# Pomůcka pro cvičení: 2. semestr Bc studia

**Aplikace integrálů**

# Aplikace integrálů

## Délka křivky

Obecný vzorec pro výpočet délky křivky je **ArcLength(f(x),x=a..b),** pokud je křivka zadaná parametricky, provede se výpočet pomocí příkazu **ArcLength([f(x), g(x)], x=a..b).**

```
> with(Student[Calculus1]):
> ArcLength(f(x),x=a..b);
```

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{d}{dx} f(x)\right)^2 + 1}\, dx$$

```
> ArcLength([f(x), g(x)], x=a..b);
```

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{d}{dx} f(x)\right)^2 + \left(\frac{d}{dx} g(x)\right)^2}\, dx$$

**Příklad 1.** Vypočtěte délku oblouku paraboly $y = x^2, 0 \le x \le 3.$

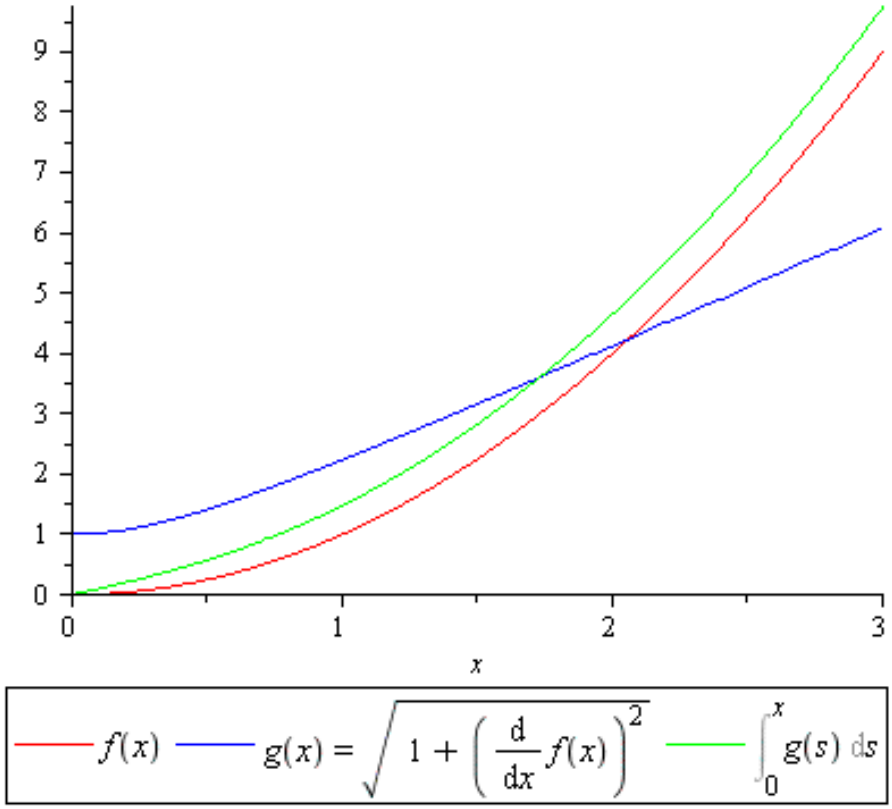
```
> ArcLength(x^2, x=0..3,output=integral);
```

$$\int_0^3 \sqrt{4x^2 + 1}\, dx$$

```
> ArcLength(x^2, x=0..3);
```

$$\frac{3}{2}\sqrt{37} - \frac{1}{4}\ln\left(-6 + \sqrt{37}\right)$$

```
> ArcLength(x^2, x=0..3,output=plot);
```




The arc length of $f(x) = x^2$ on the interval $[0, 3]$. The coordinate system is cartesian

**Příklad 2.** Určete délku oblouku rovinné křivky $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), a > 0.$

```
> assume(a>0);
> ArcLength([a*(t-sin(t)),a*(1-cos(t))],
t=0..2*Pi,output=integral);
```

$$\int_0^{2\pi} a\sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos(t)^2 + \sin(t)^2}\, dt$$

```
> ArcLength([a*(t-sin(t)),a*(1-cos(t))], t=0..2*Pi);
```

$$8\, a$$

## Obsah rovinného obrazce

Pro výpočet obsahu rovinného obrazce nemá Maple žádný zvláštní příkaz. Je potřeba si namalovat danou oblast a pokud je ohraničena grafem spojité nezáporné funkce $f(x)$, osou $x$ a přímkami $x = a, x = b$, použít vztahu $S = \int_a^b f(x)\, dx$. Pokud je oblast ohraničena grafy funkcí $f_1(x), f_2(x)$, které jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$ a pro něž platí $f_1(x) \le f_2(x)$, pak obsah vypočteme ze vzorce $S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx$.

**Příklad 1.** Vypočtěte obsah rovinného obrazce omezeného křivkami $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}, y = 0, x = -2, x = 2.$

Pro lepší představu si obrazec nejprve namalujeme.

```
> read("calcrp5.txt"):
Error, unable to read `calcrp5.txt`
> dydxplot(y=0..exp(x/2)+exp(-x/2),x=-2..2);
```

$$dydxplot\left(y = 0\,..e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}, x = -2\,..2\right)$$

```
>
S:=Int(exp(x/2)+exp(-x/2),x=-2..2)=int(exp(x/2)+exp(-x/2),x=-2..2
);
```

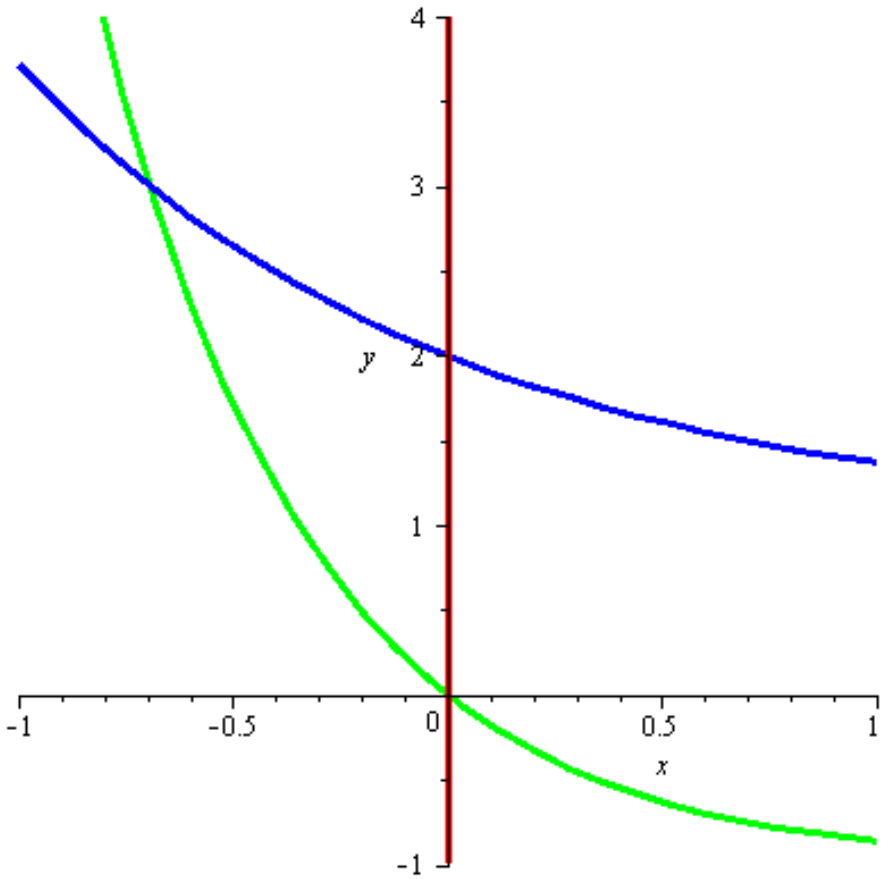
$$S := \int_{-2}^{2} \left(e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right) dx = -4\,e^{-1} + 4\,e$$

```
> simplify(%);
```

$$\int_{-2}^{2} \left(e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right) dx = 4\left(-1 + e^{2}\right) e^{-1}$$

**Příklad 2.** Vypočtěte obsah rovinného obrazce omezeného křivkami $y = e^{-x} + 1, y = e^{-2x} - 1, x = 0.$
Nejprve si obrazec nakreslíme. A určíme průsečík exponenciál.

```
> with(plots):
>
implicitplot([exp(-2*x)-1=y,exp(-x)+1=y,x=0],x=-1..1,y=-1..4,colo
r=[green,blue,red],thickness=3);
```



```
> solve(exp(-2*x)-1=exp(-x)+1);
```

$$-I\pi,\ -\ln(2)$$

Komplexní kořen pro nás nemá význam, tedy exponenciály se protínají v bodě $x=-\ln(2)$

```
>
S:=Int(exp(-x)+1-exp(-2*x)+1,x=-ln(2)..0)=int(exp(-x)+1-exp(-2*x)
+1,
x=-ln(2)..0);
```

$$S := \int_{-\ln(2)}^{0} \left(-e^{-2x} + 2 + e^{-x}\right) dx = 2\ln(2) - \frac{1}{2}$$

```
>
```