Spolehlivost soustav

1 Spolehlivost soustav

1.1 Koherentní systémy a strukturní funkce

Budeme se zabývat modelováním spolehlivosti zřízení s ohledem na spolehlivost jeho komponent. Jedním z hlavních cílů spolehlivostní analýzy je zvýšení spolehlivosti zařízení. To lze provést:

a) Vhodným návrhem a konstrukcí systému

(b) Zvyšování spolehlivosti jeho komponent

c): Promyšleným zálohováním nejdůležitějších prvků nebo podsystémů

Budeme uvažovat systém, který sestává z n komponent, které označíme $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Tedy $i-$tou komponentu značíme C_i a předpokládáme, že tato komponenta se může nacházet v jednom ze dvou operačních stavů: „komponenta je funkční“ nebo „komponenta není funkční“. Stav komponent popisujeme pomocí indikátorové funkce. Indikátorovou funkci (stručně indikátor), kterou přiřadíme komponentě C_i označíme X_i pro $i = 1, 2, \ldots, n$ a zavedeme ji předpisem:

$X_i = 1$, když C_i je funkční

$X_i = 0$, když C_i je funkční

Strukturní funkce systému

Strukturní funkcí ϕ celého systému o n komponentách s indikátory $X_1, X_2, \ldots, X_n$ definujeme vztahem

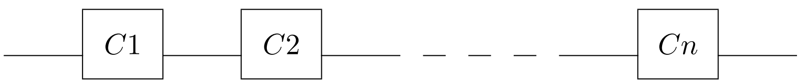
$\phi(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 1$ když systém je funkční

$\phi(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0$ když systém není funkční

Dále číslo n udávající počet komponent systému nazýváme řádem systému.

1.2 Příklady systémů a jejich strukturních funkcí

Příklad sériového systému je na obrázku:



Obr. 1: Sériový systém

Komponenty systému jsou řazeny do série. Pro úspěšnou funkčnost systému je třeba, aby byly funkční všechny komponenty. Když jedna z komponent nebude funkční, bude to mít za následek, že celý systém nebude funkční. Strukturní funkce sériového systému je rovna

$$\phi(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

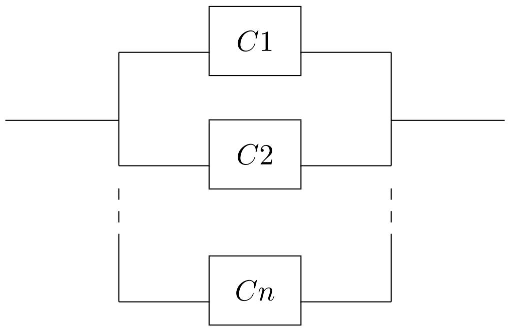
Operační program Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Název projektu: Inovace magisterského studijního programu Fakulty ekonomiky a managementu
Registrační číslo projektu: CZ.1.07/2.2.00/28.0326

PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY.

Lze ji také zapsat ve tvaru

$$\phi(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} X_i.$$

Příklad paralelního systému je na obrázku:



Obr. 2: Paralelní systém

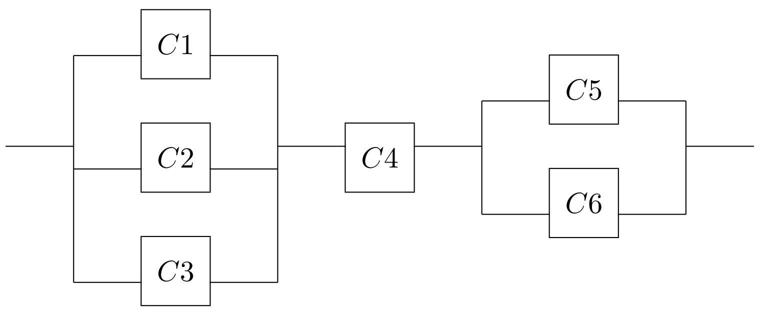
Komponenty systému jsou řazeny paralelně vedle sebe. Pro úspěšnou funkčnost systému je třeba, aby byla funkční aspoň jedna z n komponent. Celý systém bude funkční, když bude funkční aspoň jedna komponenta. Strukturní funkce sériového systému je rovna

$$\phi(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

Lze ji také zapsat ve tvaru

$$\phi(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - X_i).$$

Na obrázku 3 je graficky znázorněna jednoduchá počítačová síť sestávající z $n = 6$ prvků :



Obr. 3: Jednoduchá počítačová síť – příklad

Komponenty C_1, C_2, C_3 mohou představovat terminály, C_4 počítač - centrální jednotku a komponenty C_5 a C_6 lokální a centrální tiskárny. V této síti jsou komponenty C_1, C_2, C_3 řazeny paralelně a také komponenty C_5, C_6 jsou řazeny paralelně a bloky C_1, C_2, C_3, C_4 a C_5, C_6 jsou řazeny sériově. Proto strukturní funkce systému bude součinem strukturních funkcí jednotlivých bloků v sérii. Lze ji vyjádřit ve tvaru

$$\phi(X_1, X_2, \ldots, X_n) = [1 - (1 - X_1)(1 - X_2)(1 - X_3)][X_4][1 - (1 - X_5)(1 - X_6)]$$

nebo ekvivalentně ve tvaru

$$\phi(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \min\{\max\{X_1, X_2 X_3\}, X_4, \max\{X_5, X_6\}\}$$

Komponentu C_i systému řádu n nazveme irelevantní komponentou, když pro všechny stavy ostatních komponent systému (tedy když pro všechny hodnoty indikátorů $X_j, j \neq i$) platí

$$\phi(X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \ldots, X_n) = \phi(X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \ldots, X_n)$$

Komponentu nazýváme relevantní, když není irelevantní. Tedy komponenta, jejíž funkčnost není důležitá pro funkčnost systému, je irelevantní.

Budeme se zajímat o systém, ve kterém nahrazení libovolné nefunkční komponenty funkční komponentou nezhorší fungování systému. V takovém systému platí

$$\phi(X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \ldots, X_n) \leq \phi(X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \ldots, X_n).$$

Tedy strukturní funkce je neklesající funkcí v argumentu X_i. Když je strukturní funkce systému neklesající v každém argumentu X_i při pevně daných libovolných hodnotách ostatních argumentů pro $i = 1, 2, \ldots, n$, nazýváme strukturní funkci neklesající funkcí.

Stav celého systému můžeme popsat pomocí stavu jednotlivých komponent, tedy ve vektorovém označení pomocí vektoru indikátor; všech komponent $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Dále použijeme pro dva stavy celého systému $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ a $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ označení $\mathbf{X} \leq \mathbf{Y}$ když $X_i \leq Y_i$, přičemž aspoň pro jedno $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí ostrá nerovnost. Potom pro neklesající strukturní funkci ϕ platí

$$\mathbf{X} \leq \mathbf{X} \Rightarrow \phi(\mathbf{X}) \leq \phi(\mathbf{Y})$$

Definice. Systém nazýváme koherentním, když jeho strukturní funkce je neklesající a každá jeho komponenta je relevantní.

Věta. Pro strukturní funkci ϕ koherentního systému o n komponentách ve stavu $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ platí

$$\prod_{i=1}^{n} X_i \leq \phi(\mathbf{X}) \leq 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - X_i).$$

Uvedenou větu lze snadno zapsat pomocí strukturní funkce $\phi_{serie}(\mathbf{X})$ sériového systému a pomocí strukturní funkce $\phi_{paralell}(\mathbf{X})$ paralelního systému

$$\phi_{serie}(\mathbf{X}) \leq \phi(\mathbf{X}) \leq \phi_{paralell}(\mathbf{X})$$

Pravděpodobnost, že daná komponenta uvažovaného systému je funkční (nebo jednodušeji spolehlivost této komponenty) lze jednoduše zavést pomocí indikátoru X_i, který reprezentuje stav této komponenty. Indikátor X_i považujeme za náhodnou veličinu, která má alternativní rozdělení $A(\theta_i)$. Tedy X_i je rovna 1 s pravděpodobností θ_i a rovna 0 s pravděpodobností $1 - \theta_i$. Pak definujeme spolehlivost komponenty C_i jako střední hodnotu $E(X_i) = \theta_i$, předpokládáme, že platí $0 \leq \theta_i \leq 1$. Jinými slovy, je spolehlivost komponenty C_i rovna pravděpodobnosti, že tato komponenta je funkční.

Dále, když vyjdeme z vektoru indikátorů všech komponent $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ a označíme $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ vektor spolehlivostí jednotlivých komponent, můžeme zavést spolehlivost systému pomocí spolehlivostí jednotlivých komponent $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ jako funkci $h(\boldsymbol{\theta}) = E([\phi(\mathbf{X})])$.

Budeme říkat, že komponenty pracují nezávisle, když jejich indikátory $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny. Tato definice znamená, že skutečnost, že komponenta C_j je či není funkční neovlivní funkčnost kterékoliv jiné komponenty C_i.

Věta. Spolehlivost h systému s nezávislými komponentami a s hodnotami indikátorů $X_1 = x_1, X_2 = = x_2, \ldots, X_n = x_n$ a se strukturní funkcí ϕ je rovna

$$h(\boldsymbol{\theta}) = \Sigma_{\mathbf{x}} \Pi_{i=1^n} [\theta_i^{x_i}(1-\theta_i)^{1-x_i}],$$

kde se sčítá přes všechny možné hodnoty $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektoru indikátorů $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Uvažujme sériový systém s n nezávislými komponentami a vektorem spolehlivosti komponent $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$. Pak jeho spolehlivost je

$$h(\boldsymbol{\theta}) = h(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) = \Pi_{i=1}^n \theta_i.$$

Uvažujme paralelní systém s n nezávislými komponentami a vektorem spolehlivosti komponent $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$. Pak jeho spolehlivost je

$$h(\boldsymbol{\theta}) = h(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) = 1 - \Pi_{i=1}^n (1-\theta_i).$$

Příklad. Užitím předchozích výsledků lze snadno nahlédnout, že spolehlivost systému z obrázku 3 lze za předpokladu nezávislosti komponent zapsat ve tvaru

$$h(\boldsymbol{\theta}) = [1-(1-\theta_1)(1-\theta_2)(1-\theta_3)][\theta_4][1-(1-\theta_5)(1-\theta_6)].$$

Uvažujme systém n komponent a předpokládejme, že životnost (doba do poruchy) komponenty C_i je náhodná veličina Y_i, přičemž náhodné veličiny $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ jsou nezávislé. Pak spolehlivost komponenty C_i v libovolném čase y můžeme definovat jako $S_i(y) = P(Y_i > y)$ pro $i = 1, 2 \ldots, n$. Tedy identifikátor X_i komponenty C_i závisí na čase a platí, že $X_i = 1$ právě když $Y_i > y$, jinak je $X_i = 0$. Spolehlivost $S(y)$ systému s n komponentami v čase y pak definujeme jako pravděpodobnost, že tento systém je v čase y funkční. Pro sériový systém s n nezávislými komponentami platí

$$S(y) = S_1(y) S_2(y) \ldots S_n(y)$$

a pro systém s n paralelně spojenými komponentami platí

$$S(y) = 1 - [1 - S_1(y)][1 - S_2(y)] \ldots [1 - S_n(y)].$$

Příklad. Předpokládejme, že v systému s nezávislými komponentami mají doby do poruchy Y_i exponenciální rozdělení, tedy spolehlivost komponenty C_i v čase y je pro $i = 1, 2 \ldots, n$ dána vztahem

$$S_i(y) = P(Y_i > y) = e^{-\frac{y}{\lambda}} \text{ pro } y > 0,$$

kde parametr $\lambda > 0$. Pak spolehlivost sériového systému v čase y je rovna

$$S(y) = P(\min\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\} \geq y) = S_1(y) S_2(y) \ldots S_n(y) = e^{-n\frac{y}{\lambda}}.$$

a pro spolehlivost paralelního systému v čase y dostaneme

$$S(y) = P(\max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\} \geq y) =$$

$$= 1 - P(\max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\} \leq y) = 1 - (1 - e^{-\frac{y}{\lambda}})^n.$$

Příklady k procvičení

1. Ukažte, že indikátory $X_1, X_2, \ldots, X_n$ pro systém o n komponentách splňují vztahy:

$$\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

$$\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - X_i)$$

2. Uvažujme identické komponenty C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 které pracují nezávisle. Dále konstruujeme systémy K_1 jako systém, kdy C_1 a C_2 pracují v sérii; K_2 jako systém, kdy C_3 a C_4 pracují paralelně; K_3 systém sestávající z C_5; K systém sestávající z K_1, K_2 a K_3, které pracují v sérii. Nakreslete diagram systému K, určete strukturní funkci systému K a dále stanovte spolehlivost systémů K_1, K_2, K_3 a K, když θ_i je pravděpodobnost, že komponenta C_i je funkční.

3. Předpokládejme, že dvě elektronické komponenty mají životnosti Y_1 a Y_2, přičemž Y_1 a Y_2, jsou nezávislé náhodné veličiny a Y_i má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda_i, i = 1, 2$. Stanovte pravděpodobnost $P(Y_1 > Y_2)$.

4. Elektronická jednotka sestává ze dvou komponent C_1 a C_2 pracujících paralelně. Předpokládejme, že Y_1 značí životnost C_1 a Y_2 značí životnost C_2 Předpokládejme, že Y_1 a Y_2 pracují nezávisle.

   a) Když Y_1 a Y_2 mají stejné exponenciální rozdělení s parametrem λ, stanovte hustotu životnosti elektronické jednotky.

   b) Když Y_1 má exponenciální rozdělení s parametrem λ_1, a Y_2 má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda_1 2$, stanovte hustotu životnosti elektronické jednotky.

   c) Když Y_1 a Y_2 mají stejné exponenciální rozdělení s parametrem λ, a dvě takové jednotky pracují sériově, stanovte hustotu životnosti výsledného systému těchto dvou elektronických jednotek.

   c) jak by bylo možné zobecnit předchozí výsledky na n komponent?