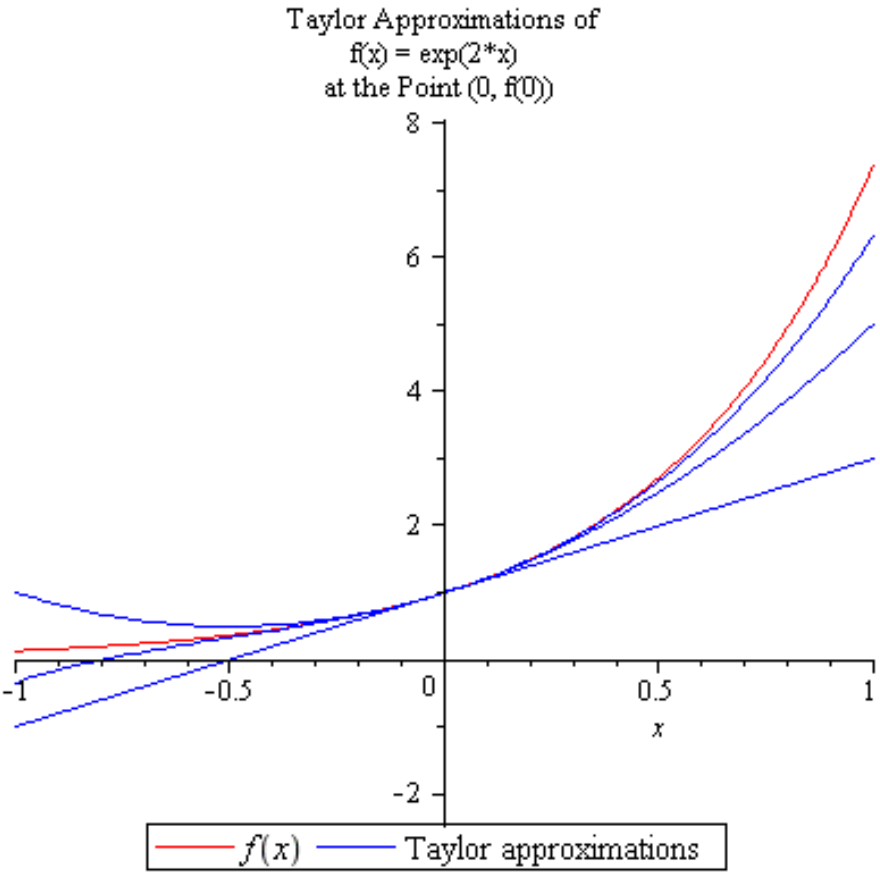
balíček: Student[Calculus1]

V balíčku **Student[Calculus1]**lze použít ještě další příkazy pro získání Taylorova polynomu. Příkaz **TaylorApproximation(f(x), x=x0)** napíše Taylorův polynom prvního řádu. Pokud zadáme příkaz **TaylorApproximation(f(x), x=x0,order=1..4)**dostaneme Taylorovy polynomy 1. až 4. řádu. V případě, že použijeme příkaz **TaylorApproximation(f(x), x=x0,output=plot)**dostaneme graf, ve kterém je daná funkce, bod, ve kterém aproximaci počítáme, a Taylorův polynom. Volbou **output=polynomial** obdržíme polynom (bez zbytku). Volbou **output=animation** vytvoříme animaci, která má vlastní ovládání pro spuštění, nastavení rychlosti, opakování atd.

```
> with(Student[Calculus1]):
> TaylorApproximation(exp(x), x = 2, order=2);
```

$$e^2 - e^2 x + \frac{1}{2} e^2 x^2$$

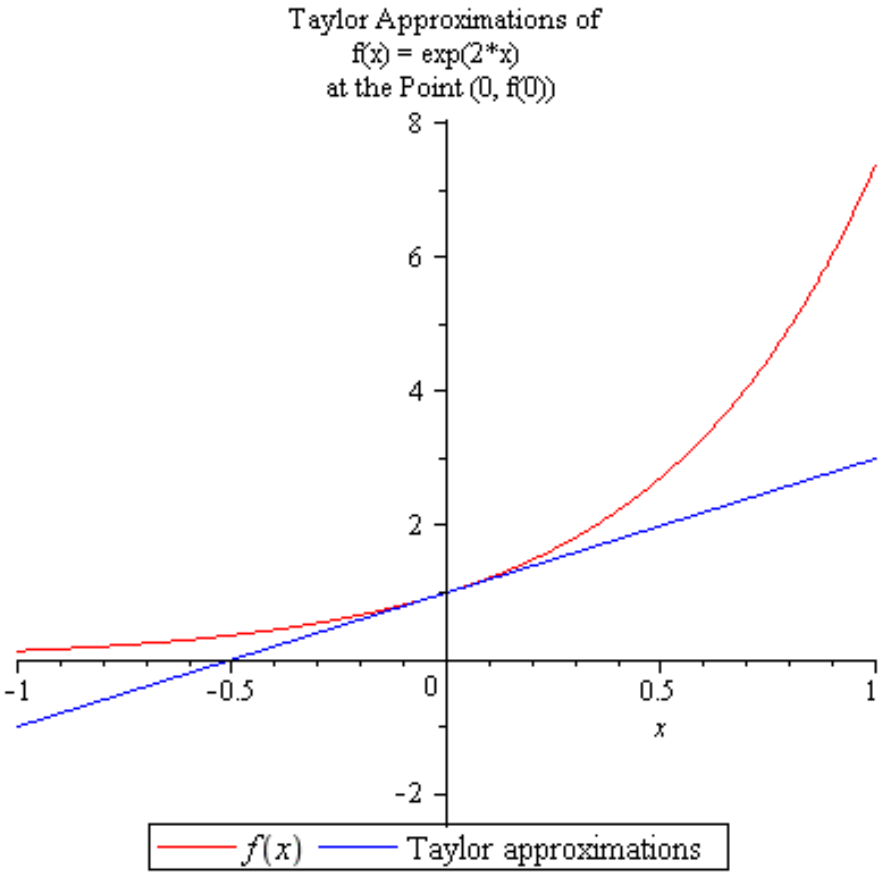
```
> TaylorApproximation(exp(2*x),x=0,output=plot,order=1..3);
```




```
> TaylorApproximation(exp(2*x),x=0,output=polynomial,order=1..4);
```

$$1+2x,\ 1+2x+2x^2,\ 1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3,\ 1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4$$

```
> TaylorApproximation(exp(2*x),x=0,output=animation,order=1..5);
```




```
> TaylorApproximation(sin(x), x = 1);
```

$$\sin(1) + \cos(1)\,x - \cos(1)$$

```
> evalf(%);
```

$$0.3011686789 + 0.5403023059\,x$$

Pozn. Taylorův rozvoj lze získat také použitím příkazu **series(f(x),x=x0,n).** Více informací lze nalézt v Helpu.

Příklad. Napište Maclaurinův mnohočlen šestého řádu funkce $f(x) = \sin x$.

```
> t6:=series(sin(x),x=0);
```

$$t6 := x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \mathrm{O}(x^6)$$

"Odříznout" zbytek z výstupu u příkazů **series** a **taylor** lze pomocí příkazu **convert** s volbou **polynom:**

```
> convert(t6,polynom);
```

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

Příklad. Napište Taylorův mnohočlen šestého řádu funkce $f(x) = x\sin(\pi x)\ln(x^2+1)$ v bodě $x = 1, 7$.

```
> g := x -> x*sin(Pi*x)*ln(x^2+1);
```

$$g := x \to x\sin(\pi x)\ln(x^2+1)$$

```
> TAY:=taylor(g(x),x=1,7);
```

$$TAY := -\pi \ln(2)\,(x-1) + \left(-\pi - \pi \ln(2)\right)(x-1)^2 + \left(-\pi + \frac{1}{6}\pi^3 \ln(2)\right)(x-1)^3 + \left(\frac{1}{6}\pi^3 + \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{6}\pi^3 \ln(2)\right)(x-1)^4 + \left(-\frac{1}{120}\pi^5 \ln(2) + \frac{1}{24}\pi + \frac{1}{6}\pi^3\right)(x-1)^5 + \left(-\frac{3}{40}\pi - \frac{1}{36}\pi^3 - \frac{1}{120}\pi^5 \ln(2) - \frac{1}{120}\pi^5\right)(x-1)^6 + O\left((x-1)^7\right)$$

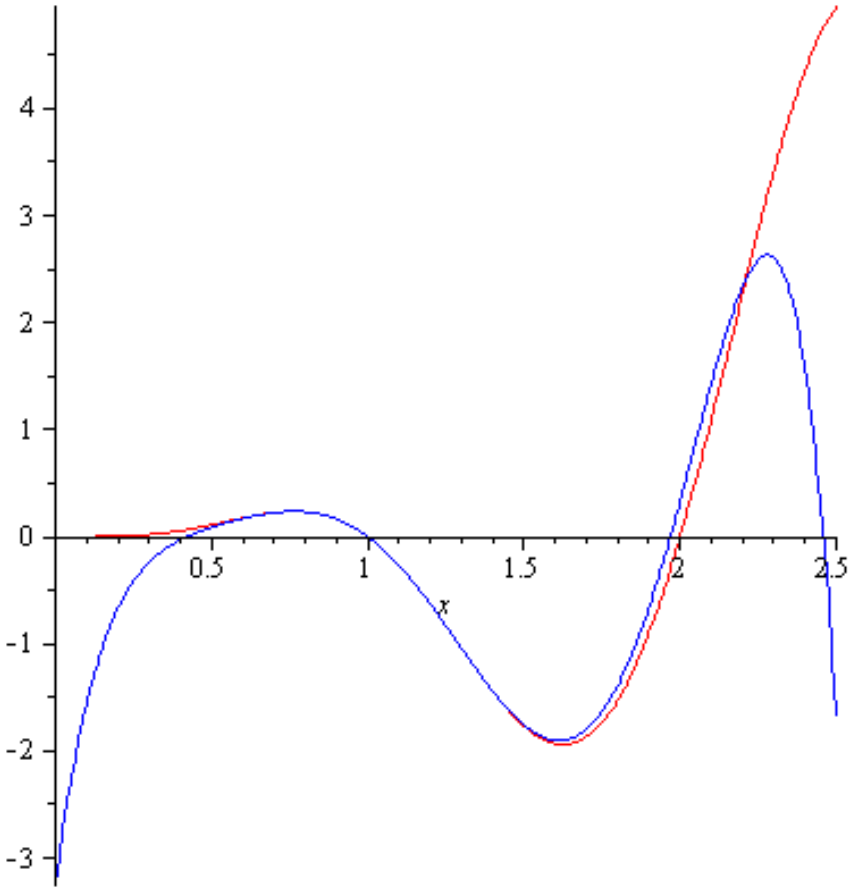
```
> T[6]:=unapply(convert(TAY,polynom),x);
```

$$T_6 := x \to -\pi \ln(2)\,(x-1) + \left(-\pi - \pi \ln(2)\right)(x-1)^2 + \left(-\pi + \frac{1}{6}\pi^3 \ln(2)\right)(x-1)^3 + \left(\frac{1}{6}\pi^3 + \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{6}\pi^3 \ln(2)\right)(x-1)^4 + \left(-\frac{1}{120}\pi^5 \ln(2) + \frac{1}{24}\pi + \frac{1}{6}\pi^3\right)(x-1)^5 + \left(-\frac{3}{40}\pi - \frac{1}{36}\pi^3 - \frac{1}{120}\pi^5 \ln(2) - \frac{1}{120}\pi^5\right)(x-1)^6$$

```
> evalf(expand(convert(TAY,polynom)),3);
```

$$22.7\,x + 107.\,x^3 - 67.2\,x^2 - 89.3\,x^4 - 5.40\,x^6 - 3.24 + 35.8\,x^5$$

```
> plot([g(x),T[6](x)],x=0..2.5, color=[red,blue]);
```


4
3
2
1
0
-1
-2
-3
0.5
1
1.5
2
2.5
x

>