Pomůcka pro cvičení: 2. semestr Bc studia
Soustavy diferenciálních rovnic

Řešení soustav DR 1. řádu v případech, kdy příkaz **dsolve** dává symbolické řešení.

Soustavy diferenciálních rovnic

balíček: DEtools

Příklad 1. Nalezněte řešení systému

$y_1' = y_1 + y_2$,

$y_2' = 4y_1 + y_2$.

Systém není potřeba zapisovat po jednotlivých rovnicích, ale můžeme je zapsat do jednoho přiřazení a oddělit je čárkami.

```
> sys_DR:=diff(y_1(x),x)=y_1(x)+y_2(x),
diff(y_2(x),x)=4*y_1(x)+y_2(x);
```

$$sys\_DR := \frac{d}{dx} y\_1(x) = y\_1(x) + y\_2(x), \frac{d}{dx} y\_2(x) = 4\,y\_1(x) + y\_2(x)$$

Řešení systému lze napsat následovně:

```
> dsolve([sys_DR]);
```

$$\{y\_1(x) = \_C1\,e^{3x} + \_C2\,e^{-x}, y\_2(x) = 2\,\_C1\,e^{3x} - 2\,\_C2\,e^{-x}\}$$

Příklad 2. Nalezněte řešení systému

$y_1' = 3y_1 + 6y_2$,

$y_2' = -y_1 - 2y_2$,

s počáteční podmínkou $y_1(0) = 2, y_2(0) = 1$.

```
> sys_DR:=diff(y_1(x),x)=3*y_1(x)+6*y_2(x),
diff(y_2(x),x)=-y_1(x)-2*y_2(x);
```

$$sys\_DR := \frac{d}{dx} y\_1(x) = 3\,y\_1(x) + 6\,y\_2(x), \frac{d}{dx} y\_2(x) = -y\_1(x) - 2\,y\_2(x)$$

Počáteční podmínky zapíšeme společně do proměnné PP.

```
> PP:=y_1(0)=2, y_2(0)=1;
```

$$PP := y\_1(0) = 2, y\_2(0) = 1$$

V zápise řešení je potřeba hledané funkce y_1, y_2 zapsat jako seznam, tj. do hranatých závorek.

```
> dsolve({sys_DR,PP},[y_1(x), y_2(x)]);
```

$$\{y\_1(x) = 12\,e^{x} - 10, y\_2(x) = 5 - 4\,e^{x}\}$$

Příklad 3. Nalezněte obecné řešení systému diferenciálních rovnic prvního řádu s nezávisle proměnnou t a závisle proměnnými $x(t)$ a $y(t)$, je-li dáno:

$x' = 4x - 2y$

$y' = x + y$.

Dále nalezněte partikulární řešení systému s počátečními podmínkami $x(0) = 0, y(0) = \sqrt{3}$.

Získané řešení nakreslete.

```
> restart;
> with(DEtools):
> sys:=diff(x(t),t)=4*x(t)-2*y(t),diff(y(t),t)=x(t)+y(t);
```

$$sys := \frac{d}{dt}x(t) = 4x(t) - 2y(t), \frac{d}{dt}y(t) = x(t) + y(t)$$

```
> dsolve([sys],[x(t),y(t)]);
```

$$\{x(t) = \_C1\, e^{2t} + 2\,\_C2\, e^{3t}, y(t) = \_C1\, e^{2t} + \_C2\, e^{3t}\}$$

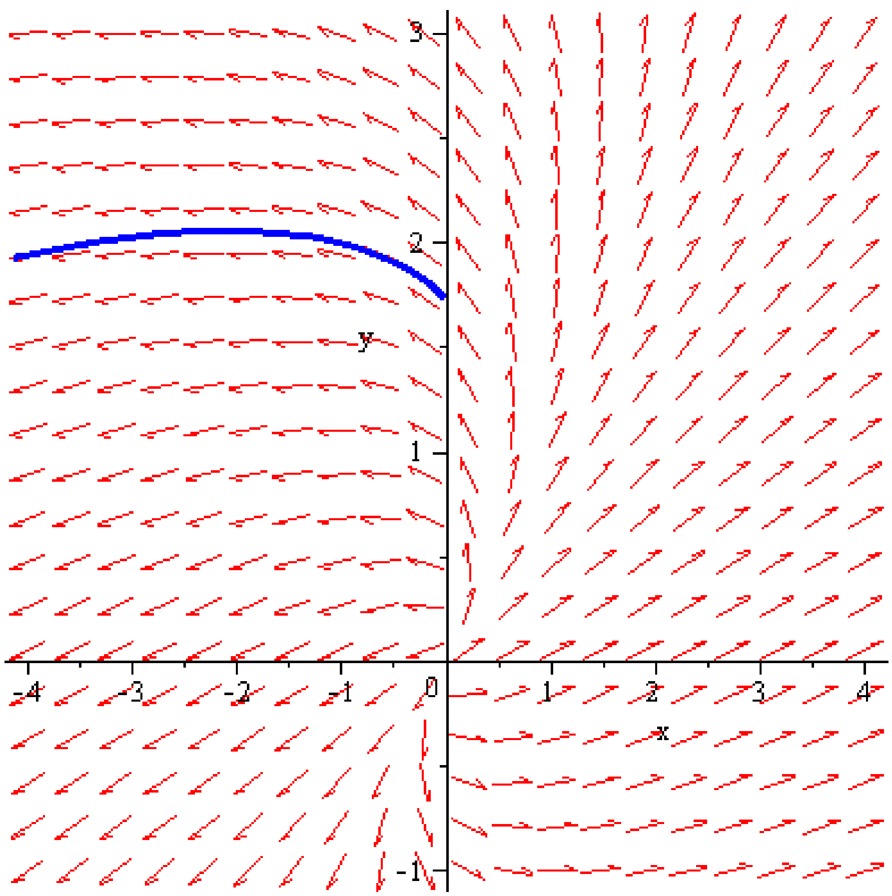
```
> PP:=x(0)=0,y(0)=sqrt(3);
```

$$PP := x(0) = 0, y(0) = \sqrt{3}$$

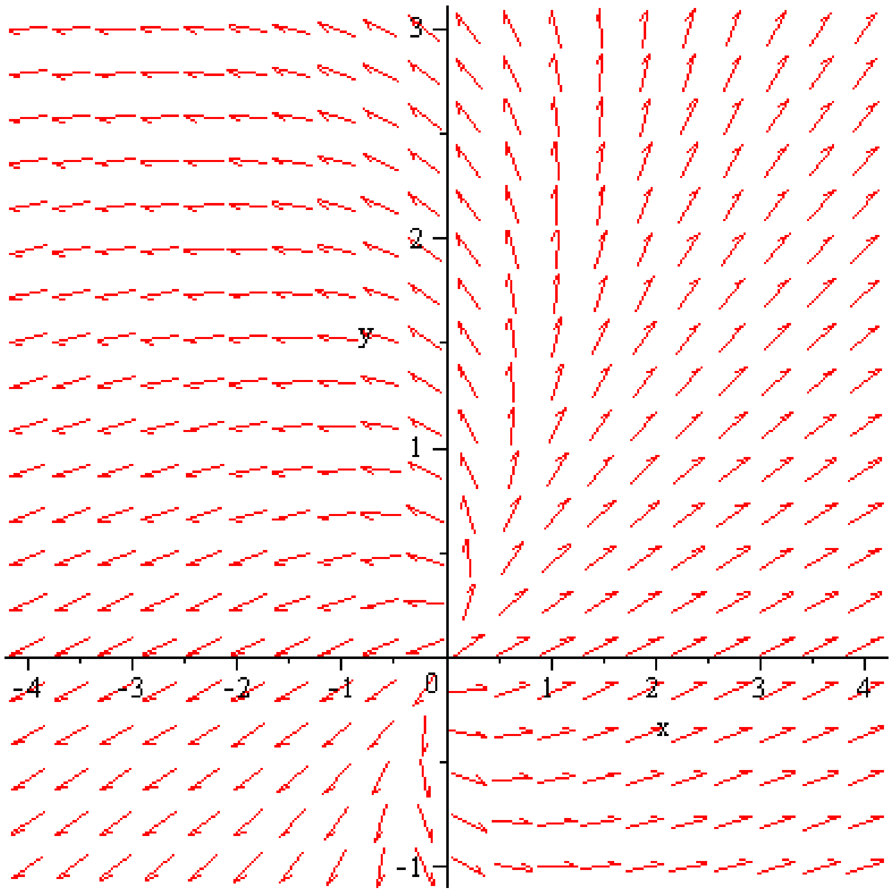
```
> dsolve([sys,PP],[x(t),y(t)]);
```

$$\{x(t) = 2\sqrt{3}\, e^{2t} - 2\sqrt{3}\, e^{3t}, y(t) = 2\sqrt{3}\, e^{2t} - \sqrt{3}\, e^{3t}\}$$

```
>
DEplot([sys],[x(t),y(t)],t=0..2,[[PP]],x=-4..4,y=-1..3,linecolor=
blue);
```

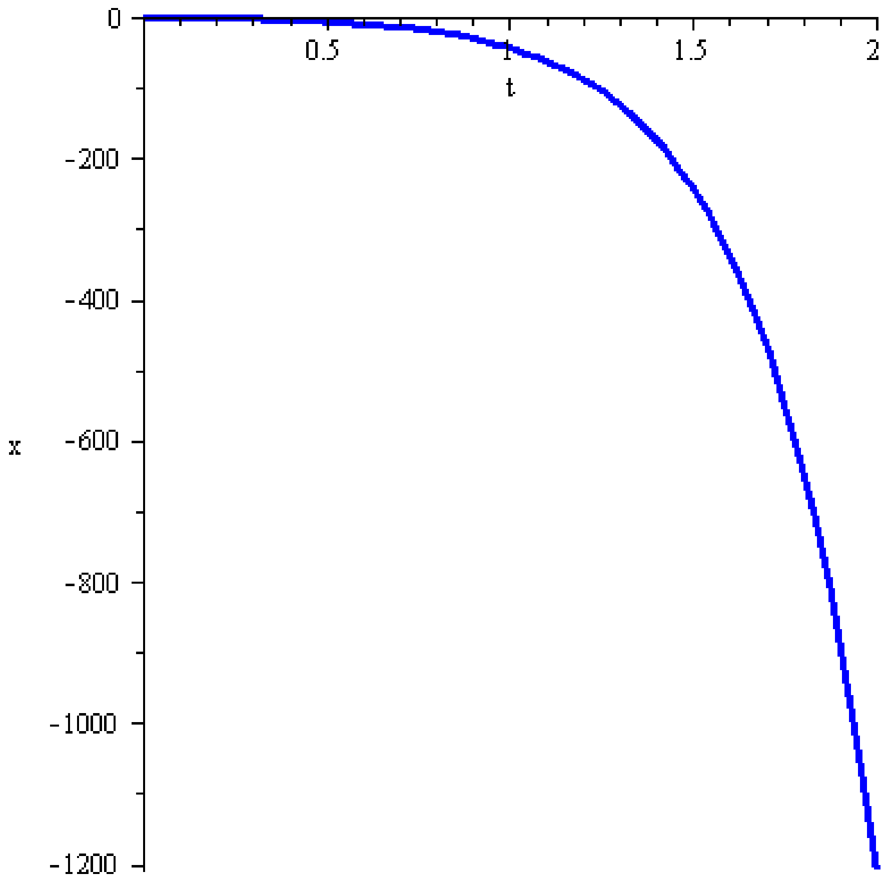



```
>
DEplot([sys],[x(t),y(t)],t=0..2,[[PP]],x=-4..4,y=-1..3,linecolor=
blue,animatecurves=true);
```

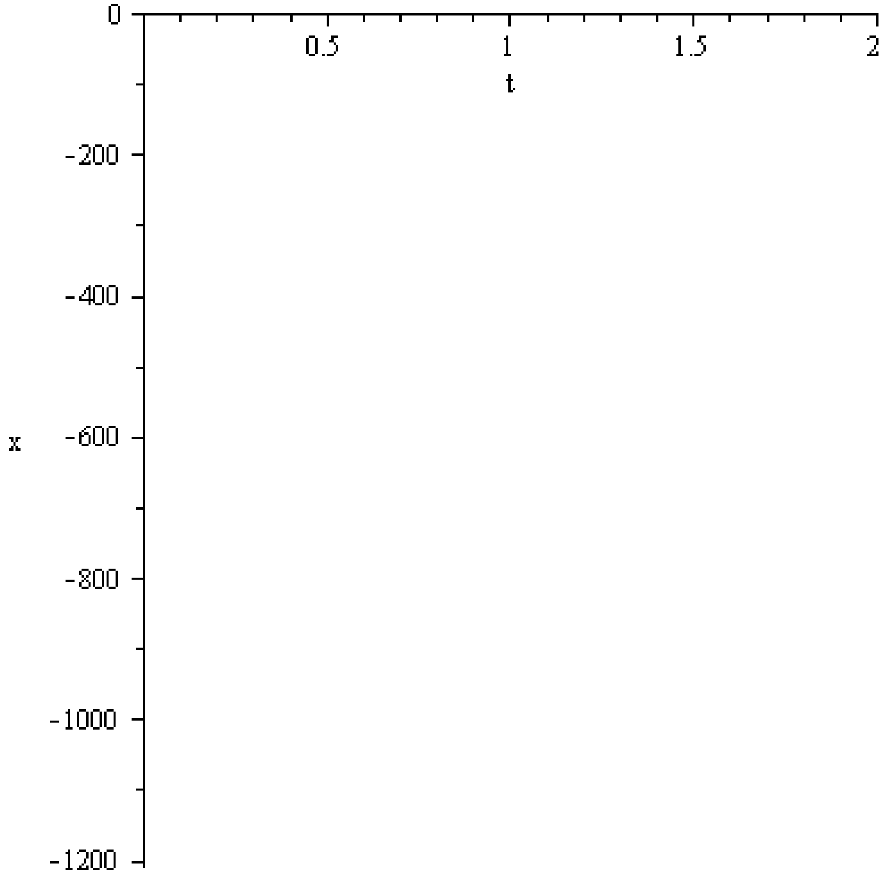


Pokud chceme zobratit řešení $x(t)$, je potřeba v DEplot použít parametr **scene=[name, name].** Např. scene=[x, y]znamená, že se nakreslí graf y v závisloti na x, kdežto scene=[t, y]znamená, že se nakreslí graf y v závisloti na t.

```
> 
DEplot([sys],[x(t),y(t)],t=0..2,[[PP]],scene=[t,x],linecolor=blue
);
```

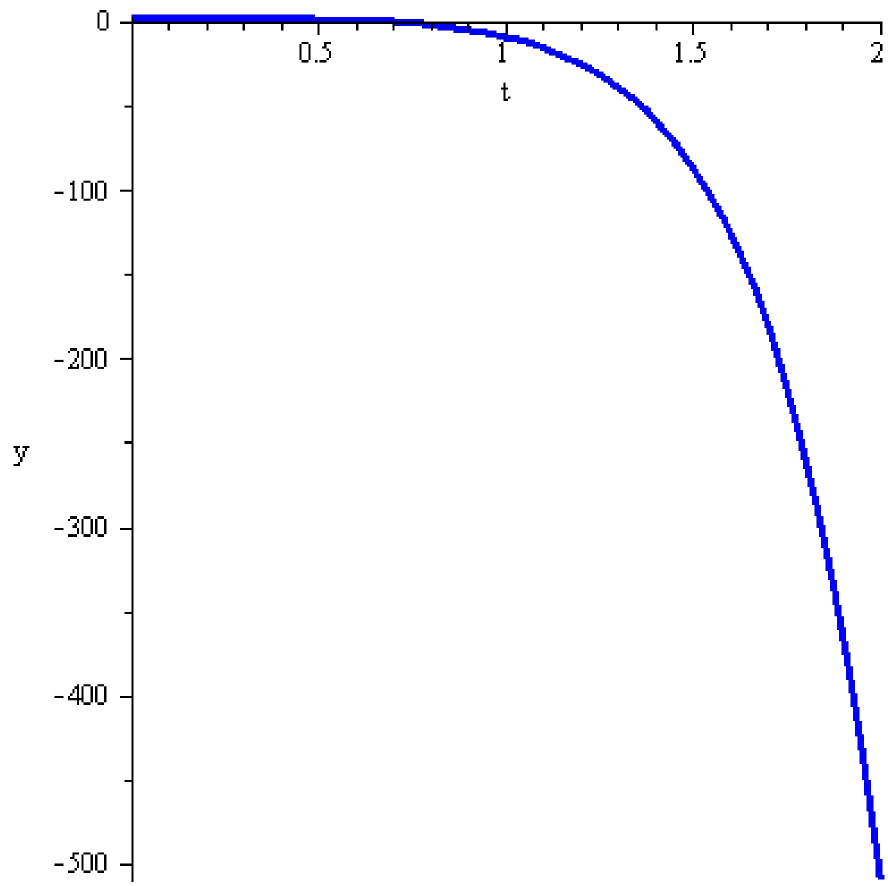



```
>
DEplot([sys],[x(t),y(t)],t=0..2,[[PP]],scene=[t,x],animatecurves=
true);
```



Parametr stepsize udává, na kolik dílů se rozdělí při výpočtu metodou classicalinterval pro t. Implicitní hodnota je 48.

```
> 
DEplot([sys],[x(t),y(t)],t=0..2,[[PP]],scene=[t,y],stepsize=0.05,
linecolor=blue);
```



Příklad 4. Najděte numerické řešení systému

$x'(t) = \frac{x(t)}{t+1} + y(t)\cos(t),$

$y'(t) = -x(t)\cos(t) + \frac{y(t)}{t+1},$

které vyhovuje počátečním podmínkám $x(0) = 1, y(0) = 0.$

```
> restart;
> with(DEtools):
> 
sys:=diff(x(t),t)=x(t)/(t+1)+y(t)*cos(t),diff(y(t),t)=-x(t)*cos(t
)+y(t)/(t+1);
```

$$sys := \frac{d}{dt}\,x(t) = \frac{x(t)}{t+1} + y(t)\cos(t),\ \frac{d}{dt}\,y(t) = -x(t)\cos(t) + \frac{y(t)}{t+1}$$

```
> dsolve([sys],[x(t),y(t)]);
```

$$\{x(t) = (t+1)\,(-\_C1\cos(\sin(t)) + \_C2\sin(\sin(t))),\ y(t) = (t+1)\,(\_C1\sin(\sin(t)) + \_C2\cos(\sin(t)))\}$$

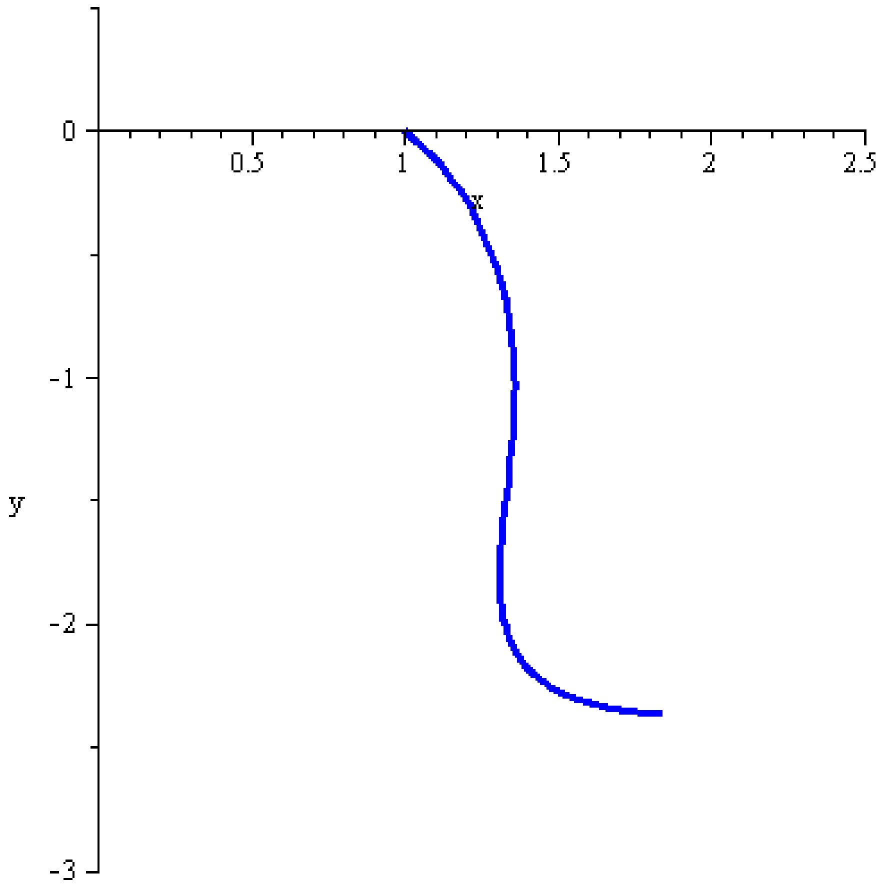
```
> PP:=x(0)=1,y(0)=0;
```

$$PP := x(0) = 1, y(0) = 0$$

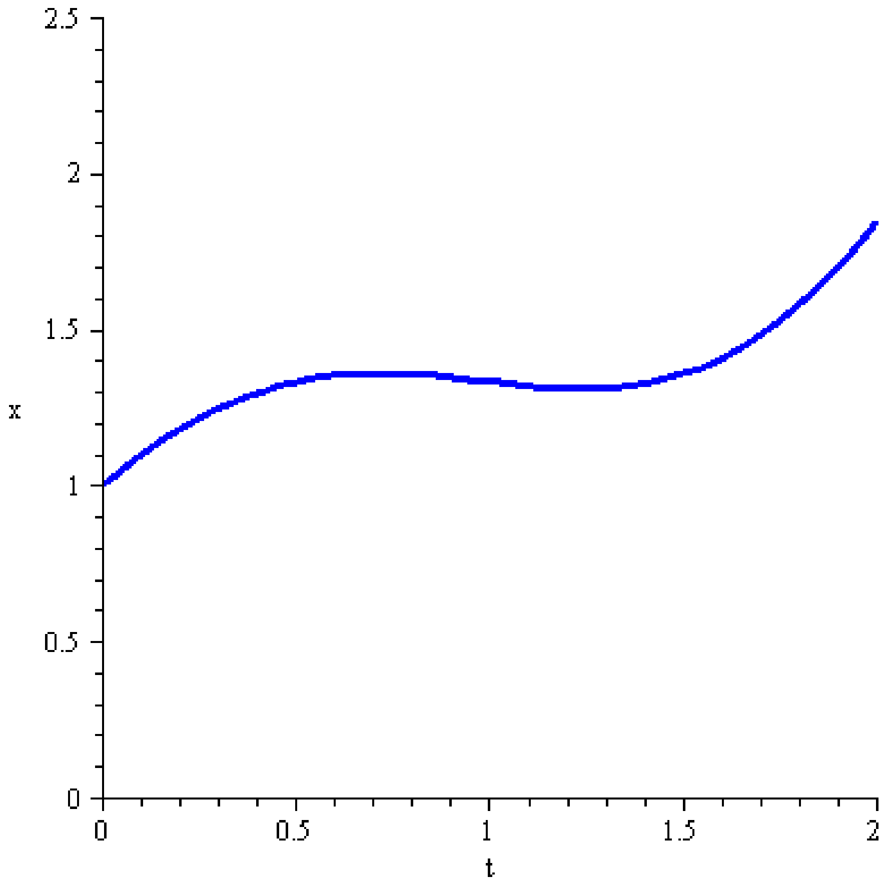
```
> dsolve([sys,PP],[x(t),y(t)]);
```

$$\{x(t) = (t+1)\cos(\sin(t)), y(t) = -(t+1)\sin(\sin(t))\}$$

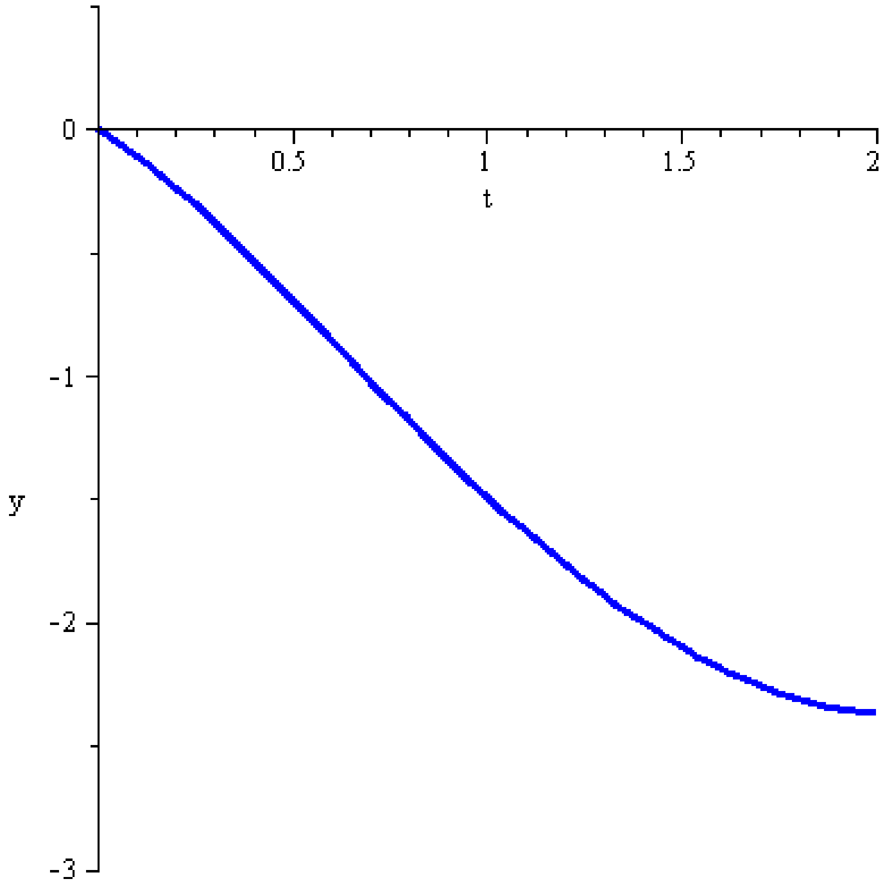
```
>
DEplot([sys],[x(t),y(t)],t=0..2,[[PP]],x=0..2.5,y=-3..0.5,linecol
or=blue);
```




```
>
DEplot([sys],[x(t),y(t)],t=0..2,[[PP]],x=0..2.5,y=-3..0.5,scene=[
t,x],linecolor=blue);
```




```
>
DEplot([sys],[x(t),y(t)],t=0..2,[[PP]],x=0..2.5,y=-3..0.5,scene=[
t,y],linecolor=blue);
```


0
0.5
1
1.5
2
t
-1
y
-2
-3

>