Pomůcka pro přednášku: 2. semestr Bc studia

Lokální a globální extrémy funkcí dvou proměnných

Extrémy funkcí

Lokální extrémy

balíček: LinearAlgebra

Při řešení příkladů na lokální extrémy se budeme držet postupu ze cvičení, tj. stanovíme stacionární body a pomocí znamének $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ a f_{xx} (resp. f_{yy}) rozhodneme o typu extrému. Pro lepší představu si vždy vykreslíme zadnou funkci a stejně tak si nakreslíme i okolí každého stacionárního bodu, abychom si udělali názornou představu o typu extrému.

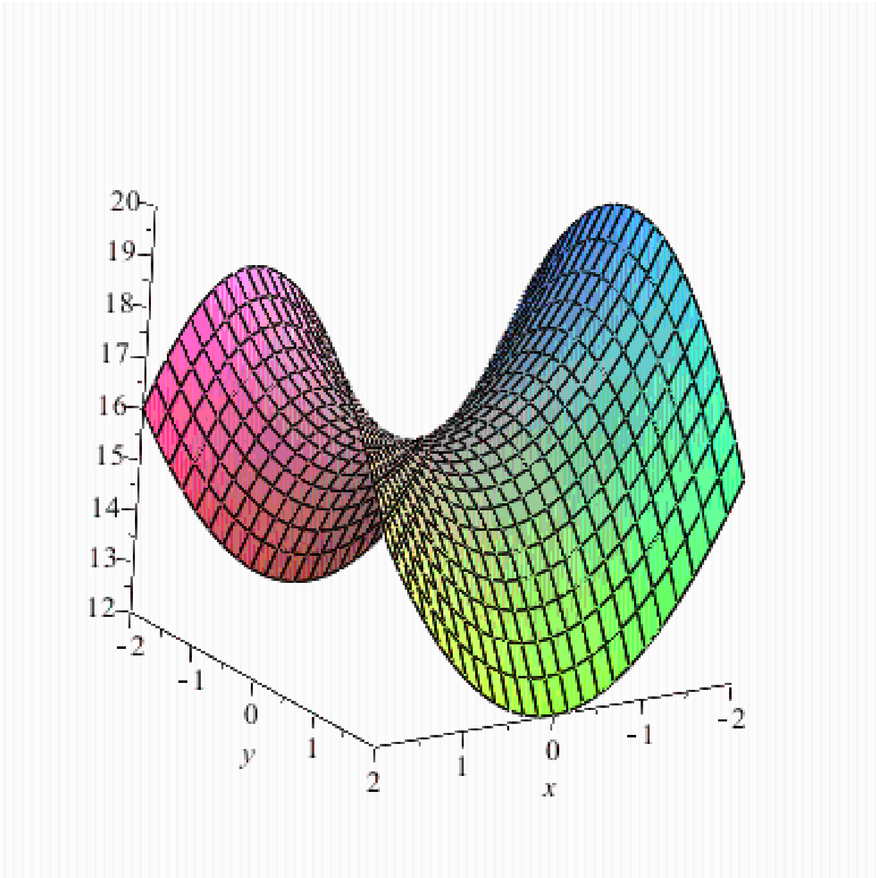
Příklad 1. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 - 3\,xy + y^3$.

```
> with(LinearAlgebra):
> with(plots):
```

Pro představu si vykreslíme graf funkce v okolí počátku.

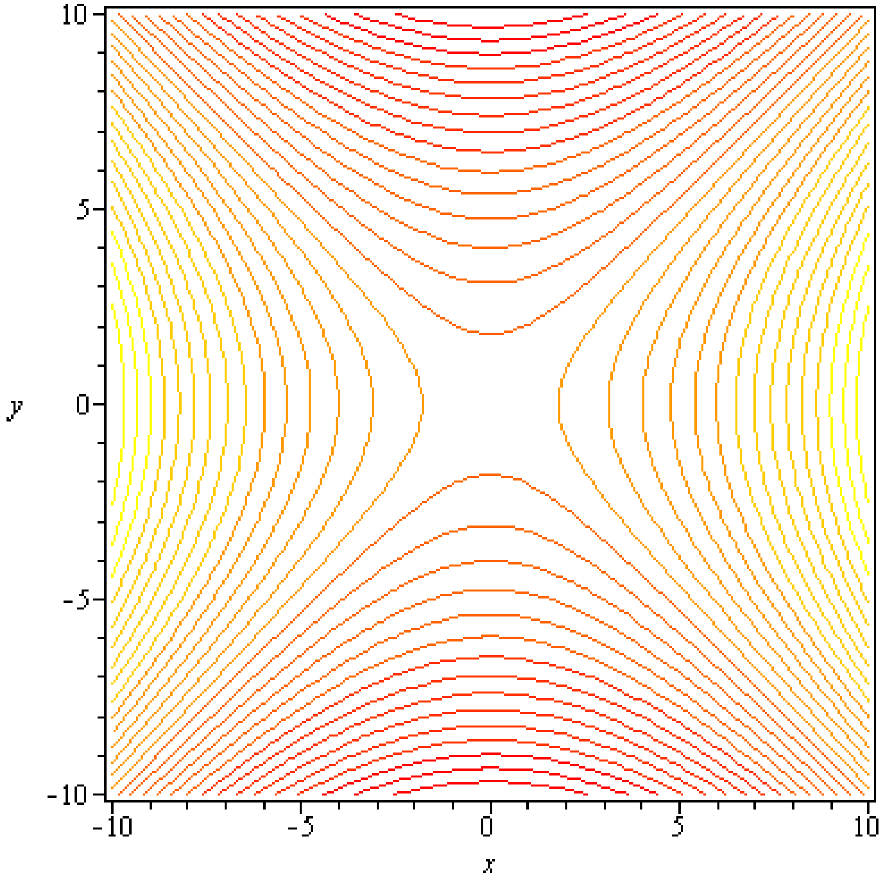
K nakreslení použijeme příkaz **plot3d(expr, x=a..b, y=c..d, opts).**Jako nepovinný parametr lze použít příkaz **axes=framed**, který zakreslí souřadnicové osy, další nepovinný příkaz **orientation=[ϑ, ϕ, ψ]** nastavuje pomocí úhlů ϑ, ϕ a ψ (tzv. Eulerovy úhly) souřadnice bodu v R_3, ze kterého je daný objekt pozorován. Úhly se zadávají ve stupních, standardně jsou úhly nastaveny na $[45, 45, 0]$.

```
> 
plot3d(f(x,y),x=-2..2,y=-2..2,axes=framed,orientation=[65,70,10])
;
```



Vrstevnice znázorňujeme příkazem **contourplot(expr1, x=a..b, y=c..d, opts),** nepovinný parametr **grid=[m,n]** určuje počet generovaných bodů obdélníkové sítě.

```
> contourplot(f(x,y),x=-10..10,y=-10..10,grid=[50,50],contours=30,axes=boxed);
```




```
> fx:=diff(f(x,y),x);
```

$$fx := 2\,x$$

```
> fy:=diff(f(x,y),y);
```

$$fy := -2\,y$$

Pomocí příkazu **solve** řešíme soustavu $f_x = 0, f_y = 0.$ Řešením najdeme stacionární body.

```
> s:=solve({fx,fy});
```

$$s := \{x = 0, y = 0\}$$

Řešením soustavy jsme získali dva body [0,0] a [1,1]. Další stacionární body získáme řešením
Řešením soustavy jsme získali dva body [0,0] a [1,1]. Další stacionární body získáme řešením
$\{x = -1 - RootOf(\_Z^2 + \_Z + 1, label = \_L2), y = RootOf(\_Z^2 + \_Z + 1, label = \_L2)\}.$

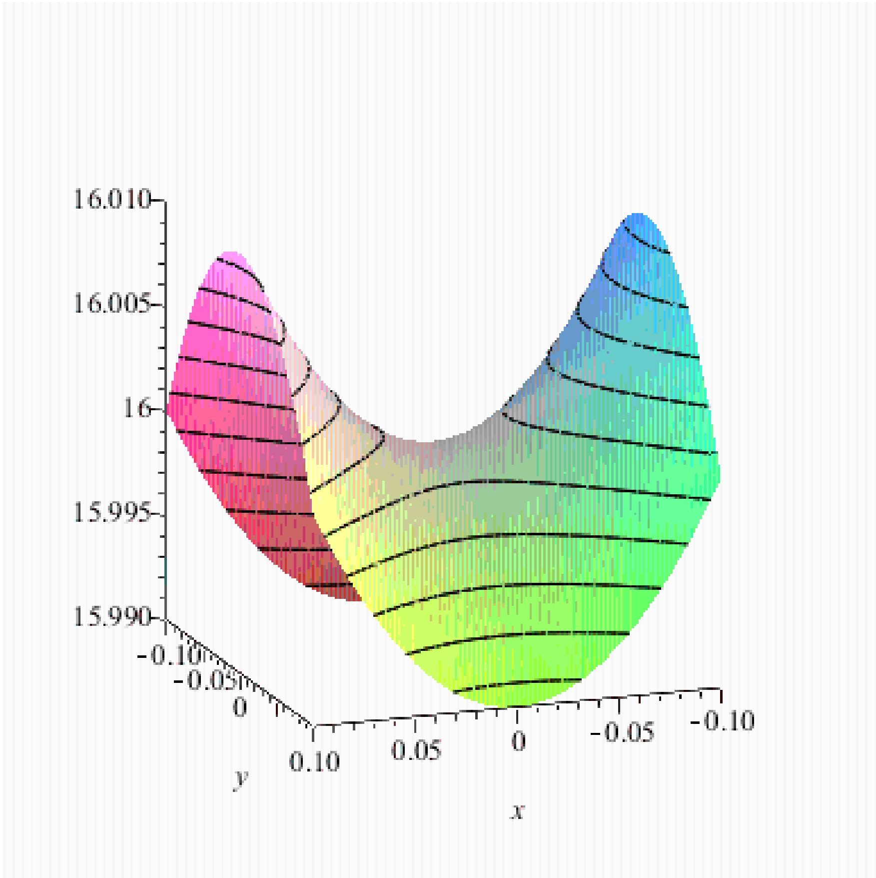
```
> s:=map(allvalues,{s});
```

$$s := \{\{\{x = 0, y = 0\}\}\}$$

Vzhledem k tomu, že souřadnice dalších dvou bodů jsou komplexní čísla, z dalších úvah je vyloučíme.
Sestrojíme grafy v okolí stacionárních bodů. Při řešení použijeme nepovinný parametr **style=patchcontour**, který zajistí vykreslení vrstevnic.

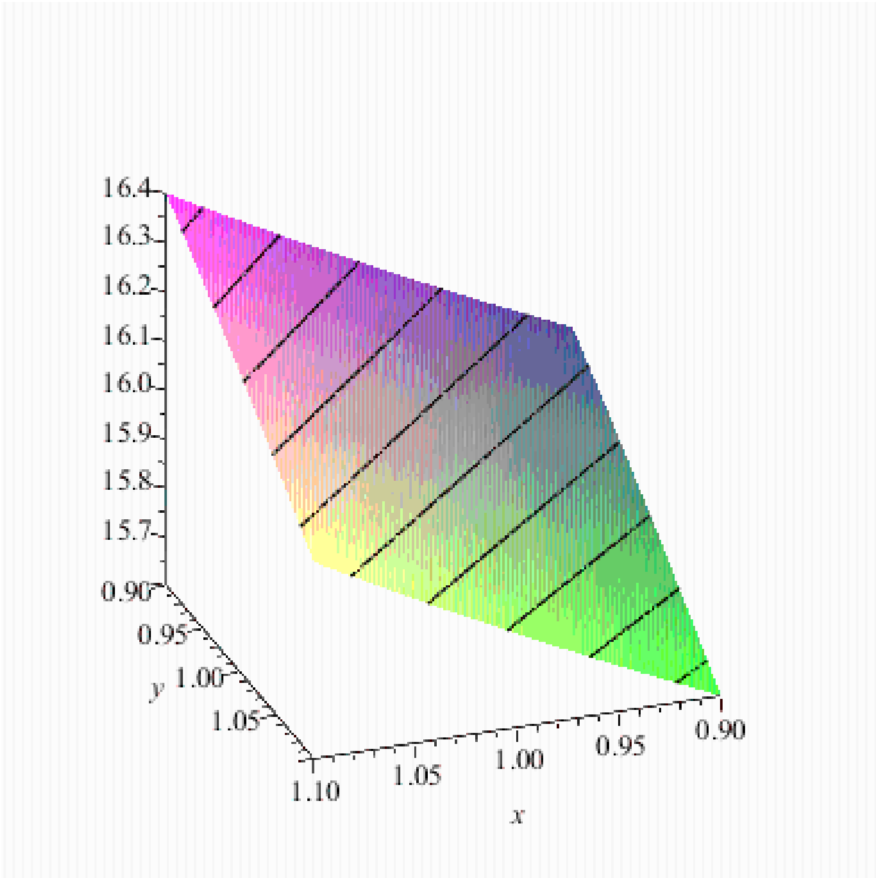
```
>
plot3d(f(x,y),x=-0.1..0.1,y=-0.1..0.1,orientation=[70,75,0],style
```

```
=patchcontour,axes=framed);
```



Z tvaru obrázku je zřejmé, že bod [0,0] je sedlovým bodem, a tudíž v něm extrém nenastává.

```
>
plot3d(f(x,y),x=0.9..1.1,y=0.9..1.1,orientation=[70,65,0],style=p
atchcontour,axes=framed);
```



Situace v bodě [1,1] je odlišná, podle obrázku v něm bude lokální minimum. Tyto předpoklady podpoříme výpočtem.

```
> fxx:=diff(f(x,y),x$2);
```

$$fxx := 2$$

```
> fxy:=diff(f(x,y),x,y);
```

$$fxy := 0$$

```
> fyy:=diff(f(x,y),y$2);
```

$$fyy := -2$$

```
> D2:=Matrix(2,2,[fxx,fxy,fxy,fyy]);
```

$$D2 := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

```
> Determinant(D2);
```

$$-4$$

```
> x:=0:y:=0:Determinant(D2);
```

$$-4$$

Determinant je záporný, tedy v bodě [0,0] extrém skutečně nenastává.

```
> fxx(0,0);
```

$$2$$

```
> f(0,0);
```

$$16$$

Pokud chceme do determinantu D2 dosadit souřadnice bodu [1,1], je nejprve , to uděláme pomocí příkazu unassign.

```
> unassign('x','y'):x:=1:y:=1:Determinant(D2);
```

$$-4$$

```
> fxx(1,1);
```

$$2$$

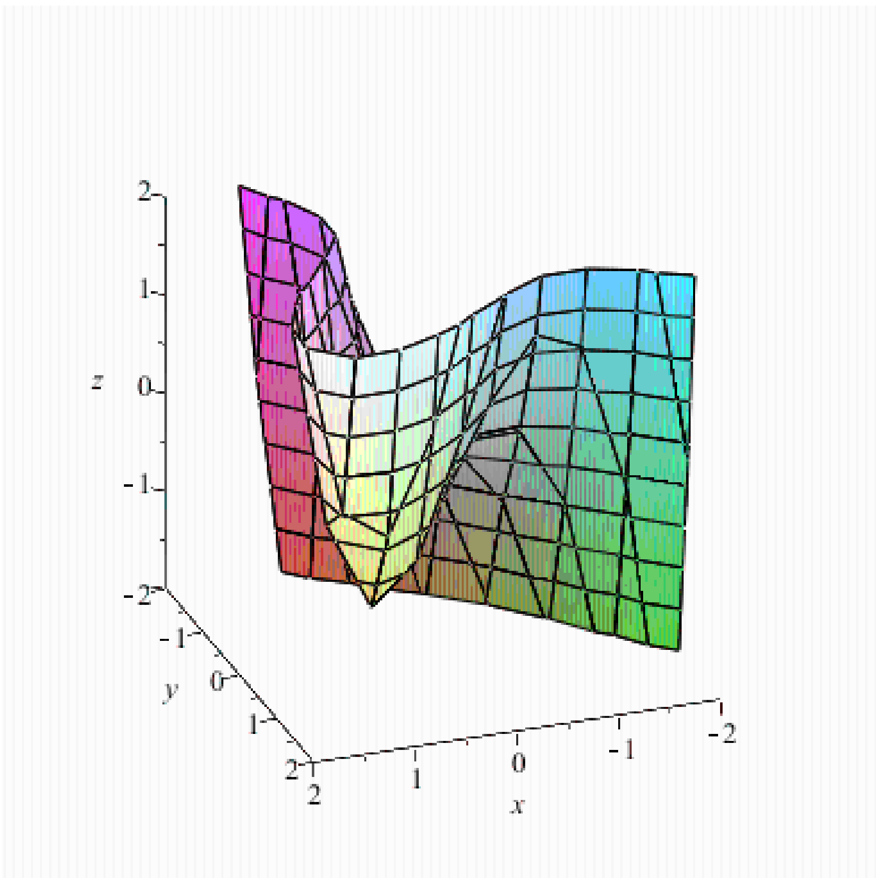
```
> f(1,1);
```

$$16$$

V bodě [1,1] nabývá funkce svého lokálního minima $f_{\min} = 16$.

Zakreslení grafu funkce pomocí **implicitplot3d.**

```
> restart:
> with(plots):
> 
implicitplot3d(x^3-3*x*y+y^3=z,x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2,axes=frame
d,orientation=[70,65,0]);
```




```
> 
```

Příklad 2. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$.

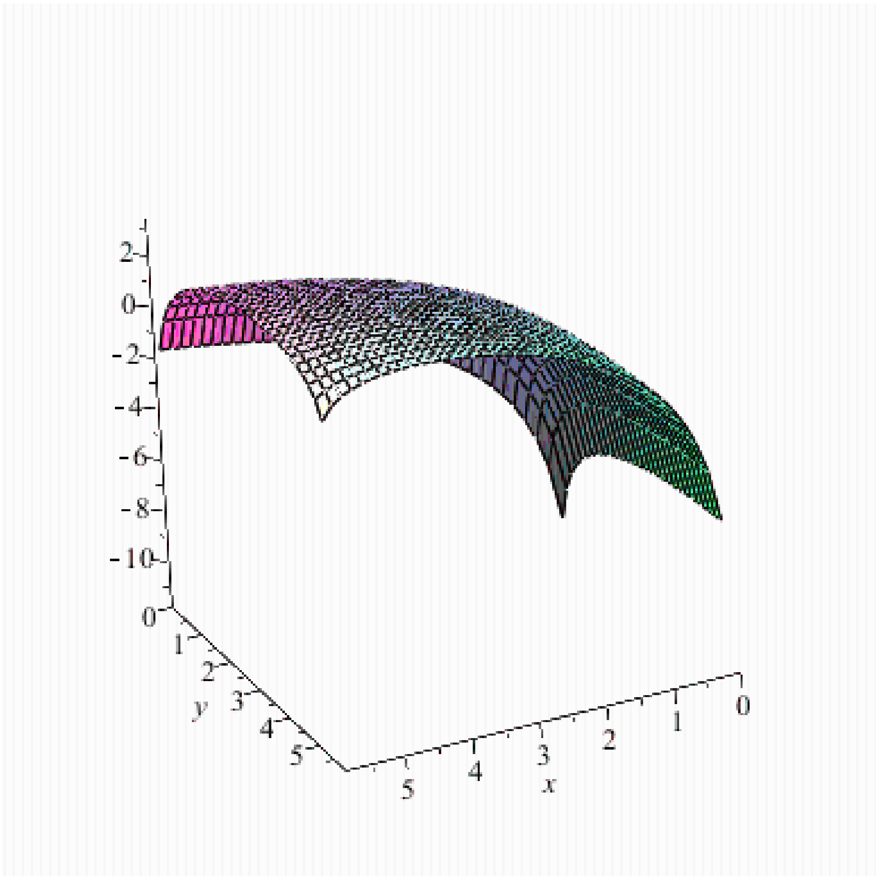
```
> restart;
> with(LinearAlgebra):
> with(plots):
```

```
> f:=(x,y)->3*ln(x/6)+2*ln(y)+ln(12-x-y);
```

$$f := (x, y) \rightarrow 3 \ln\left(\frac{1}{6} x\right) + 2 \ln(y) + \ln(12 - x - y)$$

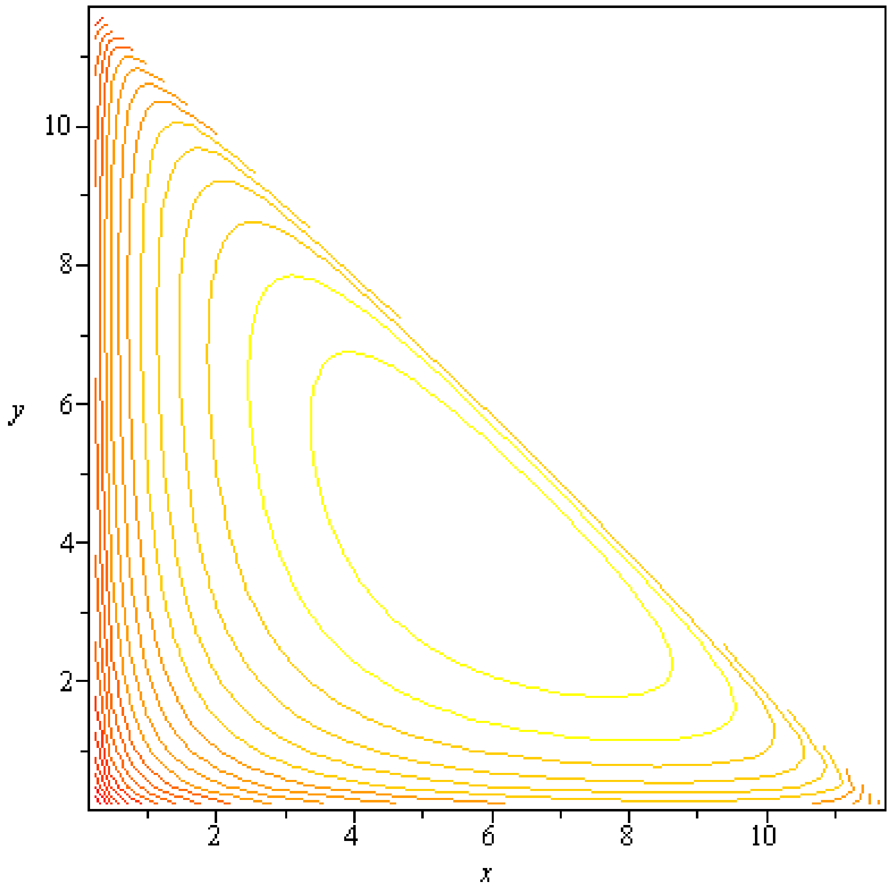
Graf funkce $f(x, y)$. Všimněte si definičního oboru dané funkce.

```
>
plot3d(f(x,y),x=0..5.9,y=0..5.9,axes=framed,style=patch,grid=[40,
30],orientation=[59,64,-8]);
```



Vrstevnice funkce $f(x, y)$.

```
>
contourplot(f(x,y),x=0..11.9,y=0..11.9,grid=[50,50],contours=20,a
xes=boxed);
```



Určení stacionárních bodů.

```
> fx:=diff(f(x,y),x);
```

$$fx := \frac{3}{x} - \frac{1}{12 - x - y}$$

```
> fy:=diff(f(x,y),y);
```

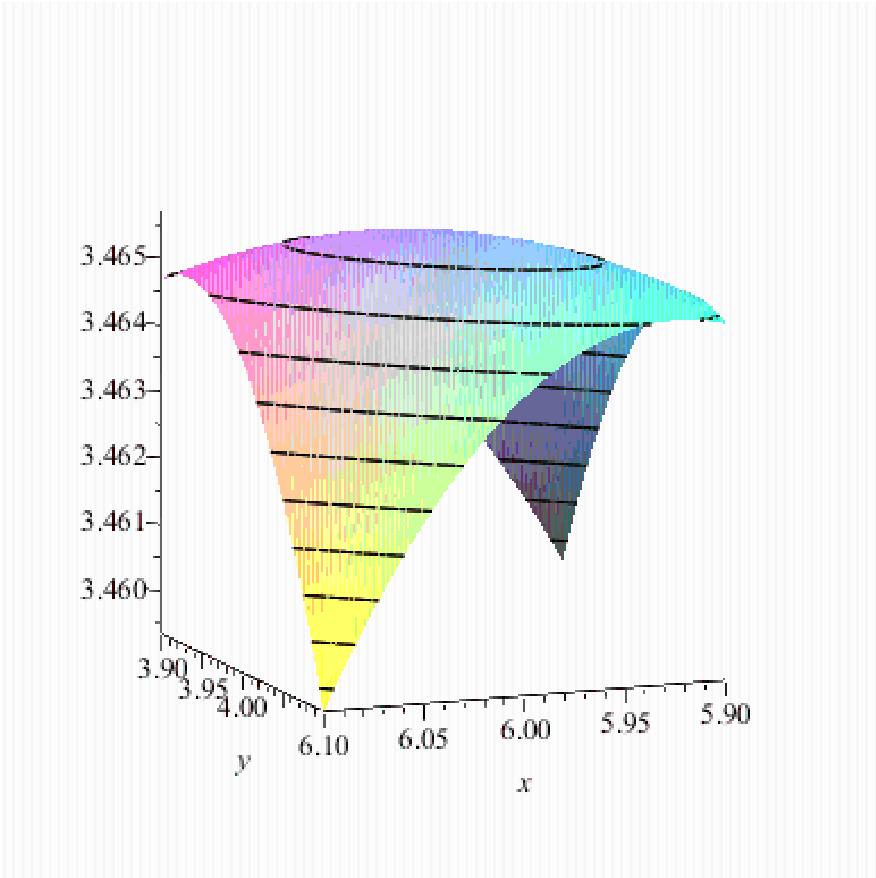
$$fy := \frac{2}{y} - \frac{1}{12 - x - y}$$

```
> solve({fx,fy});
```

$$\{x = 6, y = 4\}$$

V našem případě vyšel pouze jeden stacionární bod [6,4].
Graf okolí stacionárního bodu [6,4].

```
>
plot3d(f(x,y),x=5.9..6.1,y=3.9..4.1,orientation=[68,79,0],style=p
atchcontour,axes=framed);
```



Podle tvaru grafu v okolí stacionárního bodu [6,4] lze usuzovat, že v daném bodě bude lokální maximum.

Ověření, zda je ve stacionárním bodě lokální maximum.

```
> fxx:=diff(f(x,y),x$2);
```

$$fxx := -\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(12 - x - y)^2}$$

```
> fxy:=diff(f(x,y),x,y);
```

$$fxy := -\frac{1}{(12 - x - y)^2}$$

```
> fyy:=diff(f(x,y),y$2);
```

$$fyy := -\frac{2}{y^2} - \frac{1}{(12 - x - y)^2}$$

```
> D2:=Matrix(2,2,[fxx,fxy,fxy,fyy]);
```

$$D2 := \begin{bmatrix} -\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(12 - x - y)^2} & -\frac{1}{(12 - x - y)^2} \\ -\frac{1}{(12 - x - y)^2} & -\frac{2}{y^2} - \frac{1}{(12 - x - y)^2} \end{bmatrix}$$

```
> Determinant(D2);
```

$$\frac{8x^2 - 144x + 12xy + 9y^2 - 144y + 864}{y^2 x^2 (-12 + x + y)^2}$$

```
> x:=6:y:=4:Determinant(D2);
```

$$\frac{1}{16}$$

```
> fxx(6,4);
```

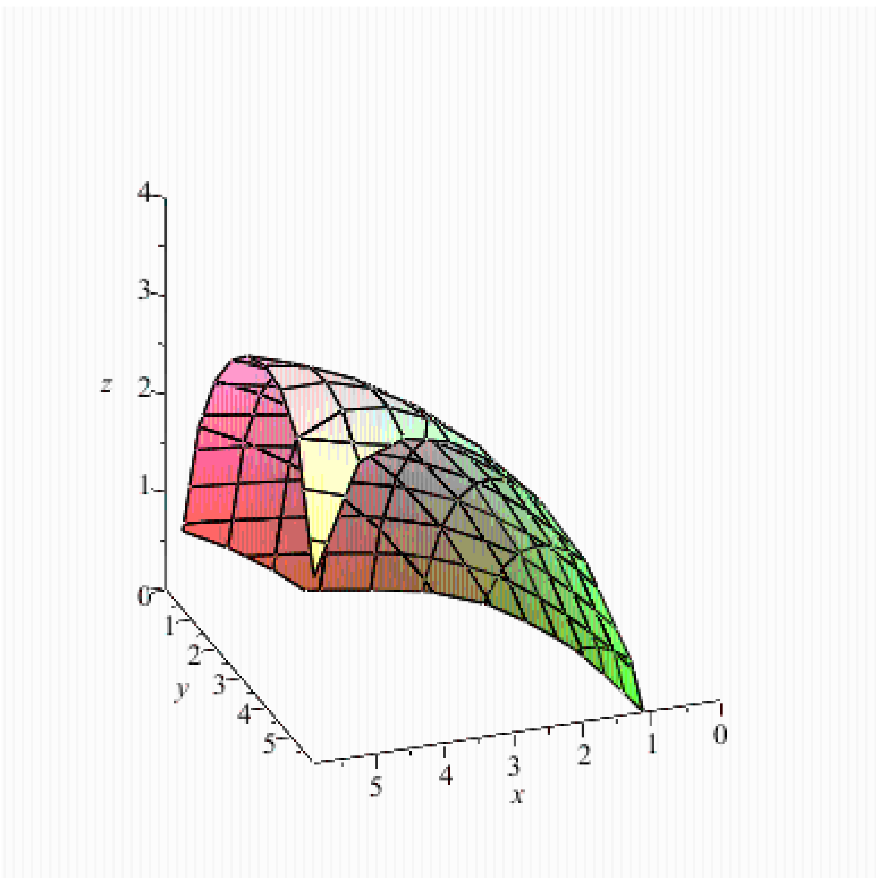
$$-\frac{1}{3}$$

```
> f(6,4);
```

$$5\ln(2)$$

Protože výraz $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$ a hodnota $f_{xx}<0$, nastává v bodě [6,4] lokální maximum $f_{\max}=5\ln(2)$.

```
> restart:
> with(plots):
>
implicitplot3d(3*ln(x/6)+2*ln(y)+ln(12-x-y)=z,x=0..5.9,y=0..5.9,z
=0..4,style=patch,axes=framed,labels=[x,y,z],orientation=[70,65])
;
```



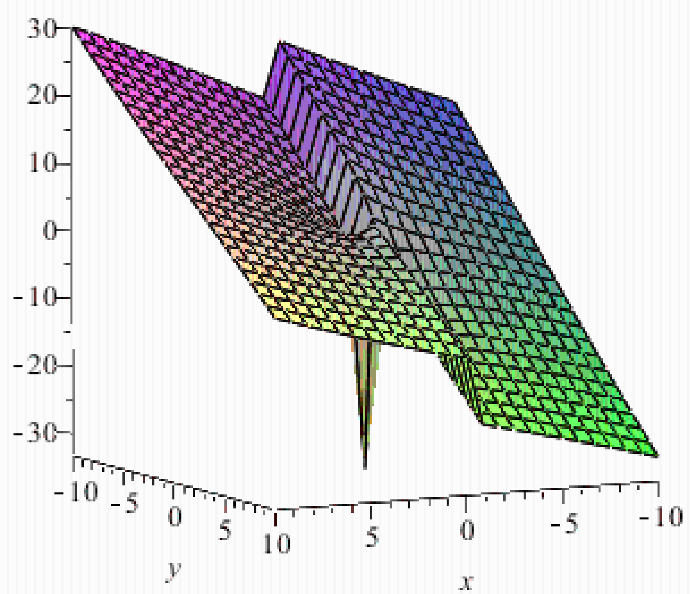
Příklad 3. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y)=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\,arctg\,\frac{y}{x}$.

```
> with(LinearAlgebra):
> with(plots):
> f:=(x,y)->x-2*y+ln(sqrt(x^2+y^2))+3*arctan(y/x);
```

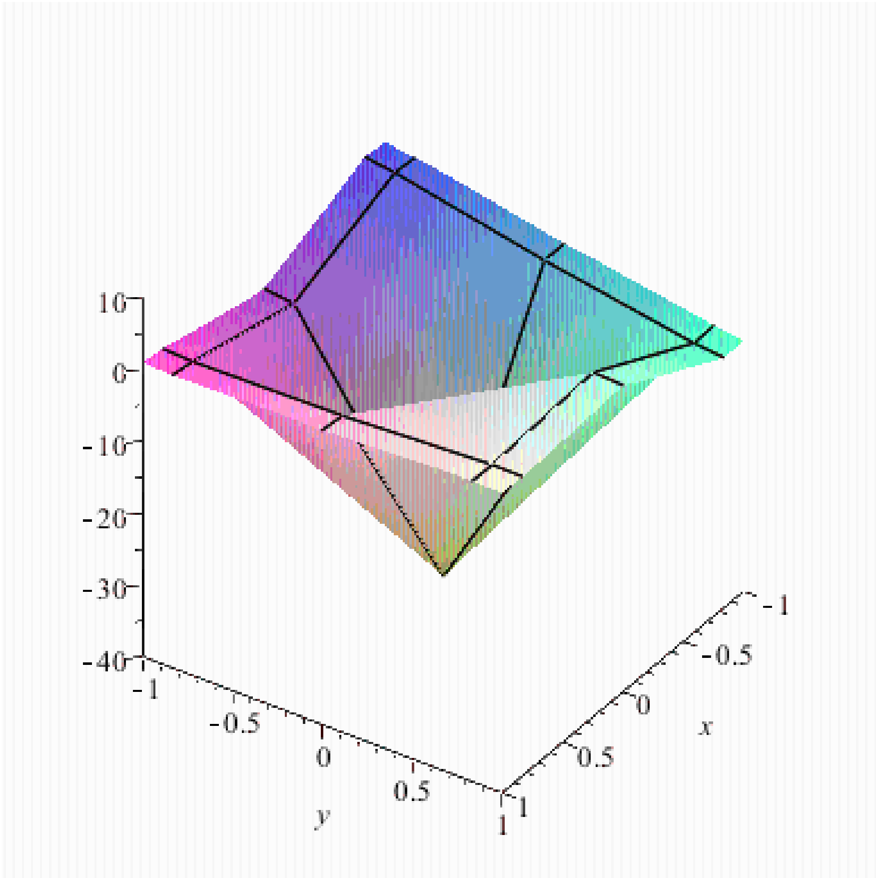
$$f := (x, y) \rightarrow x - 2y + \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + 3 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Graf funkce $f(x, y)$. Definičním oborem je celá rovina kromě bodů [0, y].

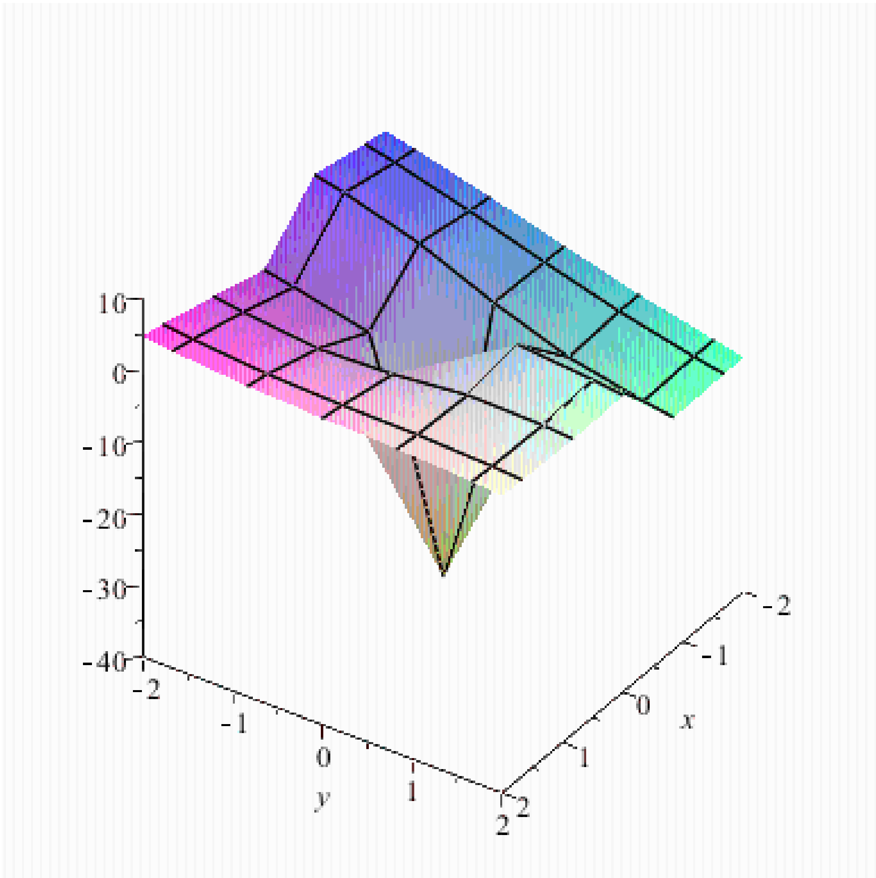
```
> plot3d(f(x,y),x=-10..10,y=-10..10,axes=framed,orientation=[62,82,0]);
```




```
> plot3d(f(x,y),x=-10..10,y=-10..10,view=[-1..1,-1..1,-40..10],axes=framed,orientation=[34,56,0]);
```

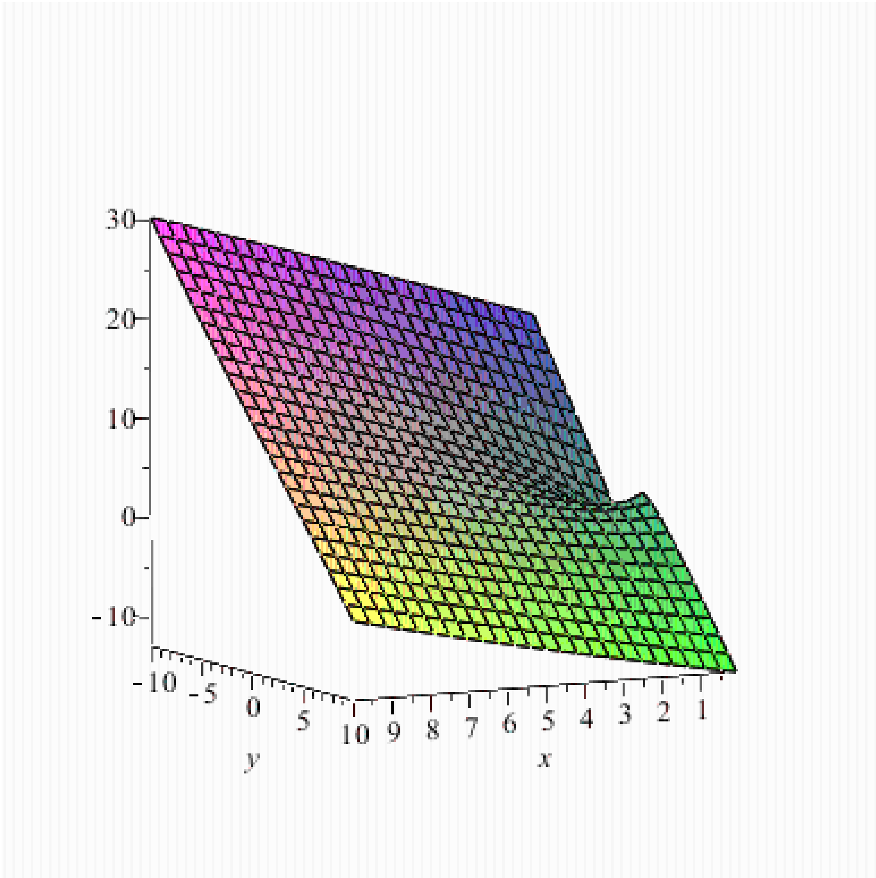



```
>
plot3d(f(x,y),x=-10..10,y=-10..10,view=[-2..2,-2..2,-40..10],axes
=framed,orientation=[34,56,0]);
```

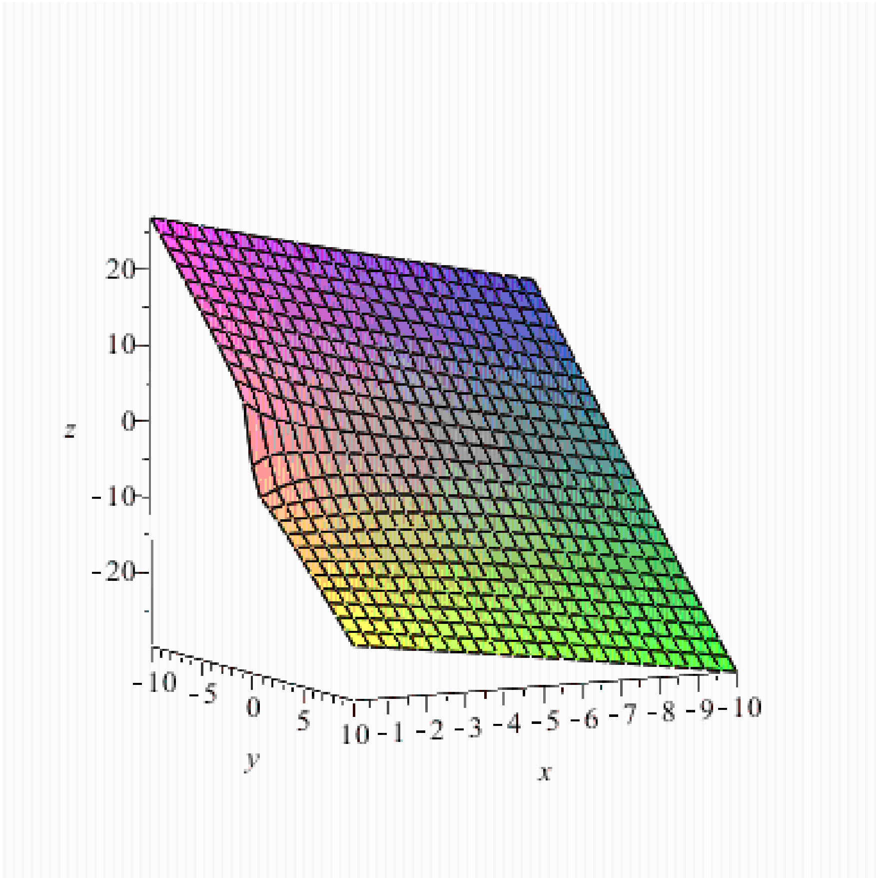


Ze získaného obrázku je zřejmé, že problémem jsou body s nulovou souřadnicí *x* (zobrazená "špice" rozhodně nebude extrém).Tyto body totiž nepatří do definičního oboru funkce.

```
> plot3d(f(x,y),x=0.1..10,y=-10..10,axes=framed,orientation=[62,82,0]);
```

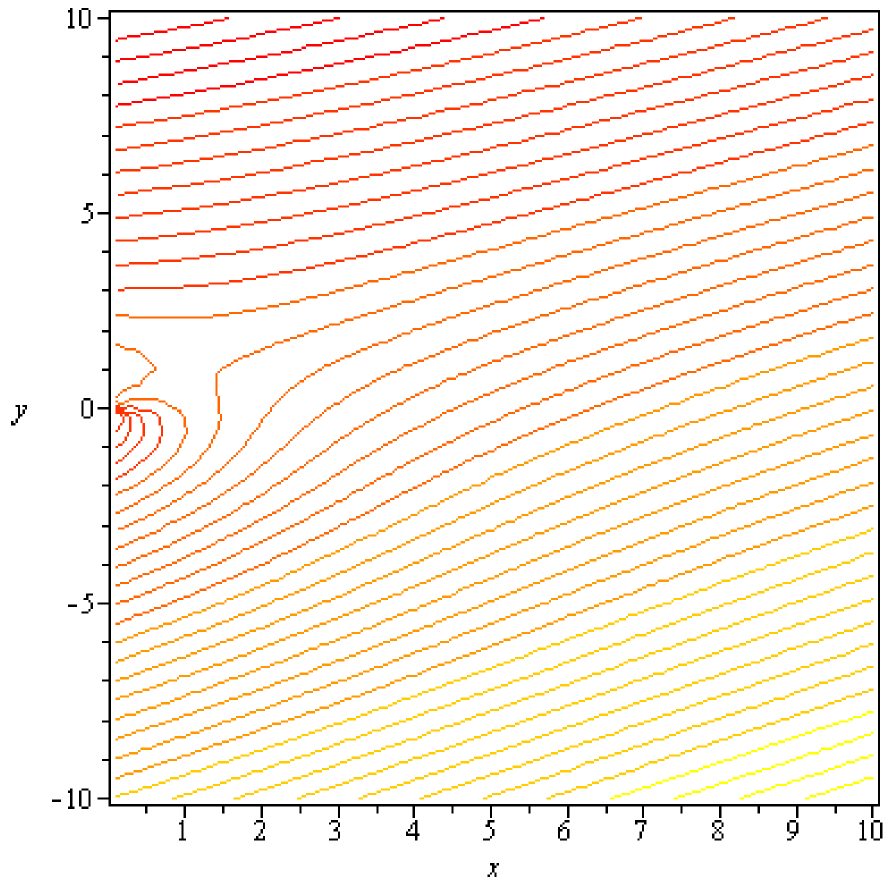



```
>
plot3d(f(x,y),x=-10..-0.1,y=-10..10,axes=framed,orientation=[62,8
2,0],labels=[x,y,z]);
```

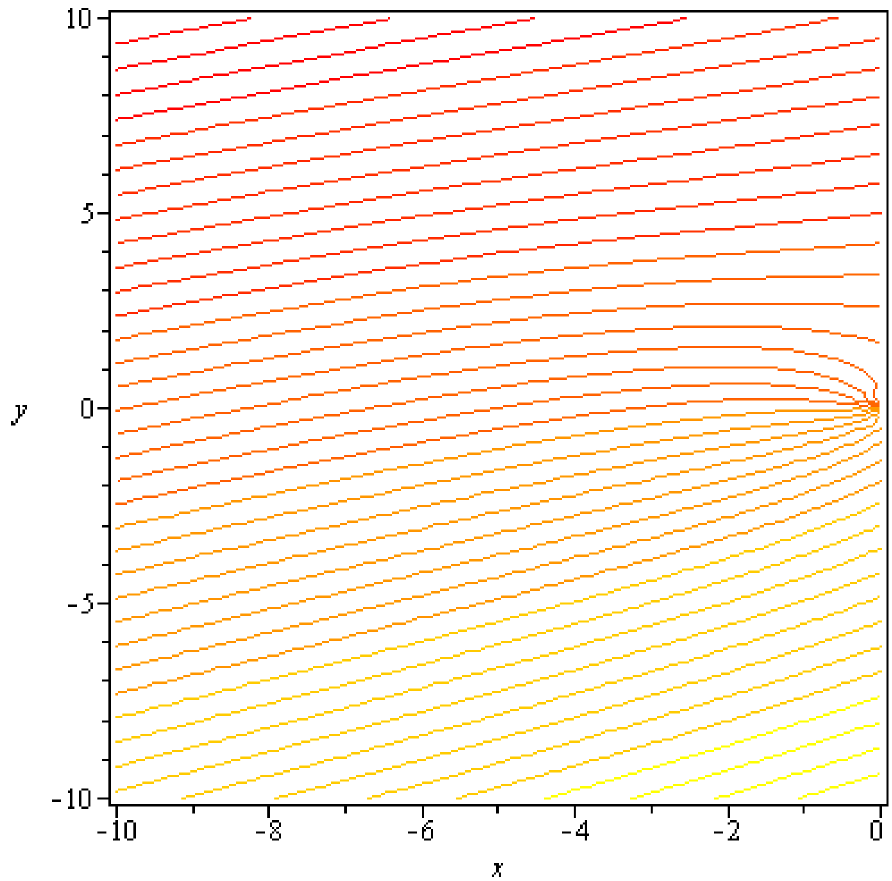


Vrstevnice funkce $f(x, y)$.

```
>
contourplot(f(x,y),x=0.1..10,y=-10..10,grid=[50,50],contours=40,a
xes=boxed);
```




```
>
contourplot(f(x,y),x=-10..-0.0001,y=-10..10,grid=[50,50],contours
=40,axes=boxed);
```



Určení stacionárních bodů.

```
> fx:=diff(f(x,y),x);
```

$$fx := 1 + \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{3\,y}{x^2\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)}$$

```
> fy:=diff(f(x,y),y);
```

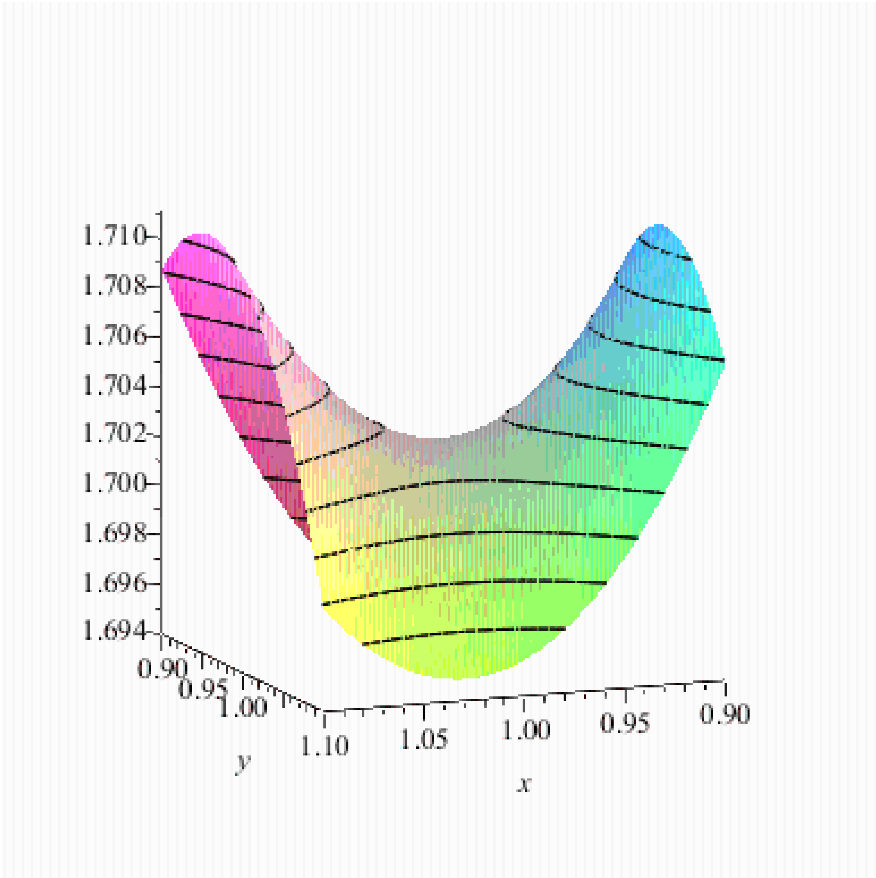
$$fy := -2 + \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{3}{x\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)}$$

```
> solve({fx,fy});
```

$$\{x = 1, y = 1\}$$

Graf okolí stacionárního bodu [1,1].

```
>
plot3d(f(x,y),x=0.9..1.1,y=0.9..1.1,orientation=[68,79,0],style=p
atchcontour,axes=framed);
```



Podle tvaru grafu se dá usuzovat, že v daném bodě nebude extrém.

```
> fxx:=diff(f(x,y),x$2);
```

$$fxx := \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2\,x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{6\,y}{x^3\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)} - \frac{6\,y^3}{x^5\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^2}$$

```
> fxy:=diff(f(x,y),x,y);
```

$$fxy := -\frac{2\,x\,y}{(x^2+y^2)^2} - \frac{3}{x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)} + \frac{6\,y^2}{x^4\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^2}$$

```
> fyy:=diff(f(x,y),y$2);
```

$$fyy := \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2\,y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{6\,y}{x^3\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^2}$$

```
> D2:=Matrix(2,2,[fxx,fxy,fxy,fyy]);
```

$$D2 := \left[\left[\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{6y}{x^3\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)} - \frac{6y^3}{x^5\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^2}, -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{3}{x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)} + \frac{6y^2}{x^4\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^2}\right], \left[-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{3}{x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)} + \frac{6y^2}{x^4\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^2}, \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{6y}{x^3\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^2}\right]\right]$$

```
> Determinant(D2);
```

$$-\frac{10}{(x^2+y^2)^2}$$

```
> x:=1:y:=1:Determinant(D2);
```

$$-\frac{5}{2}$$

```
> fxx(1,1);
```

$$\frac{3}{2}$$

Vzhledem k tomu, že hodnota determinantu D2 je záporná, v bodě [1,1] nenastává extrém.

```
> restart:
> with(plots):
> 
implicitplot3d(x-2*y+ln(sqrt(x^2+y^2))+3*arctan(y/x)=z,x=-2..2,y=
-2..2,z=-2..2,axes=boxed):
```

Globální extrémy

balíček: Student

Při řešení úloh na globální extrémy se při výpočtu opět budeme držet teorie. Najdeme stacionární body funkce $f(x,y)$ a pak budeme hledat body podezřelé z extrému na hranici množiny, tj. budeme hledat extrémy funkcí jedné proměnné na uzavřeném intervalu. V takto nalezených bodech vypočteme funkční hodnoty. Vybereme bod s největší a nejmenší z nich, v těchto bodech pak nastává globální maximum resp. minimum.

Příklad 1. Najděte globální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, M je obdélník s vrcholy $A = [0,-1], B = [2,-1], C = [2,2], D = [0,2]$.

```
> restart;
```

```
> f:=(x,y)->x^3+y^3-3*x*y;
```

$$f := (x, y) \to x^3 + y^3 - 3\,x\,y$$

Stanovíme stacionární body dané funkce a vyloučíme ty, které neleží v množině M.

```
> fx:=diff(f(x,y),x);
```

$$fx := 3\,x^2 - 3\,y$$

```
> fy:=diff(f(x,y),y);
```

$$fy := 3\,y^2 - 3\,x$$

```
> solve({fx,fy});
```

$$\{x = 0, y = 0\}, \{x = 1, y = 1\}, \{x = RootOf(\_Z^2 + \_Z + 1), y = -1 - RootOf(\_Z^2 + \_Z + 1)\}$$

Oba stacionární body leží v množině M, další body nepatří do množiny reálných čísel, proto je nebudeme dále uvažovat.
Určíme funkční hodnotu v obou nalezených bodech.

```
> f(0,0);f(1,1);
```

$$0$$

$$-1$$

Nyní budeme hledat body podezřelé z extrému na hranici množiny M. Pro $y=-1$ je $x \in \langle 0, 2 \rangle$. Funkci $f(x, y)$ nahradíme funkcí $u_1(x)$.

```
> u1:=unapply(subs(y=-1,f(x,y)),x);
```

$$u1 := x \to x^3 - 1 + 3\,x$$

Hledáme extrém fukce jedné proměnné.

```
> solve(diff(u1(x),x)=0,x);
```

$$I, -I$$

Řešením jsou komplexní čísla, ta z dalších úvah vyloučíme. Dále spočteme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu $\langle 0, 2 \rangle$.

```
> u1(0);u1(2);
```

$$-1$$

$$13$$

Nyní budeme hledat body na hranici množiny M. Pro $x = 2$ je $y \in \langle -1, 2 \rangle$. Funkci $f(x, y)$ nahradíme funkcí $u_2(y)$.

```
> u2:=unapply(subs(x=2,f(x,y)),y);
```

$$u2 := y \to 8 + y^3 - 6\,y$$

```
> solve(diff(u2(y),y)=0,y);
```

$$\sqrt{2}, -\sqrt{2}$$

Bod $y=-\sqrt{2}$ nepatří do intervalu $\langle -1, 2 \rangle$, takže ho z dalších úvah vyloučíme. Určíme funkční hodnotu v bodě $y = \sqrt{2}$ a v krajních bodech intervalu $\langle -1, 2 \rangle$.

```
> u2(-1);u2(2);u2(sqrt(2));
```

$$13$$

$$4$$

$$8 - 4\sqrt{2}$$

Dále budeme hledat podezřelé body na hranici množiny M. Pro $y=2$ je $x \in \langle 0, 2\rangle$. Funkci $f(x,y)$ nahradíme funkcí $u_3(x)$.

```
> u3:=unapply(subs(y=2,f(x,y)),x);
```

$$u3 := x \to 8 + x^3 - 6\,x$$

```
> solve(diff(u3(x),x)=0,x);
```

$$\sqrt{2}, -\sqrt{2}$$

Bod $x=-\sqrt{2}$ nepatří do intervalu $\langle 0, 2\rangle$, takže ho z dalších úvah vyloučíme. Určíme funkční hodnotu v bodě $x=\sqrt{2}$ a v krajních bodech intervalu $\langle 0, 2\rangle$.

```
> u3(0);u3(2);u3(sqrt(2));
```

$$8$$

$$4$$

$$8 - 4\sqrt{2}$$

Nakonec budeme hledat body na hranici množiny M. Pro $x=0$ je $y \in \langle -1, 2\rangle$. Funkci $f(x,y)$ nahradíme funkcí $u_4(y)$.

```
> u4:=unapply(subs(x=0,f(x,y)),y);
```

$$u4 := y \to y^3$$

```
> solve(diff(u4(y),y)=0,y);
```

$$0, 0$$

Určíme funkční hodnotu v nalezených bodech a v krajních bodech intervalu $\langle -1, 2\rangle$.

```
> u4(0);u4(-1);u2(2);
```

$$0$$

$$-1$$

$$4$$

Porovnáme vypočtené funkční hodnoty. V bodě s největší funkční hodnotou pk nastává globální maximum, v bodě s nejmenší funkční hodnotou pak globální minimum.
Globální maximum $f_{\max} = 13$ nastává v bodě [2,-1], globální minimum $f_{\min} = -1$, nastává v bodech [0,-1] a [1,1].

Příklad 2. Najděte globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - y^2 + 16$ na množině $M = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \le 25\right\}$.

```
> restart;
> with(plots):
> f:=(x,y)->x^2-y^2+16;
```

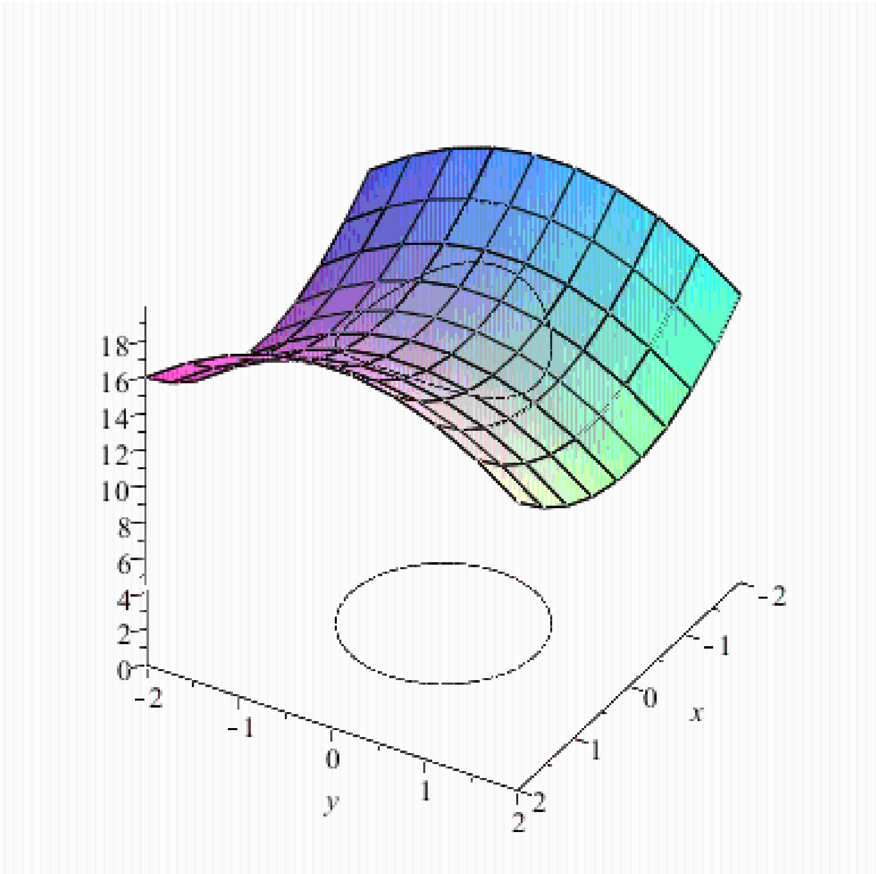
$$f := (x,y) \to x^2 - y^2 + 16$$

```
> M:=x^2+y^2=25;
```

$$M := x^2 + y^2 = 25$$

```
>
p1:=plot3d(f(x,y),x=-2..2,y=-2..2,axes=framed,grid=[10,10],orient
ation=[31,56]):
>
p2:=spacecurve([cos(t),sin(t),f(cos(t),sin(t))],t=0..2*Pi,color=b
lack,orientation=[31,56]):
>
```

```
p3:=spacecurve([cos(t),sin(t),0],t=0..2*Pi,color=black,orientation=[31,56]):
> display({p1,p2,p3});
```



Stanovme stacionární body funkce $f(x, y)$.

```
> fx:=diff(f(x,y),x);
```

$$fx := 2\,x$$

```
> fy:=diff(f(x,y),y);
```

$$fy := -2\,y$$

```
> solve({fx,fy});
```

$$\{x = 0, y = 0\}$$

```
> f(0,0);
```

$$16$$

Dále nalezneme body podezřelé z extrému na hranici množiny *M*.Tou je kružnice, kterou rozdělíme na horní a dolní půlkružnici.

```
> with(Student):
> y1:=isolate(M,y);
```

$$y1 := y = RootOf(\_Z^2 - 25 + x^2)$$

```
> y1:=allvalues(y1);
```

$$y1 := y = \sqrt{25 - x^2}, y = -\sqrt{25 - x^2}$$

Nyní obě řešení postupně dosadíme do funkce $f(x, y)$ a získáme tak funkce jedné proměnné

$u_1(x), u_2(x)$.

```
> u1:=unapply(subs(y=sqrt(25-x^2),f(x,y)),x);
```

$$u1 := x \to 2x^2 - 9$$

```
> solve(diff(u1(x),x)=0,x);
```

$$0$$

```
> u1(0);
```

$$-9$$

```
> u1(5);u1(-5);
```

$$41$$

$$41$$

```
> u2:=unapply(subs(y=-sqrt(25-x^2),f(x,y)),x);
```

$$u2 := x \to 2x^2 - 9$$

Vzhledem k tomu, že funkce $u_2(x) = u_1(x)$, nebudeme provádět další výpočty, protože body budou stejné.

Porovnáním všech funkčních hodnot vidíme, že globální maximum $f_{\max} = 41$ nastává v bodech [5,0], [-5,0], globální minimum $f_{\min} = -9$ nastává v bodech [0,5], [0,-5].

POZNÁMKA: K nalezení extrémů na hranici lze použít příkaz **extrema(expr, constraints, vars, 's')**, který obsahuje funkci více proměnných, funkce ohraničující množinu *M*, seznam nezávisle proměnných a proměnnou s. Tento příkaz najde největší a nejmenší funkční hodnotu na hranici množiny *M*. Do proměnné s pak ukládá souřadnice bodů, ve kterých extrém nastane. Body zadává v libovolném pořadí, takže nepoznáme, kde je maximum, a kde minimum. Proto se tento příkaz hodí spíše ke kontrole nalezených extrémů.

```
> extrema(x^2-y^2+16,x^2+y^2=25,{x,y},'s');
```

$$\{-9, 41\}$$

```
> s;
```

$$\{\{x = -5, y = 0\}, \{x = 0, y = -5\}, \{x = 0, y = 5\}, \{x = 5, y = 0\}\}$$

```
> extrema(x^2-y^2+16,y=sqrt(25-x^2),{x,y},'s');
```

$$\{-9\}$$

```
> s;
```

$$\{\{x = 0, y = 5\}\}$$

```
> extrema(x^2-y^2+16,y=-sqrt(25-x^2),{x,y},'s');
```

$$\{-9\}$$

```
> s;
```

$$\{\{x = 0, y = -5\}\}$$

```
>
```