Pomůcka pro cvičení: 1. semestr Bc studia
Limity funkcí a grafy těchto funkcí

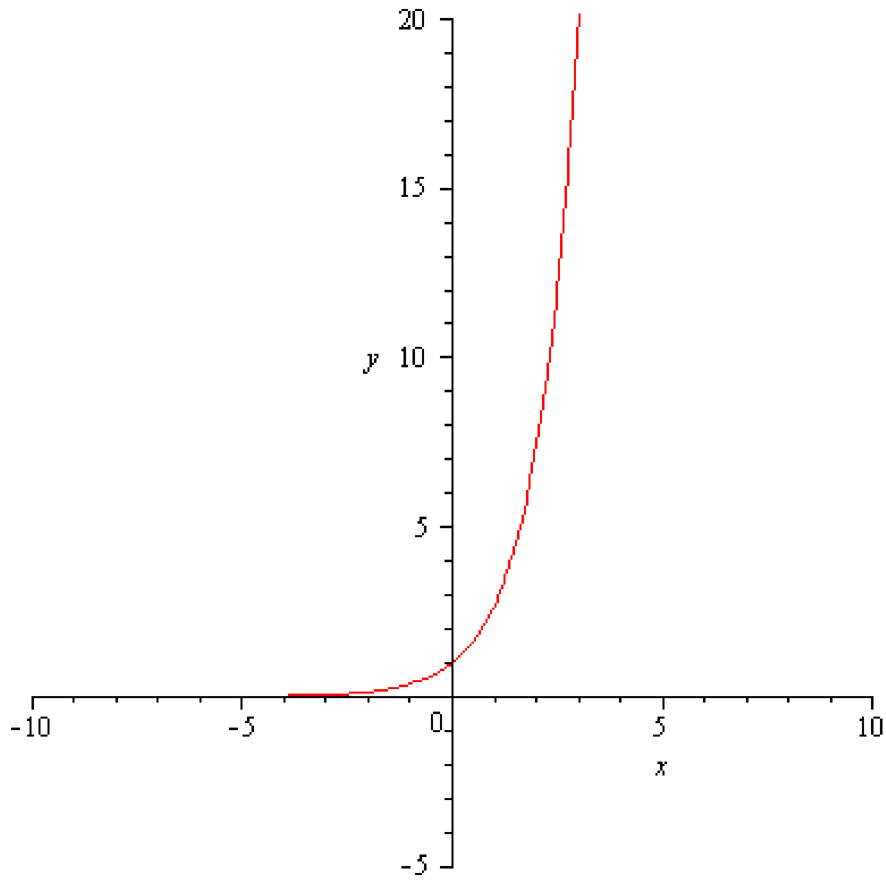
Soubor obsahuje příklady na výpočet limit, ve kterých je potřeba využít znalostí grafů základních elementárních funkcí. Cílem je nakreslit graf elementární funkce a určit limitu.

POZOR! Grafy budou oproti skutečnosti zkreslené, vzhledem k velkým rozsahům na jednotlivých osách není možné zadat stejné měřítko na osách, protože jinak by z grafu nebylo nic vidět.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(e^x + x\right)$$

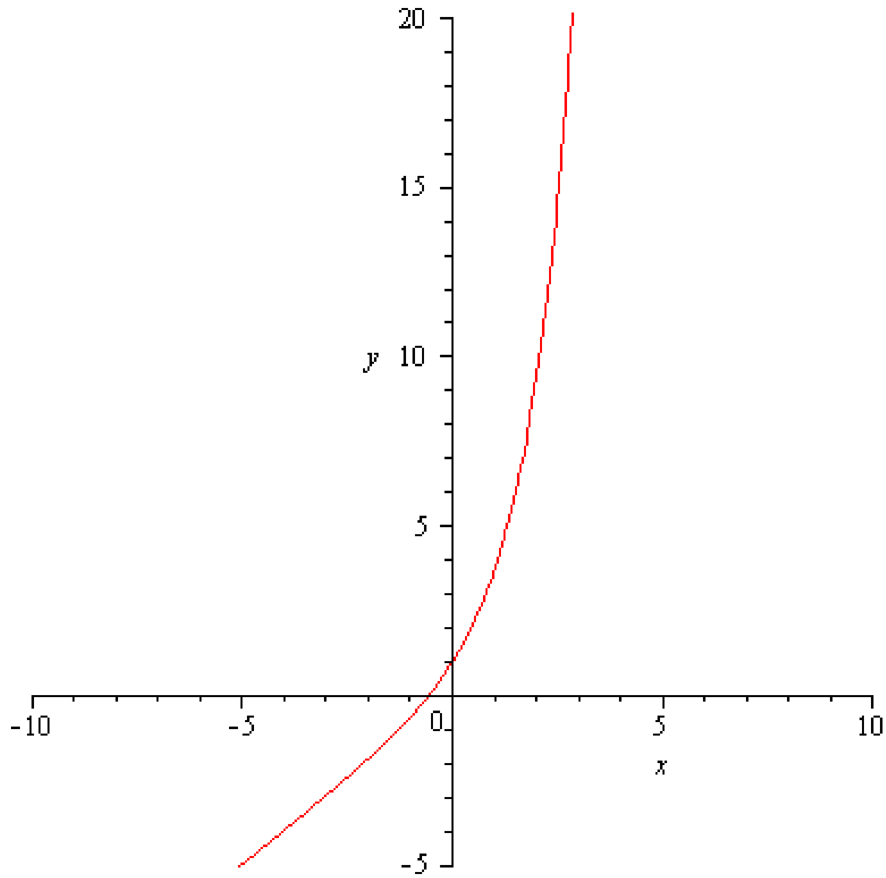
Příklad budeme řešit odděleně pro $x \to +\infty$ a $x \to -\infty$. Nejprve nakreslíme graf funkce $y = e^x$.

```
> plot(exp(x), x=-10..10,y=-5..20);
```



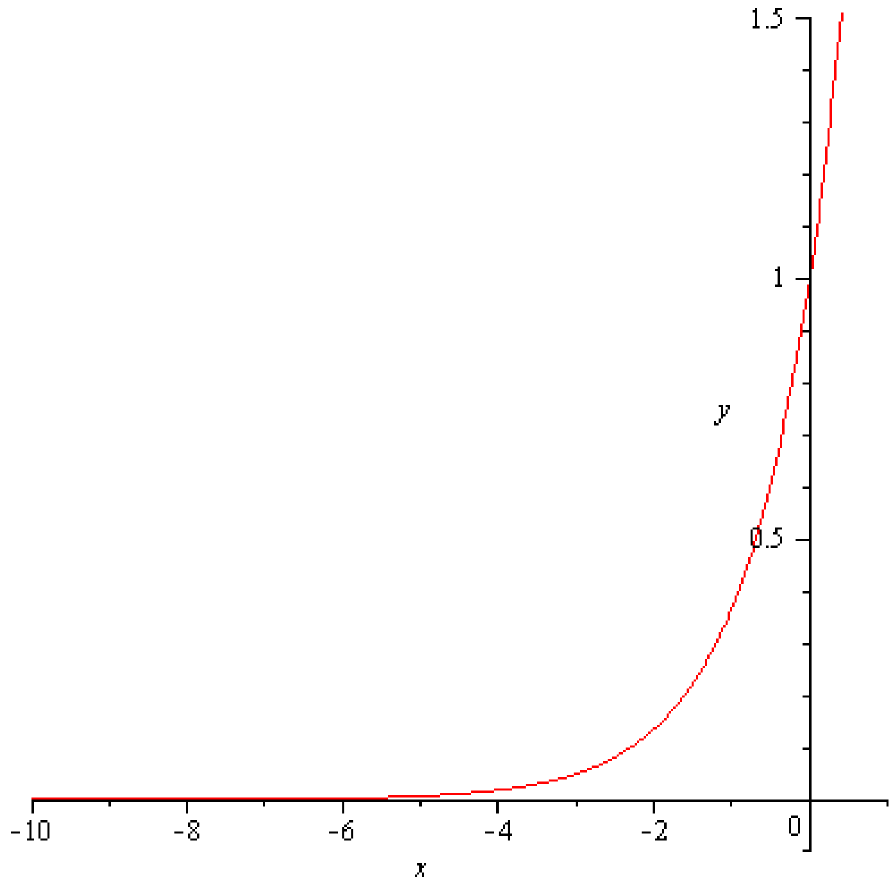
Dále nakreslíme graf funkce $y = e^x + x$. Všimněte si, jak se graf funkce e^x přičtením funkce x změní.

```
> plot(exp(x)+x, x=-10..10,y=-5..20);
```



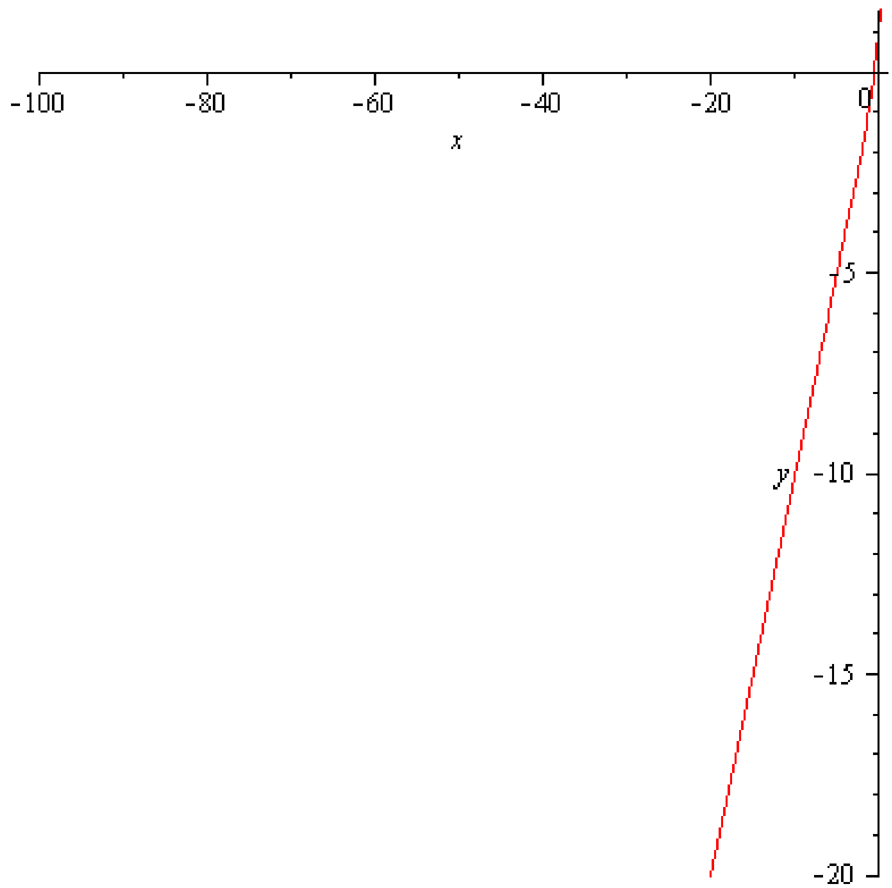
Pro $x \to -\infty$ dostaneme následující grafy, nejprve $y = e^x$.

```
> plot(exp(x), x=-10..1,y=-0.1..1.5);
```



Opět si všimněte, jak vypadá graf funkce $y = e^x + x$.

```
> plot(exp(x)+x, x=-100..1,y=-20..1.5);
```



Z grafu exponenciální funkce je zřejmé, že pro $x \to +\infty$ hodnoty neomezeně rostou, zatímco pro $x \to$ Z grafu exponenciální funkce je zřejmé, že pro $x \to +\infty$ hodnoty neomezeně rostou, zatímco pro $x \to$
$-\infty$ klesají k nule, přičemž nuly nedosáhnou
. Do výsledku pak velmi výrazně zasáhne přičtení funkce *x*.

```
> limit(exp(x)+x,x=infinity);
```

$$\infty$$

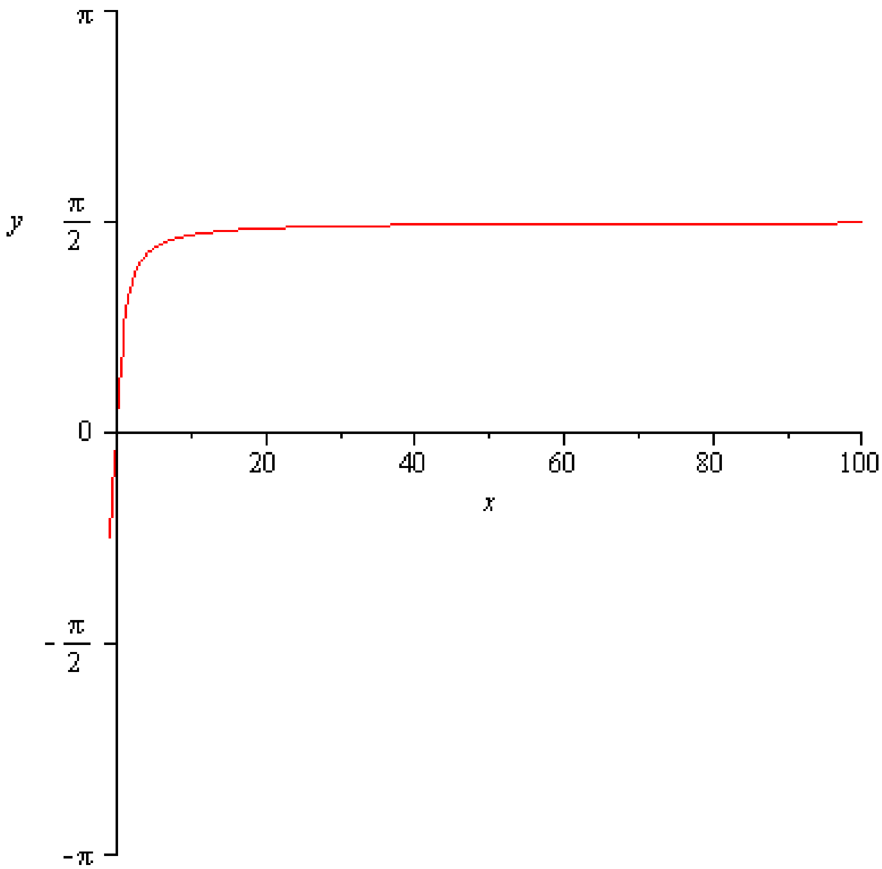
```
> limit(exp(x)+x,x=-infinity);
```

$$-\infty$$

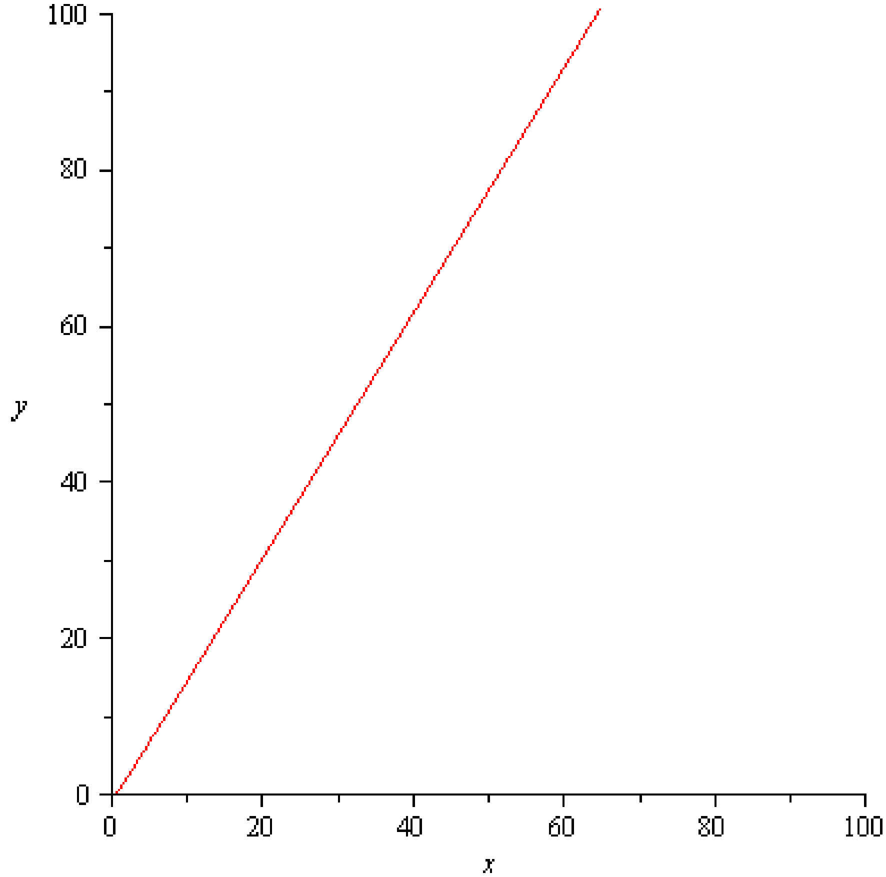
$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot arctg\, x$$

Nejprve znázorníme funkci $y = arctg\, x$.

```
> plot(arctan(x),x=-1..100,y=-Pi..Pi,tickmarks =
[default,spacing((1/2)*Pi)]);
```




```
> plot(x*arctan(x),x=0..100,y=-1..100);
```



Z grafu je zřejmé, že hodnota funkce $y = arctg\,x$ je pro $x \to +\infty$ se blíží k hodnotě $\frac{\pi}{2}$, tedy výsledek limity je ovlivněn násobením funkcí *x*.

```
> limit(x*arctan(x),x=infinity);
```

$$\infty$$

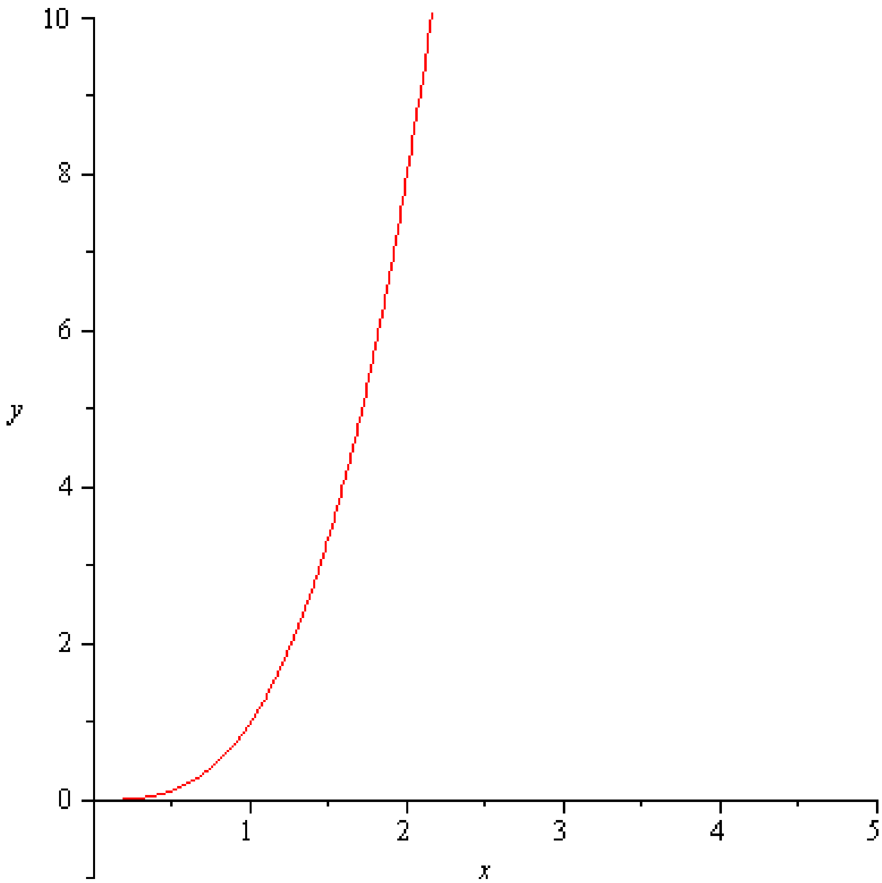
$$\lim_{x \to +\infty} x^s, s > 0$$

Zvolme např. s=3.

```
> s:=3;
```

$$s := 3$$

```
> plot(x^s,x=0..5,y=-1..10);
```



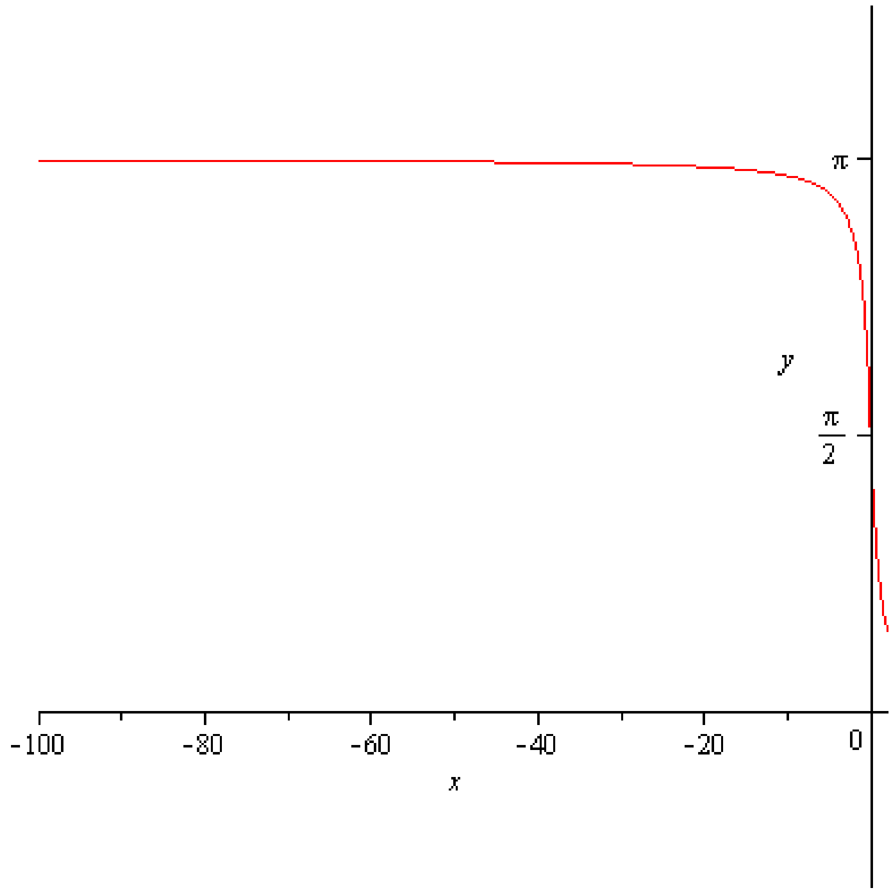
Z grafu je zřejmé, že daná funkce je rostoucí, tedy limita bude ∞.

```
> limit(x^s,x=infinity);
```

$$\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} arccotg\, x$$

```
> plot(arccot(x), x=-100..2,y=-1..4,tickmarks =
[default,spacing((1/2)*Pi)]);
```



Z grafu je zřejmé, že pokud jde $x \to -\infty$, funkční hodnoty se blíží k hodnotě π.

```
> limit(arccot(x),x=-infinity);
```

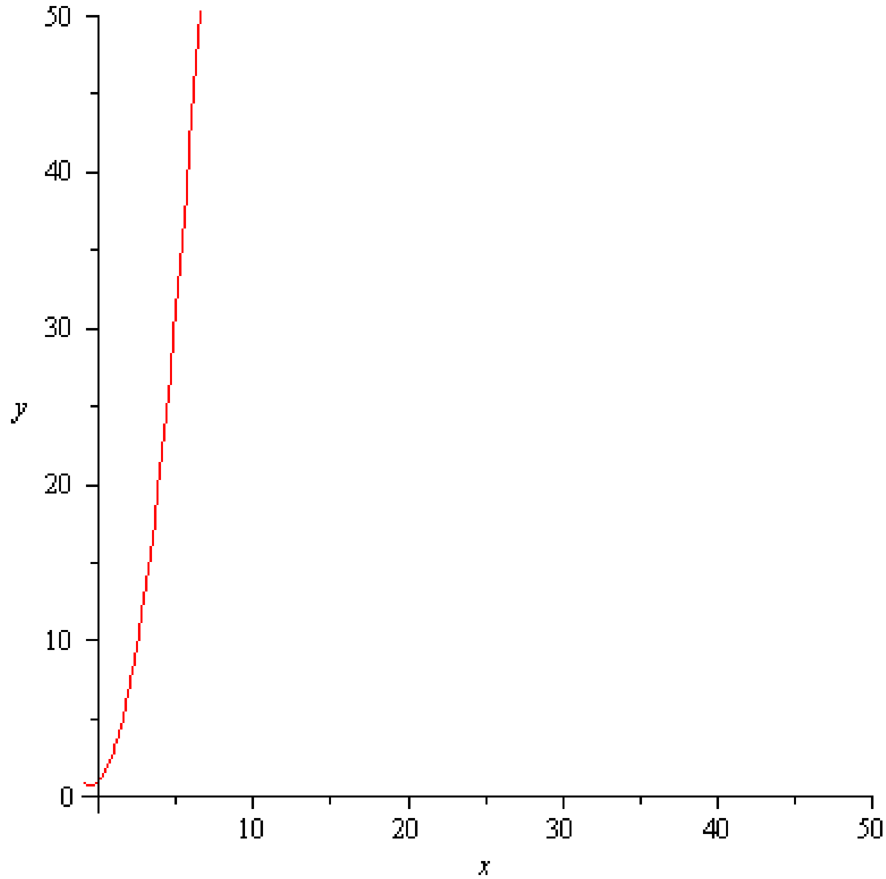
$$\pi$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\cos e^{x^2+x+1}}{x}$$

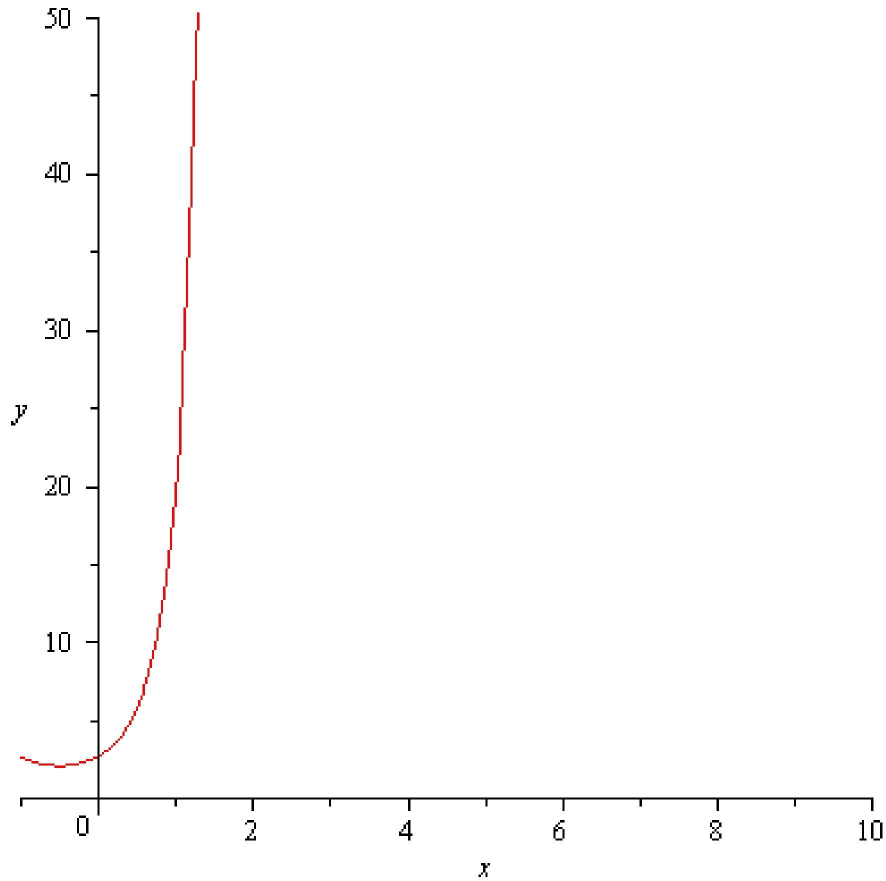
Funkce $y = \cos e^{x^2+x+1}$ je ohraničená funkce (viz obr.), její limita neexistuje, $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$. S využitím věty o limitě součinu nulové a ohraničené funkce zadanou limitu vypočteme.

Nakreslíme si postupně jak vypadají grafy jednotlivých složek složené funkce $y = \cos e^{x^2+x+1}$.

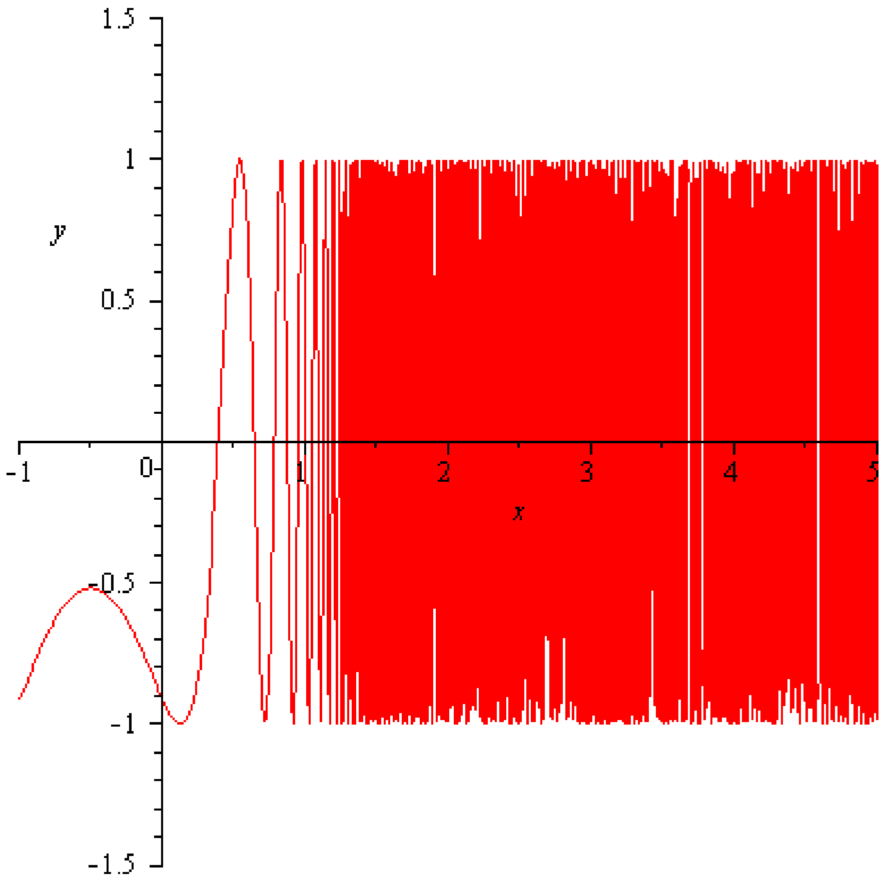
```
> plot(x^2+x+1,x=-1..50,y=-1..50);
```



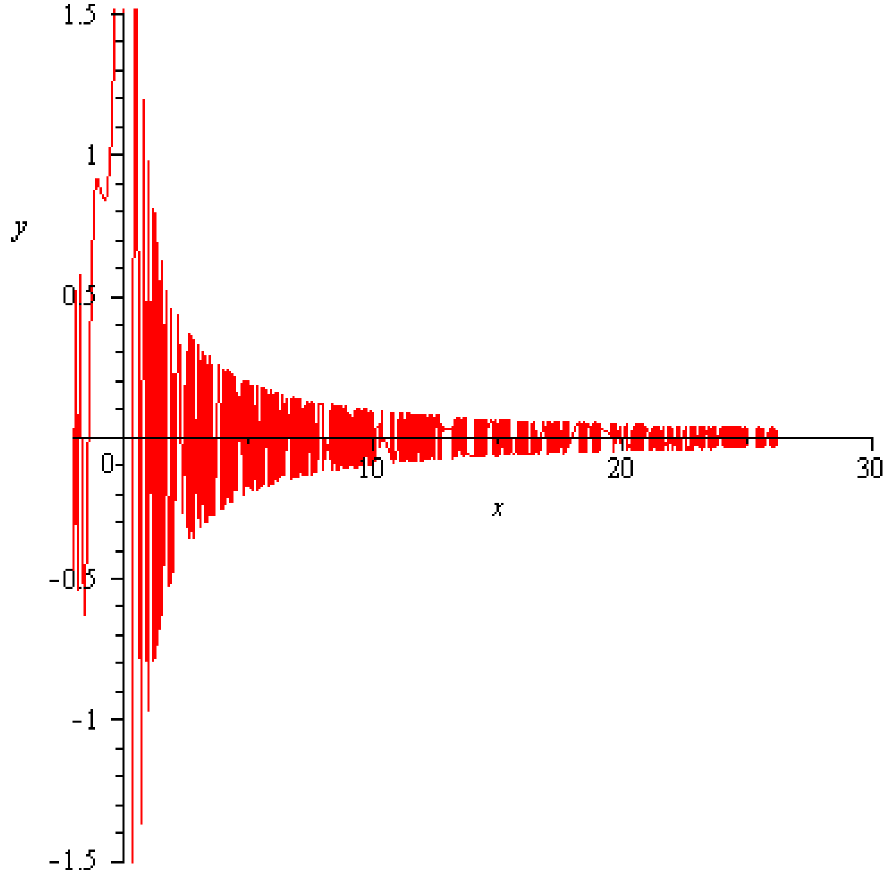

```
> plot(exp(x^2+x+1),x=-1..10,y=-1..50);
```




```
> plot(cos(exp(x^2+x+1)),x=-1..5,y=-1.5..1.5);
```




```
> plot(cos(exp(x^2+x+1))/x,x=-2..30,y=-1.5..1.5);
```



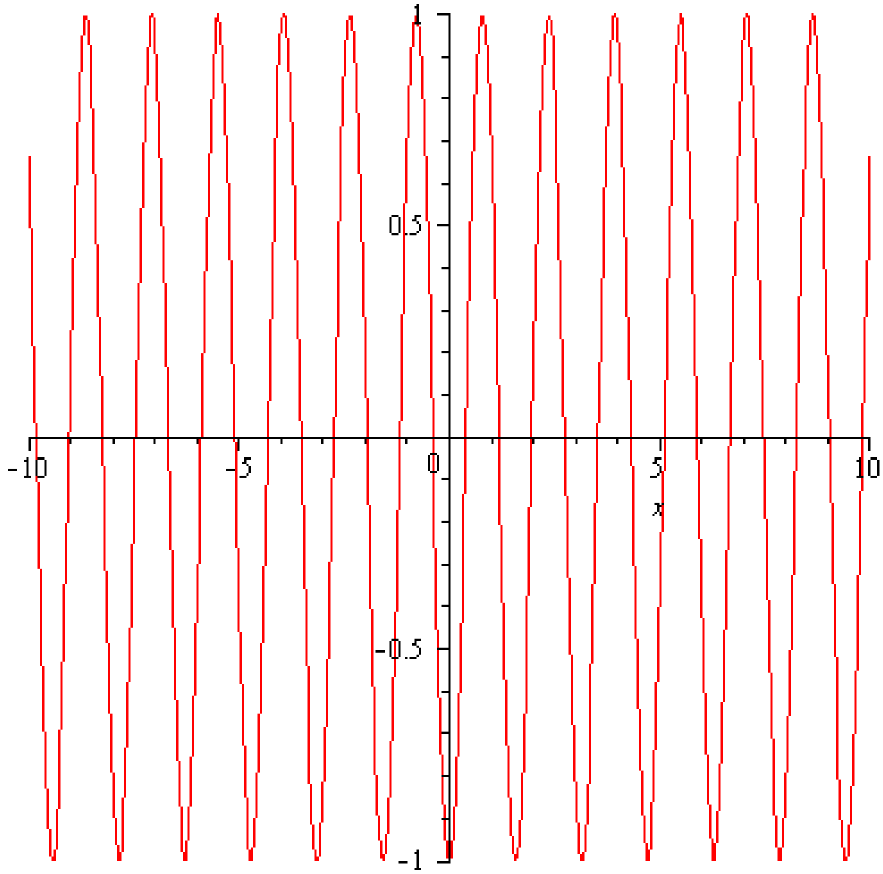

```
> limit(cos(exp(x^2+x+1))/x,x=infinity);
```

$$0$$

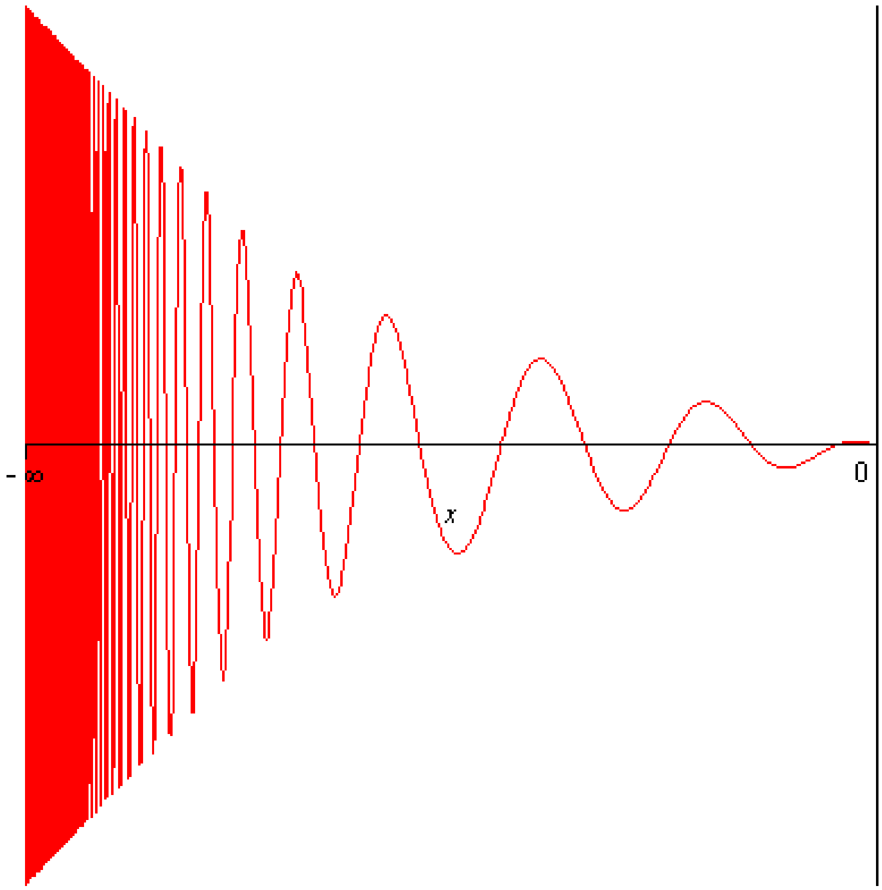
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\cos(4 \cdot x - \pi)}{2 \cdot x}$$

Funkce $y = \cos(4x - \pi)$ je ohraničená a její limita neexistuje (viz obr.), $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2x} = 0$. S využitím věty o limitě součinu nulové a ohraničené funkce zadanou limitu vypočteme.

```
> plot(cos(4*x-Pi));
```




```
> plot(cos(4*x-Pi)/2*x,x=-infinity..0);
```



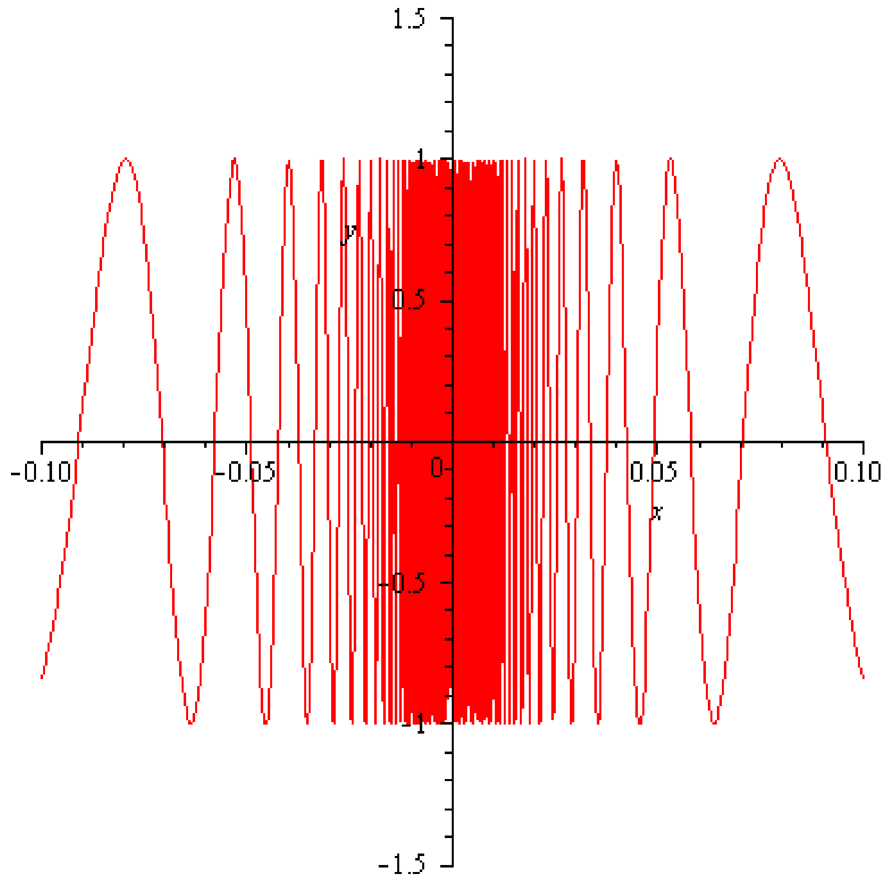

```
> limit((cos(4*x-Pi))/(2*x),x=-infinity);
```

$$0$$

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

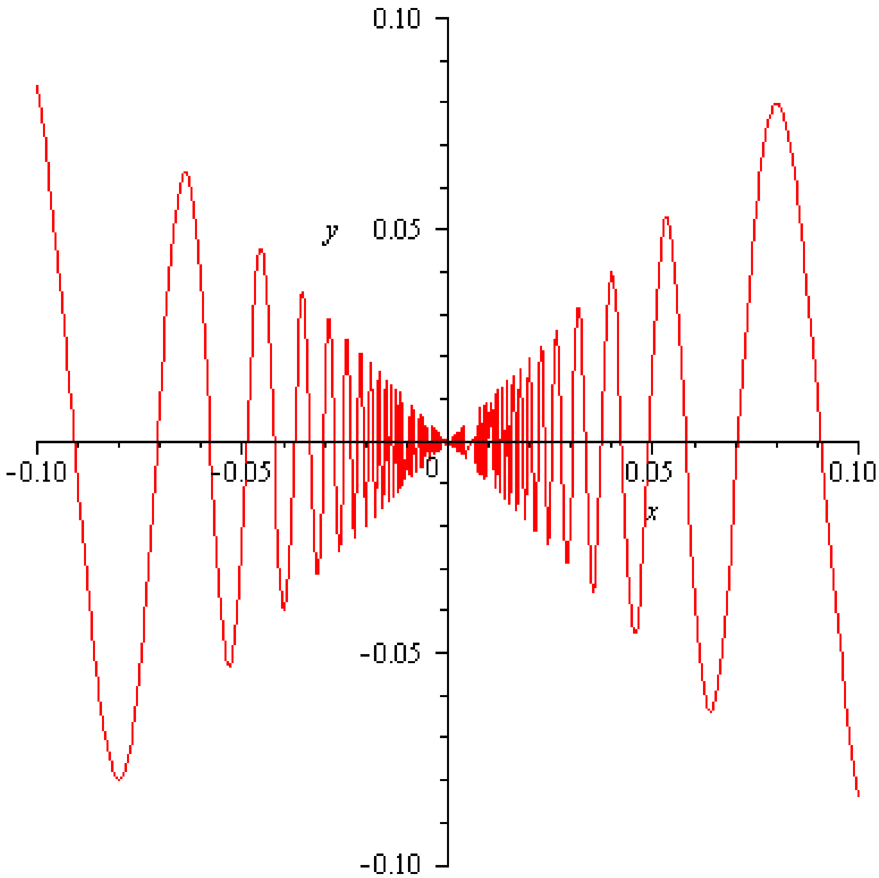
I když limita $\lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, neexistuje, zadaná limita existuje, protože $\lim_{x \to 0} x = 0$ a funkce $y = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ je ohraničená, viz obrázek.

```
> plot(cos(1/x),x=-0.1..0.1,y=-1.5..1.5);
```



Z obrázku je zřejmá ohraničenost funkce $y = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, nabývá hodnot z intervalu <-1,1>.

```
> plot(x*cos(1/x),x=-0.1..0.1,y=-0.1..0.1);
```




```
> limit(x*cos(1/x),x=0);
```

$$0$$

```
>
```