Pomůcka pro cvičení: 1. semestr Bc studia
Průběh funkce - ruční výpočet

1 Průběh funkce

balíček: plots

Při vyšetřování průběhu funkce využijte dosavadních příkazů z Maple, které znáte. Nové příkazy budou postupně komentovány. Řešení příkladu je komplexní s maximálním využitím Maplovských příkazů, pro vaše potřeby by mělo jít pouze o návod, jak lze postupovat.Příklad je zvolen tak, aby extrémy i inflexní body nevycházely celočíselně, takže takový příklad není v našich možnostech počítat na hodině.

Příklad. Vyšetřete průběh funkce$f\left(x\right)=\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{2\,x^2-1}+x$.

```
> with(plots):
> f:=x*sqrt(x^2+1)/(2*x^2-1)+x;
```

$$f\ :=\ \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2\,x^2-1}+x$$

1. Definiční obor funkce.

V našem případě jsou problematické kořeny jmenovatele. Pro řešení je využijeme příkaz solve (rovnice, proměnná) . Pokud máme pouze jednu proměnnou, není ji potřeba zadávat.

```
> solve(2*x^2-1=0,x);
```

$$1/2\sqrt{2},\ -1/2\sqrt{2}$$

Definiční obor je tedy $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

2. Sudost, lichost funkce.

Pro získání představy o souměrnosti grafu je dobré zjistit, zda není souměrná podle osy y (resp. podle počátku), tj. vyšetřit, zda funkce není sudá, resp. lichá. Ověřit, zda je funkce sudá (resp. lichá) můžeme buď výpočtem funkční hodnoty ve dvou bodech souěrných podle osy *y,* nebo dosazením do funkčního předpisu za každé x hodnotu -*x*. Substituci lze provést pomocí subs (x = a, výraz) .

```
> eval(subs(x=-x,f));
```

$$-\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2\,x^2-1}-x$$

Platí$y\left(x\right)=-y\left(-x\right)$, a tedy funkce je lichá, bude tudíž souměrná podle počátku.

3. Průsečíky s osou x, znaménko funkce.

Určíme body, v nichž graf funkce protíná osu x a zjistíme intervaly, kde je funkce nad osou a kde je pod osou.

```
> solve(f=0);
```

$$0$$

Jediným nulovým bodem je 0. Další body, v nichž funce mění znaménko, jsou nulové body jmenovatele, tj. body$-1/2\,\sqrt{2}$, $1/2\,\sqrt{2}$.

Znaménko funkce budeme určovat pomocí příkazu **signum(x)**, kde**x** je algebraický výraz, do něhož potom pomocí substituce dosadíme konkrétní číselné hodnoty.

```
> s:=signum(f);
```

$$s := \mathit{signum}\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2\,x^2-1}+x\right)$$

```
> eval(subs(x=1,s));
```

$$1$$

```
> eval(subs(x=0.5,s));
```

$$-1$$

```
> eval(subs(x=-0.5,s));
```

$$1$$

```
> eval(subs(x=-1,s));
```

$$-1$$

Z výsledků je zřejmé, že v intervalech$-\infty$, $-1/2\,\sqrt{2}$ a0, $1/2\,\sqrt{2}$ má funkce záporné znaménko, tj. je pod osou x, na intervalech má funkce kladné znaménko, tj. je nad osou x.

4. Monotónnost, extrémy

Určíme tedy lokální extrémy a intervaly monotonie dané funkce. Nejprve vypočteme první derivaci, tu položíme rovnu nule a stanovíme stacionární body.

```
> df:=diff(f,x);
```

$$df := \frac{\sqrt{x^2+1}}{2\,x^2-1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}\,(2\,x^2-1)}-4\,\frac{x^2\sqrt{x^2+1}}{(2\,x^2-1)^2}+1$$

```
> k:=[solve(df=0)];
```

$$k := [0, \sqrt{\mathit{RootOf}\left(16\_Z^4-16\_Z^3-8\_Z^2-15, \mathit{index}=1\right)}, -\sqrt{\mathit{RootOf}\left(16\_Z^4-16\_Z^3-8\_Z^2-15, \mathit{index}=1\right)}]$$

Protože kořeny rovnice nejsou celočíselné, použijeme příkaz **evalf** pro jejich numerické vyčíslení.

```
> u:=evalf(%);
```

$$u := [0.0, 1.250778158, -1.250778158]$$

Protože pořadí kořenů se nám mění s ohledem na aktuální překlad, použijeme příkaz **sort**, pomocí něhož kořeny vzestupně uspořádáme, což nám umožní se na ně odkazovat.

```
> u1:=sort(u);
```

$$\mathit{u1} := [-1.250778158, 0.0, 1.250778158]$$

Nulové body první derivace jsou tedy 1.250778158, 0., -1.250778158. První derivace neexistuje v bodech$-1/2\,\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ty jsou však již vyloučeny z definičního oboru, navíc by se jednalo o dvojnásobné kořeny, takže v nich extrém nemůže nastat. Stanovíme znaménko první derivace v jednotlivých intervalech.

```
> s1:=signum(df);
```

$$s1 := signum\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{2\,x^2-1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}\,(2\,x^2-1)}-4\,\frac{x^2\sqrt{x^2+1}}{(2\,x^2-1)^2}+1\right)$$

```
> eval(subs(x=0.1,s1));
```

$$-1$$

```
> eval(subs(x=-0.1,s1));
```

$$-1$$

```
> eval(subs(x=1.26,s1));
```

$$1$$

```
> eval(subs(x=1.25,s1));
```

$$-1$$

```
> eval(subs(x=-1.25,s1));
```

$$-1$$

```
> eval(subs(x=-1.26,s1));
```

$$1$$

Ze znaménka první derivace je zřejmé, že v nule nemůže být extrém. Toto můžeme ověřit i pomocí vyšších derivací.

```
> ddf:=diff(f,x,x);
```

$$ddf := 3\,\frac{x}{\sqrt{x^2+1}\,(2\,x^2-1)}-12\,\frac{\sqrt{x^2+1}x}{(2\,x^2-1)^2}-\frac{x^3}{(x^2+1)^{3/2}\,(2\,x^2-1)}-8\,\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}\,(2\,x^2-1)^2}+32\,\frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{(2\,x^2-1)^3}$$

```
> eval(subs(x=0,%));
```

$$0$$

Protože hodnota druhé drivace v bodě 0 je rovna 0, nemůže v tomto bodě nastat extrém. Provedeme výpočet třetí derivace.

```
> dddf:=diff(x*sqrt(x^2+1)/(2*x^2-1)+x,x$3);
```

$$48\,\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}\,(2\,x^2-1)^2}+3\,\frac{1}{\sqrt{x^2+1}\,(2\,x^2-1)}+192\,\frac{x^2\sqrt{x^2+1}}{(2\,x^2-1)^3}-12\,\frac{\sqrt{x^2+1}}{(2\,x^2-1)^2}+3\,\frac{x^4}{(x^2+1)^{5/2}\,(2\,x^2-1)}+12\,\frac{x^4}{(x^2+1)^{3/2}\,(2\,x^2-1)^2}+$$

```
> eval(subs(x=0,%));
```

$$-15$$

Protože druhá derivace je v bodě 0 rovna nule a třetí derivace je v tomto bodě nenulová, je bod 0 inflexním bodem.

Vypočteme funkční hodnoty v dalších nulových bodech první derivace

```
> eval(subs(x=op(3,u1),f));
```

$$2.191634762$$

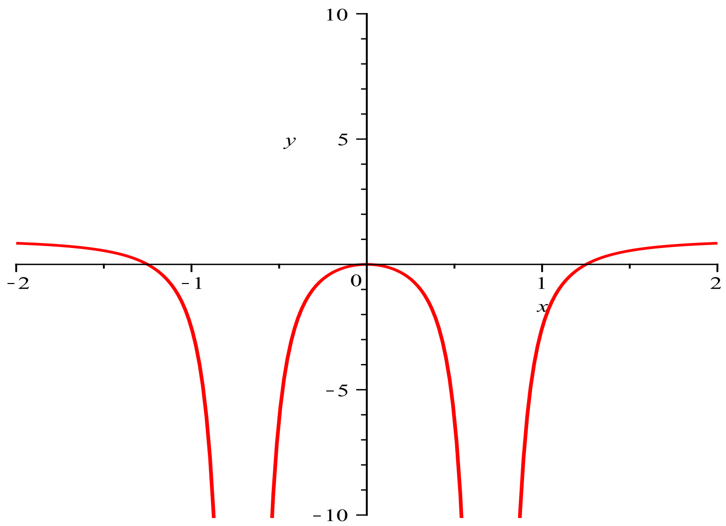
```
> eval(subs(x=op(1,u1),f));
```

$$-2.191634762$$

V bodě (1.250778158, 2.191634762) funkce nabývá lokálního minima a v bodě (-1.250778158,-2.191634762) nabývá lokálního maxima. Funkce je rostoucí na intervalech$-\infty$, -1.250778158 a (1.250778158,∞) a klesající na intervalech-1.250778158, $-1/2\,\sqrt{2}$

, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,0)$, $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ a$1/2\,\sqrt{2}$, 1.250778158 . Pro kontrolu můžeme vykreslit graf první derivace dané funkce.

```
> plot((-4*x^2-1+4*(1+x^2)^(1/2)*x^4-4*x^2*(1+x^2)^(1/2)+(1+x^2)^(1/2))/((2*x^2-1)^2
```



5. Inflexní body, intervaly konkávnosi a konvexnosti.

Z ní určíme inflexní body a intervaly, na nichž je funkce konvexní resp. konkávní.

```
> ddf:=diff(f,x,x);
```

$$ddf\ :=\ 3\,\frac{x}{\sqrt{x^2+1}\,(2\,x^2-1)} - 12\,\frac{\sqrt{x^2+1}x}{(2\,x^2-1)^2} - \frac{x^3}{(x^2+1)^{3/2}\,(2\,x^2-1)} - 8\,\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}\,(2\,x^2-1)^2} + 32\,\frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{(2\,x^2-1)^3}$$

Nalezneme nulové body druhé derivace a body, v nichž není druhá derivace definována.

```
> solve(ddf=0);
```

$$0,\ 1/4\,\sqrt{-10-2\,i\sqrt{15}},\ -1/4\,\sqrt{-10-2\,i\sqrt{15}},\ 1/4\,\sqrt{-10+2\,i\sqrt{15}},\ -1/4\,\sqrt{-10+2\,i\sqrt{15}}$$

Řešením rovnice $\frac{df}{x^2}$ je v*real* pouze kořen nula. Druhá derivace neexistuje v bodech$-1/2\,\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, které jsou sice trojnásobnými kořeny jmenovatele, ale které nepatří do definičního oboru. Určíme znaménka v jednotlivých intervalech.

```
> s2:=signum(ddf);
```

$$s2\ :=\ -signum\left(-3\,\frac{x}{\sqrt{x^2+1}\,(2\,x^2-1)} + 12\,\frac{\sqrt{x^2+1}x}{(2\,x^2-1)^2} + \frac{x^3}{(x^2+1)^{3/2}\,(2\,x^2-1)} + 8\,\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}\,(2\,x^2-1)^2} - 32\,\frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{(2\,x^2-1)^3}\right)$$

```
> eval(subs(x=1/2,s2));
```

$$-1$$

```
> eval(subs(x=-1/2,s2));
```

$$1$$

```
> eval(subs(x=1,s2));
```

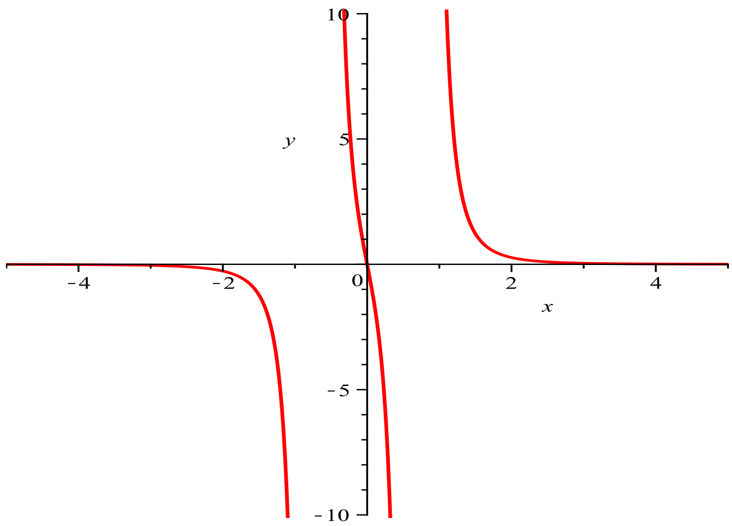
$$1$$

```
> eval(subs(x=-1,s2));
```

$$-1$$

Už z předchozího vyšetřování víme, že funkce má jediný inflexní bod, a to (0,0). Na intervalech$-\infty$, $-1/2\sqrt{2}$, 0, $1/2\sqrt{2}$
je funkce konkávnía na intervalech$-1/2\sqrt{2}$, 0, $1/2\sqrt{2}$, ∞ je funkce konvexní. Získané výsledky porovnáme s grafem druhé derivace dané funkce.

```
> plot(3*x*(10*x^2+8*x^4+5)/((1+x^2)^(3/2)*(2*x^2-1)^3),x=-5..5,y=-10..10,discont=tr
```



6. Asymptoty funkce.

Vyšetříme nejprve asymptoty bez směrnice, kandidáty jsou přímka x=$1/2\sqrt{2}$ a přímka x=$-1/2\sqrt{2}$.

```
> limit(f,x=sqrt(2)/2,right);
```

$$\infty$$

```
> limit(f,x=sqrt(2)/2,left);
```

$$-\infty$$

```
> limit(f,x=-sqrt(2)/2,right);
```

$$\infty$$

```
> limit(f,x=-sqrt(2)/2,left);
```

$$-\infty$$

Dále vyšetřeme asymptotu se směrnicí$y = kx + q$ pro$x \mapsto \infty$.

```
> k:=limit(f/x,x=infinity);
```

$$k := 1$$

```
> q:=limit(f-x,x=infinity);
```

$$q := 1/2$$

Přímka $y = x + 1/2$ je asymptotou se směrnicí pro x jdoucí do nekonečna.
Analogicky vyšetříme případ pro $x \to -\infty$.

```
>   k:=limit(f/x,x=-infinity);
```

$$k := 1$$

```
>   q:=limit(f-x,x=-infinity);
```

$$q := -1/2$$

Přímka $y = x$ -1/2 je asymptotou se směrnicí pro $x \to -\infty$.

7. Graf funkce.

```
>   g1:=implicitplot([x=sqrt(2)/2,x=-sqrt(2)/2],x=-10..10,y=-10..10,grid=[10,10],thick
>   g2:=plot(f,x=-10..10,y=-10..10,discont=true,grid=[10,10],thickness=3,color=blue):
>   g3:=plot(x-1/2,x=-10..0,y=0..-10,grid=[10,10],thickness=2,color=green):
>   g4:=plot(x+1/2,x=0..10,y=0..10,grid=[10,10],thickness=2,color=red):
>   display({g1,g2,g3,g4},title="Graf funkce f(x)
>   ");
```