

Pomůcka pro cvičení: 1. semestr Bc studia

Asymptoty funkcí

Soubor obsahuje příklady ze skript Kuben, J.: Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, S - 1804 A.

Cílem je určit a nakreslit asymptoty ke grafům daných funkcí.

1 Asymptoty funkcí

Zadání: str. 89/ 10 Určete asymptoty ke grafu funkce.

Při řešení nejprve nakreslíme graf funkce. Rozsahy na osách budeme volit tak, aby obrázek odpovídal skutečnosti, toho docílíme použitím nepovinného parametru **scaling=constrained** v příkazu **plot**. Pro potlačení svislých asymptot použijeme parametr **discont=true**, pro lepší zobrazení pomocí parametru **thickness** nastavíme větší tloušťku čáry. Dále určíme rovnice asymptot bez směrnice i se směrnicí. Nakonec do jednoho obrázku zobrazíme funkci i asymptoty. Pro zobrazení asymptot bez směrnice použijeme příkaz **implicit-plot** z balíčku **plots**.

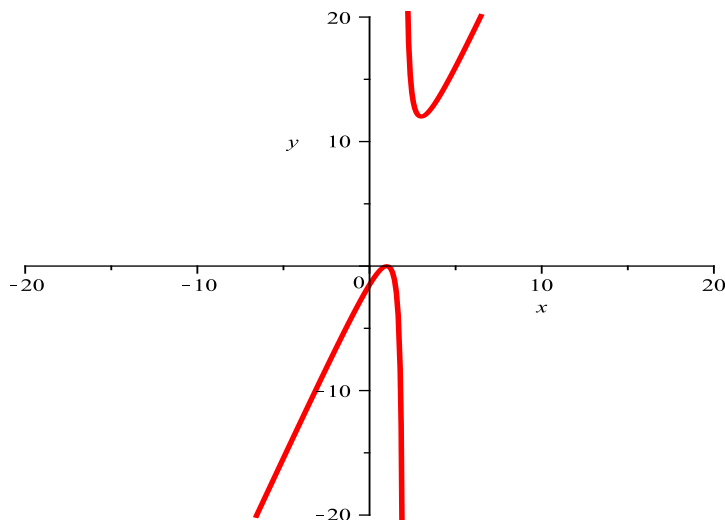
1.1 a) $f := 3x + 3(x - 2)^{-1}$

```
> restart;
```

```
> f:=3*x+3/(x-2);
```

$$f := 3x + 3(x - 2)^{-1}$$

```
> plot(f,x=-20..20,y=-20..20,discont=true,thickness=3,
      scaling=constrained);
```



1. Asymptoty se směrnicí, tj. přímky tvaru $y = kx + q$. Podle skript neznámé

k a q vypočteme ze vztahů $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx)$.

```
> k:=limit(f/x,x=infinity);
                                k := 3
> q:=limit(f-k*x,x=infinity);
                                q := 0
```

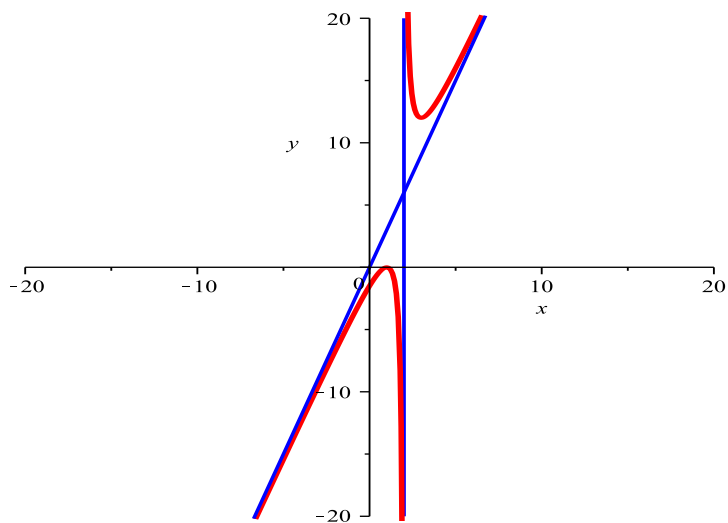
Asymptotou je přímka $y=3x$.

```
> k:=limit(f/x,x=-infinity);
                                k := 3
> q:=limit(f-k*x,x=-infinity);
                                q := 0
```

Asymptotou je přímka $y=3x$.

2. Asymptoty bez směrnice, tj. přímky $x = x_0$

```
> limit(f,x=2,left);
                                -∞
> limit(f,x=2,right);
                                ∞
> with(plots):
> a1:=implicitplot(x=2,x=-20..20,y=-20..20,thickness=2,color=blue):
> g:=plot([f,3*x],x=-20..20,y=-20..20,discont=true,thickness=[3,2],
> color=[red,blue],scaling=constrained):
> display({g,a1});
```

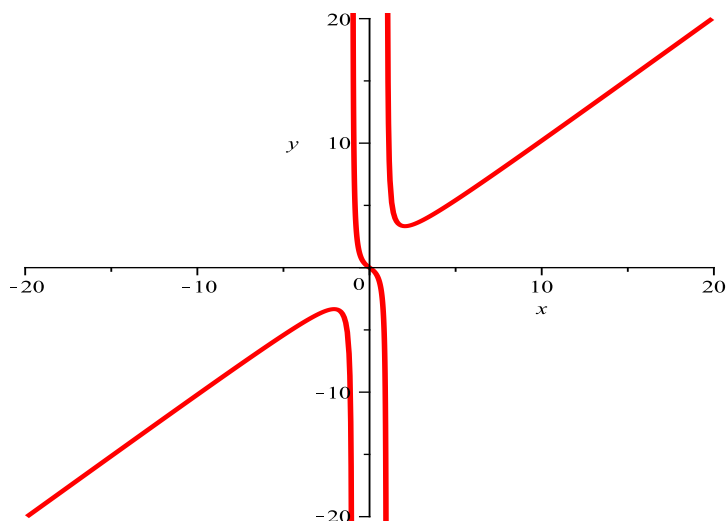


1.2 b) $f := x + 2 \frac{x}{x^2 - 1}$

```
> restart:
> f:=x+2*x/(x^2-1);
```

$$f := x + 2 \frac{x}{x^2 - 1}$$

```
> plot(f,x=-20..20,y=-20..20,discont=true,thickness=3,scaling=constrained);
```



1. Asymptoty se směrnici.

```
> k:=limit(f/x,x=infinity);
                                k := 1
> q:=limit(f-k*x,x=infinity);
                                q := 0
```

Asymptota je přímka $y=x$.

```
> k:=limit(f/x,x=-infinity);
                                k := 1
> q:=limit(f-k*x,x=-infinity);
                                q := 0
```

Asymptota je přímka $y=3x$.

2. Asymptoty bez směrnice.

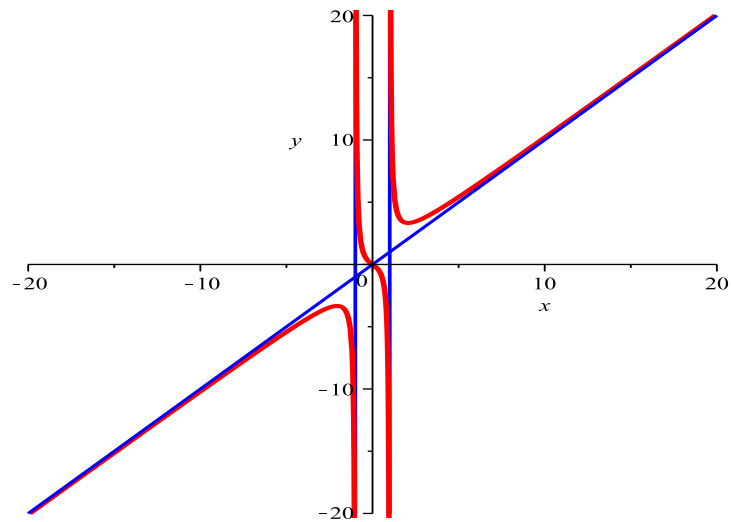
```
> limit(f,x=1,left);
                                -∞
> limit(f,x=1,right);
                                ∞
> limit(f,x=-1,left);
                                -∞
> limit(f,x=-1,right);
                                ∞

> with(plots):
> a1:=implicitplot(x=1,x=-20..20,y=-20..20,thickness=2,color=blue):
```

```

> a2:=implicitplot(x=-1,x=-20..20,y=-20..20,thickness=2,color=blue):
> g:=plot([f,x],x=-20..20,y=-20..20,discont=true,
thickness=[3,2],color=[red,blue],scaling=constrained):
> display({g,a1,a2});

```



1.3 c) $f := (1 - x^2)^{-1}$

```

> restart:

```

```

> f:=1/(1-x^2);

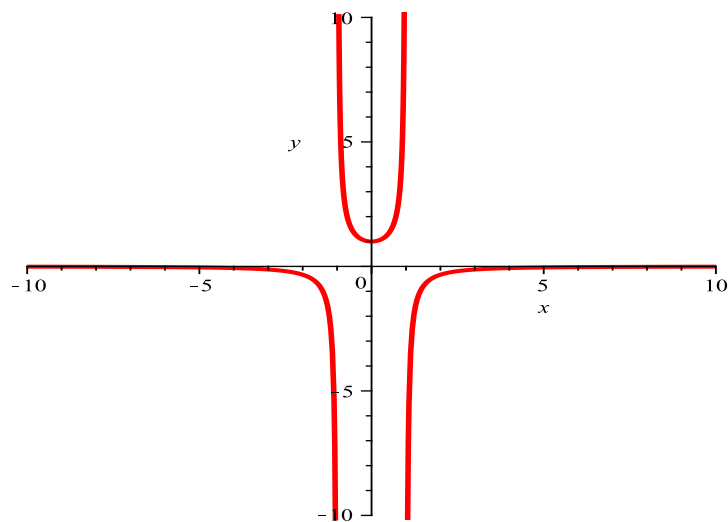
```

$$f := (1 - x^2)^{-1}$$

```

> plot(f,x=-10..10,y=-10..10,discont=true,thickness=3,
scaling=constrained);

```



1. Asymptoty se směrnici.

```
> k:=limit(f/x,x=infinity);
                                k := 0
> q:=limit(f-k*x,x=infinity);
                                q := 0
```

Asymptota je přímka $y=0$.

```
> k:=limit(f/x,x=-infinity);
                                k := 0
> q:=limit(f-k*x,x=-infinity);
                                q := 0
```

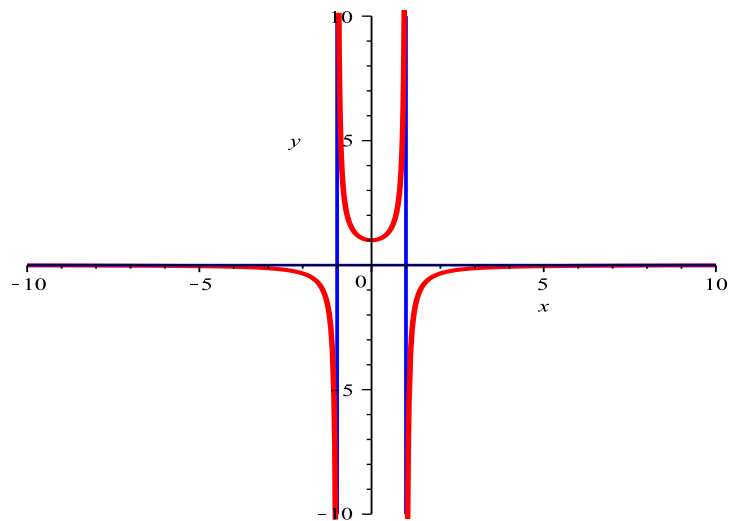
Asymptota je přímka $y=0$.

2. Asymptoty bez směrnice.

```
> limit(f,x=1,left);
                                ∞
> limit(f,x=1,right);
                                -∞
> limit(f,x=-1,left);
                                -∞
> limit(f,x=-1,right);
                                ∞

> with(plots):
> a1:=implicitplot(x=1,x=-10..10,y=-10..10,thickness=2,color=blue):
> a2:=implicitplot(x=-1,x=-10..10,y=-10..10,thickness=2,color=blue):
> g:=plot([f,0],x=-10..10,y=-10..10,discont=true,thickness=[3,2],
  color=[red,blue],scaling=constrained):
```

```
> display({g,a1,a2});
```



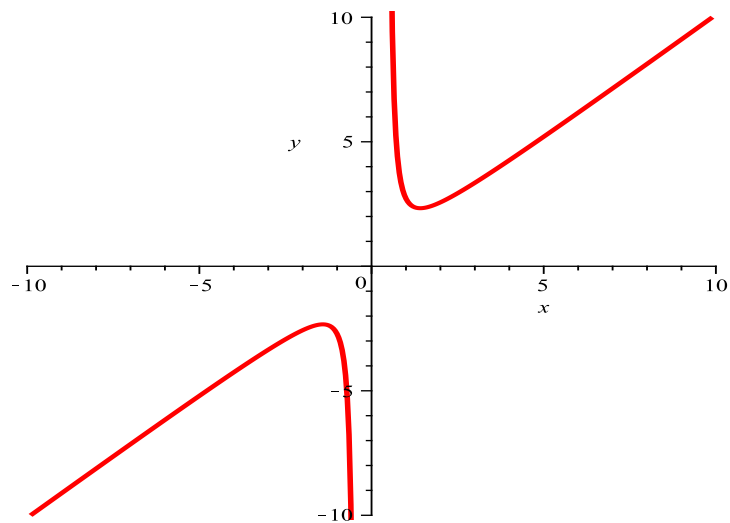
1.4 d) $f := xe^{x^{-2}}$

```
> restart;
```

```
> f:=x*exp(1/x^2);
```

$$f := xe^{x^{-2}}$$

```
> plot(f,x=-10..10,y=-10..10,discont=true,thickness=3,scaling=constrained);
```



1. Asymptoty se směrnicí,

```
> k:=limit(f/x,x=infinity);  
k := 1  
> q:=limit(f-k*x,x=infinity);  
q := 0
```

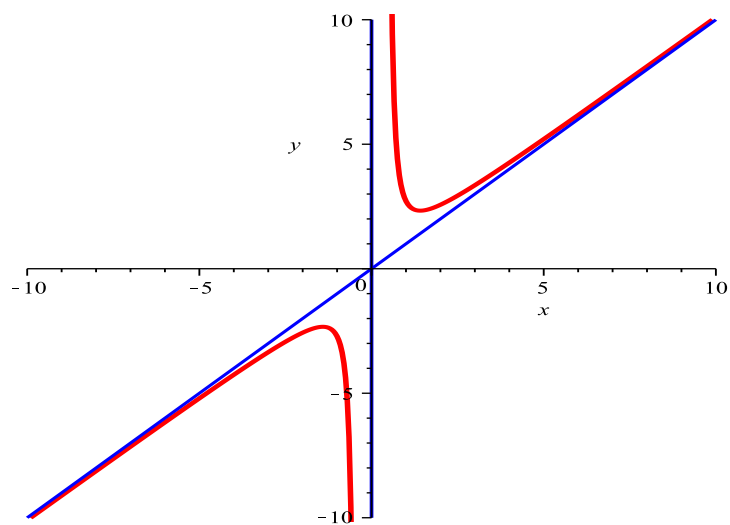
Asymptota je přímka $y=x$.

```
> k:=limit(f/x,x=-infinity);  
k := 1  
> q:=limit(f-k*x,x=-infinity);  
q := 0
```

Asymptota je přímka $y=x$.

2. Asymptoty bez směrnice.

```
> limit(f,x=0,left);  
-∞  
> limit(f,x=0,right);  
∞  
> with(plots):  
> a:=implicitplot(x=0,x=-10..10,y=-10..10,thickness=2,color=blue):  
> g:=plot([f,x],x=-10..10,y=-10..10,discont=true,thickness=[3,2],  
color=[red,blue],scaling=constrained):  
> display({g,a});
```



1.5 e)

```
> restart:
```

POZOR! Při řešení tohoto příkladu je potřeba programu provést náповědu při řešení, protože Maple pracuje v oboru komplexních čísel. Je třeba ošetřit znaménko výrazu pod odmocninou, k tomu použijeme funkce **signum**.

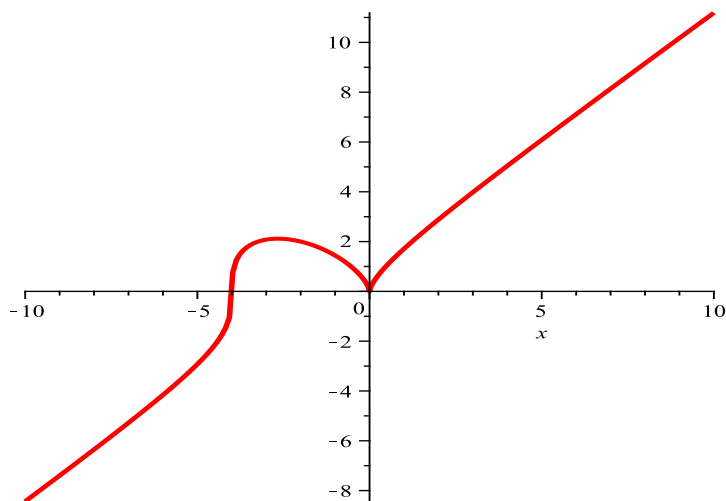
Příkaz signum vrací znaménko reálného nebo komplexního čísla.

Je definováno $\text{signum}(x) = x/\text{abs}(x)$, pro $x \neq 0$.

```
> f:=root[3](abs(x^3+4*x^2))*signum(x^3+4*x^2);
```

$$f := \sqrt[3]{|x^3 + 4x^2|} \text{signum}(x^3 + 4x^2)$$

```
> plot(f,discont=true,thickness=3,scaling=constrained);
```



1. Asymptoty se směrnici.

```
> k:=limit(f/x,x=infinity);
```

$$k := 1$$

```
> q:=limit(f-k*x,x=infinity);
```

$$q := 4/3$$

Asymptota je přímka $y=x+4/3$.

```
> k:=limit(f/x,x=-infinity);
```

$$k := 1$$

```
> q:=limit(f-k*x,x=-infinity);
```

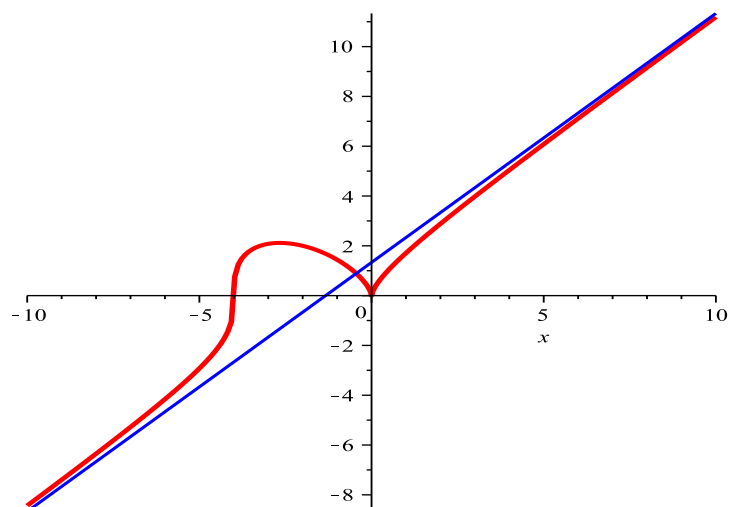
$$q := 4/3$$

Asymptota je přímka $y=x+4/3$.

2. Asymptoty bez směrnice.

Nejsou.

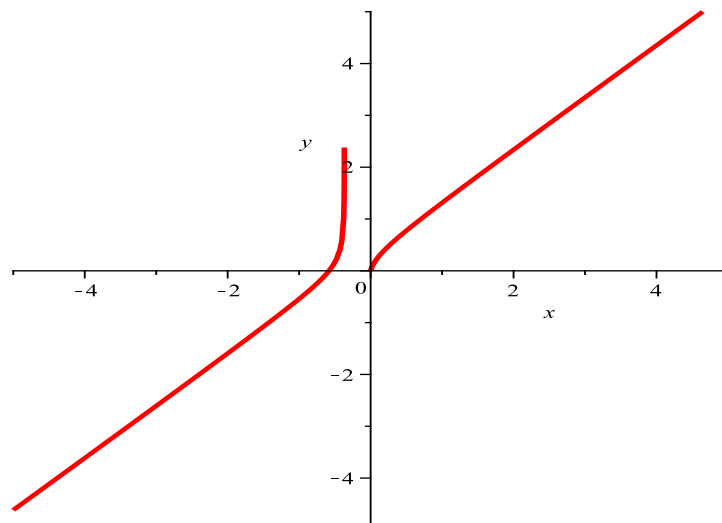
```
> plot([f,x+4/3],discont=true,thickness=[3,2],color=[red, blue],
scaling=constrained);
```

1.6 f)

```
> restart;
> f:=x*ln(exp(1)+1/x);
      
$$f := x \ln(e^1 + x^{-1})$$

> plot(f,x=-5..5,y=-5..5,discont=true,thickness=3,numpoints=200);
```



1. Asymptoty se směrnici.

```
> k:=limit(f/x,x=infinity);
      
$$k := 1$$

```

```
> q:=limit(f-k*x,x=infinity);
```

$$q := e^{-1}$$

Asymptota je přímka $y = x + e^{-1}$.

```
> k:=limit(f/x,x=-infinity);
```

$$k := 1$$

```
> q:=limit(f-k*x,x=-infinity);
```

$$q := e^{-1}$$

Asymptota je přímka $y = x + e^{-1}$.

2. Asymptoty bez směrnice.

```
> limit(f,x=-1/exp(1),left);
```

$$\infty$$

```
> with(plots):
```

```
> a:=implicitplot(x=-1/exp(1),x=-5..5,y=-5..5,thickness=2,color=blue):
```

```
> g:=plot([f,x+1/exp(1)],x=-5..5,y=-5..5,discont=true,thickness=[3,2],
color=[red,blue],scaling=constrained):
```

```
> display({g,a});
```

