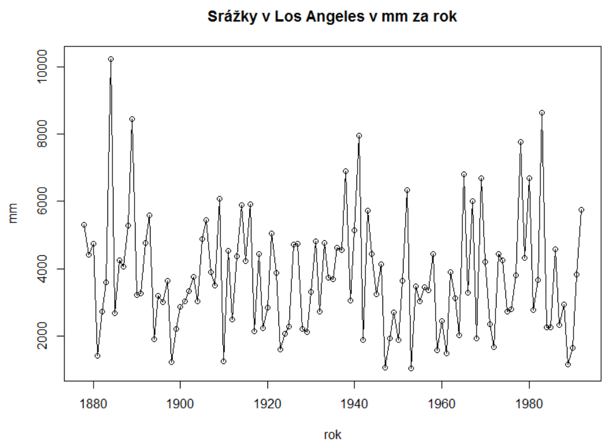
evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
UNIVERZITA OBRANY
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

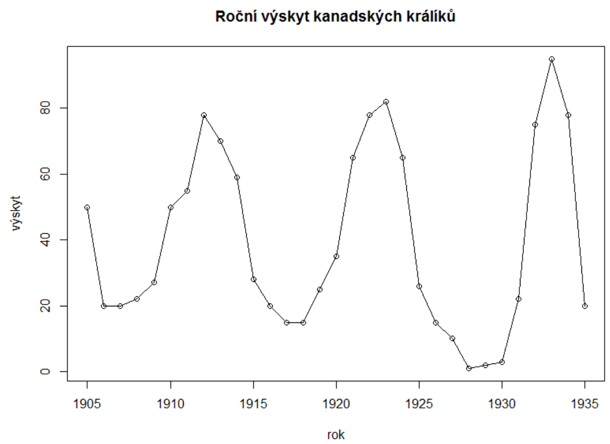
Dynamické metody pro predikci rizika

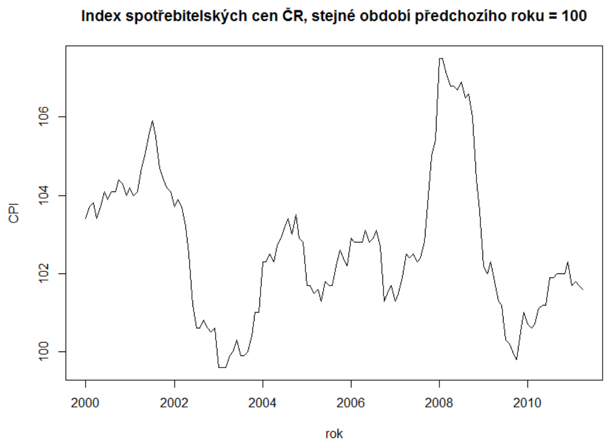
1 Úvod do analýzy časových řad

Časová řada – konečná posloupnost reálných hodnot určitého sledovaného ukazatele měřeného v určitých časových intervalech

- okamžikové – např. kurs dolaru k určitému datu, . . .
- intervalové – např. objem výroby za měsíc, . . .







Cíl analýzy časové řady: porozumět mechanismu, který určuje hodnoty sledované veličiny a předpovědět její vývoj. K pochopení vývoje sledované veličiny slouží **model časové řady**, matematicky vyjádřený vztah mezi vysvětlovanou proměnnou a vysvětlujícími proměnnými (většinou má model podobu jedné nebo více stochastických rovnic).

Prakticky se používají různé metody – volba použité metody závisí na účelu a cíli analýzy, typu časové řady, zkušenosti statistika, dostupném softwaru, teoretickém východisku apod.

- **expertní metody** – patří do kategorie kvalitativních metod, uplatní se tam, kde není rozumné nebo možné využívat kvantitativní metody, např. dotazování zákazníků, prodejců

Operační program Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Název projektu: Inovace magisterského studijního programu Fakulty ekonomiky a managementu
Registrační číslo projektu: CZ.1.07/2.2.00/28.0326

PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY.

- **grafická analýza** – představuje jen jednoduchou metodu analýzy časové řady, která se opírá o grafické zobrazení vývoje sledované veličiny, má subjektivní charakter (nejsnadněji lze odhadnout trend řady, užitečné bývá srovnání grafů různých časových řad mezi sebou)
- **dekompozice časových řad** – vychází z předpokladu, že hodnota sledované veličiny závisí pouze na čase – časovou řadu rozložíme na několik nezávislých složek: trend, sezónní, cyklickou a náhodnou složku

$$Y_t = T_t + S_t + C_t + \epsilon_t$$

- **ekonometrické modely** – kauzální modely, které vysvětlují hodnotu vysvětlované proměnné pomocí jedné nebo více vysvětlujících proměnné. Cílem je tedy odhalit příčinné vazby mezi ekonomickými veličinami; např. při modelování inflace je vysvětlovanou proměnou cenová hladina, vysvětlujícími proměnnými mohou být reálný HDP, množství peněz v oběhu, vývoz a dovoz zboží, příjmy obyvatel.
- **Box–Jenkinsonova metodologie** – je založena na důkladném modelování náhodné složky a snaží se identifikovat vzájemnou závislost jednotlivých prvků časové řady s různým zpožděním, případně jejich závislost na různém zpoždění
- **spektrální analýza** – vychází z předpokladu, že si časovou řadu můžeme představit jako směs sinusových a kosinusových křivek s různými frekvencemi a amplitudami, a snaží se vyšetřit intenzitu zastoupení jednotlivých frekvencí; lze tak posuzovat např. zpoždění ve vývoji mezi dvěma veličinami.

2 Lineární dynamické modely

Příkladem jednoduchého modelu je např.

$$C_t = \alpha + \beta C_{t-1} + \gamma X_t + \delta P_t + \epsilon_t,$$

kde výdaje obyvatelstva C_t na nákup spotřebního zboží v roce t jsou vysvětlovány pomocí minulé hodnoty C_{t-1} a navíc pomocí disponibilních peněžních příjmů X_t obyvatelstva a cenového indexu P_t spotřebního zboží (α, β, γ a δ jsou parametry, ϵ_t označuje bílý šum) Uvažujme jen **jednorovnicové lineární modely** vyjádřené jedinou rovnicí ve tvaru

$$Y_t = \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + \cdots + \beta_k Xtk + \epsilon_t, \text{ kde } t = 1, 2, \ldots, n.$$

Y_t představuje v rovnici hodnotu vysvětlované veličiny Y v čase t, $X_{t1}, \ldots, X_{tk}$ jsou hodnoty vysvětlujících veličin $X_1, \ldots, X_k$ v čase t, $\beta_1, \ldots, \beta_k$ představují neznámé parametry modelu (viz LRM). Obvykle první vysvětlující proměnná $X_1 = 1$ představuje konstantu, ϵ_t představuje chybovou (náhodnou) složku.

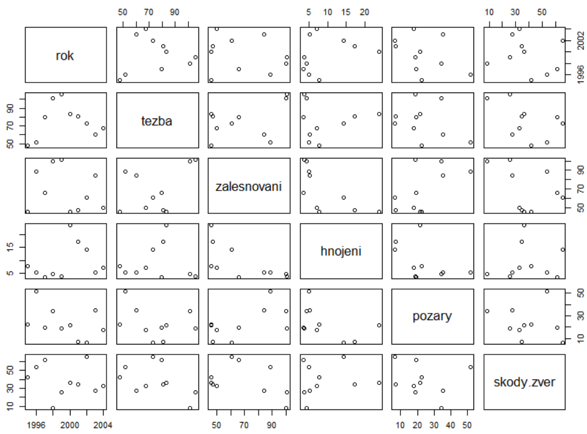
Příklad. Při těžbě dřeva v ČR se předpokládá vliv čtyřech faktorů: zalesňování, hnojení lesních porostů, lesní požáry a škody zvěří. Na základě roční časové řady z období 1995–2004 posuďte skutečný podíl těchto faktorů a sestrojte ekonometrický model, na základě kterého by bylo možné provést odhady těžby dřeva za různých podmínek.

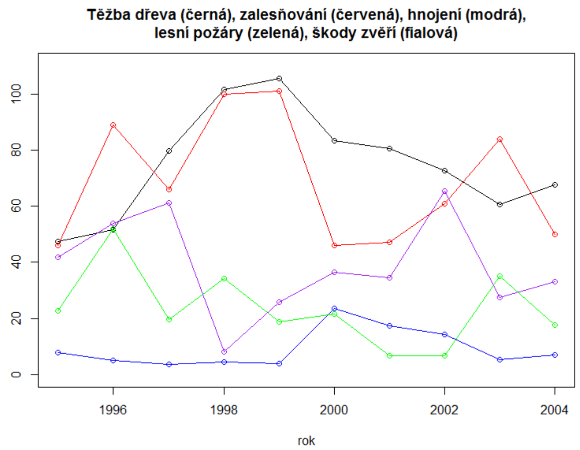
	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Těžba (tis. m^3)	47,52	51,64	79,65	101,42	105,35	83,45	80,54	72,79	60,45	67,62
Zalesňování (ha)	46	89	66	100	101	46	47	61	84	50
Hnojení porostů (tis. ha)	7,86	5,13	3,49	4,48	3,79	23,67	17,23	14,31	5,25	7,11
Lesní požáry (des. ha)	22,7	51,9	19,5	34,2	18,9	21,5	6,8	6,6	35,1	17,7
Škody zvěří (mil. Kč)	41,8	53,8	61,1	8,2	25,8	36,4	34,5	65,3	27,4	33,0

Dostáváme model

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{t2} + \beta_3 X_{t3} + \beta_4 X_{t4} + \beta_5 X_{t5} + \epsilon_t, \text{ kde } t = 1, 2, \ldots, 10,$$

Y je těžba dřeva, X_2 zalesňování, X_3 hnojení lesních porostů, X_4 lesní požáry a X_5 jsou škody zvěří.





Podobně jako u LRM lze celý model zapsat v maticovém tvaru

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon},$$

kde

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}.$$

Odhady metodou nejmenších čtverců za předpokladu, že matice $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ je regulární a tedy existuje inverzní matice $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$, jsou

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}.$$

Pozn. U LRM se předpokládá, že

(P1) Střední hodnota $E\epsilon_t = 0$, $t = 1, \ldots, n$, tj. náhodné chyby jsou **nesystematické**.

(P2) Rozptyl $D\epsilon_t = \sigma^2$, $t = 1, \ldots, n$, tj. náhodné chyby jsou **homogenní** se stejným neznámým rozptylem σ^2.

(P3) Kovariance $C(\epsilon_i, \epsilon_l) = 0$, $i \neq l$, $i, l = 1, \ldots, n$, tj. náhodné chyby jsou **nekorelované**.

Navíc se předpokládá, že hodnoty vysvětlujících proměnných nejsou náhodné, ale jsou pevně dané. Lze však ukázat, že v případě náhodnosti vysvětlujících proměnných (viz např. Hamilton[1]) je možné vlastnosti odhadů LRM zobecnit.

$$\widehat{Y}_t = 50{,}5821 + 0{,}7372 X_{2t} - 1{,}1242 X_{4t}$$

[1] Hamilton, J., D. *Time series analysis.* Princeton, 1994

	Odhad	Sm. chyba	t-test	p-hodnota
konst.	46,7804	29,4463	1,59	0,1730
zalesnovani	0,8147	0,2876	2,83	0,0365
hnojeni	1,0182	0,8280	1,23	0,2735
pozary	$-1{,}0373$	0,3749	$-2{,}77$	0,0395
skody.zver	$-0{,}3353$	0,2605	$-1{,}29$	0,2544

	Odhad	Sm. chyba	t-test	p-hodnota
konst.	50,5821	14,8608	3,40	0,0114
zalesnovani	0,7372	0,2523	2,92	0,0223
pozary	$-1{,}1242$	0,4149	$-2{,}71$	0,0302

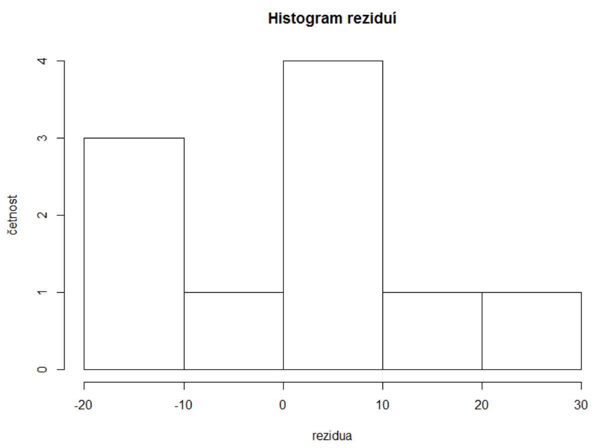
3 Ověřování modelu

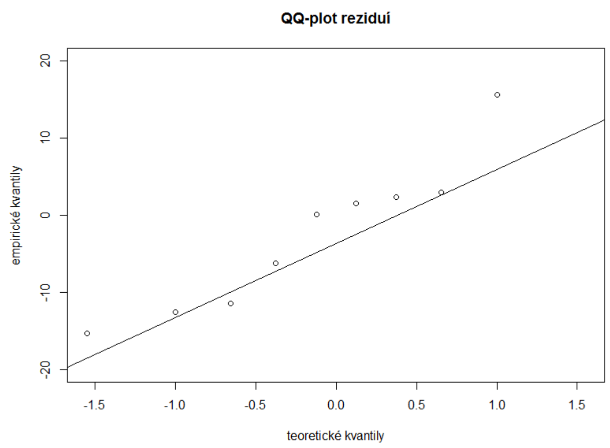
3.1 Normalita reziduí

Pro test normality reziduí lze použít grafických metod jako jsou

- histogram,
- QQ plot,

nebo použít některý z testů normality: test nulové šikmosti a špičatosti, Shapiro-Wilkův test, Lillieforsův test, Jarque-Bera test apod. (`shapiro.test`, `lillie.test`, `jarque.bera.test`)





3.2 Autokorelace reziduí

Rezidua $e_t = y_t - \widehat{y}_t$ by měla být podle předpokladů nekorelovaná. To lze ověřit např.

- Durbin-Watsonovým testem, který založený na statistice

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}.$$

Hodnoty Durbin-Watsonovy statistiky se pohybují v intervalu $\langle 0, 4 \rangle$, pokud je tato statistika rovna číslu 2, rezidua nevykazují žádnou autokorelaci, hodnoty menší než 2 značí kladnou – přímou autokorelaci a hodnoty větší než 2 značí zápornou – nepřímou autokorelaci (`dwtest`).

- pomocí autokorelační a parciální autokorelační funkce, portmanteau testu – viz později

3.3 Homoskedasticita

Homoskedasticita náhodné složky – náhodná složka modelu ϵ_t má v čase konstantní rozptyl. Pokud tomu tak není, mluvíme o **heteroskedasticitě**. Ta zpravidla také nemá vliv na odhad parametrů modelu, avšak odhady směrodatných odchylek parametrů β_j jsou už vychýlené.

Heteroskedasticitu lze ověřit vizuálně z grafu reziduí nebo testovat např. Goldfeld-Quandtovým testem (`gqtest`), Breusch-Paganovým testem (`bptest, ncvTest`) apod.

3.4 Multikolinearita

Pro použití metody nejmenších čtverců je důležitý předpoklad lineární nezávislosti matice $\mathbf{X}$. Jsou-li sloupce této matice lineárně závislé, potom je hodnost matice plánu $\mathbf{X}$ menší než počet odhadovaných parametrů modelu, determinant $\det(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = 0$ a matici $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ neexistuje matice inverzní. Hovoříme potom o **multikolinearitě** (přesné).

Problémem může být i silná korelace mezi jednotlivými vysvětlujícími proměnnými (přibližná multikolinearita). Čím je multikolinearita silnější, tím více se determinant $\det(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ se blíží k nule. Multikolinearita má za následek

- nadhodnocení součtu čtverců regresních koeficientů, což lze prakticky vnímat tak, že některé vysvětlující proměnné jsou důležitější, než ve skutečnosti jsou,
- zvýšení rozptylu odhadů parametrů modelu, což znamená pokles spolehlivost jejich odhadu, neboť rostou hodnoty směrodatných odchylek parametrů β_j – širší intervaly spolehlivosti resp. menší hodnoty testových kritérií pro individuální t-testy,
- zdánlivý rozpor mezi nevýznamnými výsledky t-testů a významným výsledkem celkového F-testu modelu,
- numerické problémy, které úzce souvisí s malou stabilitou odhadů některých regresních koeficientů,
- komplikace v rozumné interpretaci individuálního vlivu jednotlivých vysvětlujících proměnných na proměnnou vysvětlovanou.

Pro testování multikolinearity existuje celá řada různých kritérií. Jedno z jednoduchých kritérií vychází z párových korelačních koeficientů r_{ij}, které vyjadřují míru závislosti mezi dvěma vysvětlujícími proměnnými x_{ti} a x_{tj}, $i, j = 1, 2, \ldots, k$ a $i \neq j$. Hodnoty blízké ± 1 naznačují možnost existence multikolinearity. Vzhledem ke vzájemným vztahům jednoduchých korelačních koeficientů s **koeficientem mnohonásobné korelace** je vhodné používat pro identifikaci multikolinearity jejich kombinaci. Párové koeficienty korelace r_{ij} nemají překročit hodnotu 0,8 a žádný z nich nesmí být větší než koeficient mnohonásobné korelace.

Příklady k procvičení

1. Zjistěte, zda existuje korelace mezi výdaji domácností a výdaji vlády:

Rok	Výdaje domácností	Výdaje vlády
1997	724 801	1 466 681
1998	847 222	1 660 649
1999	932 778	1 785 131
2000	998 254	1 962 483
2001	1 046 326	2 041 353
2002	1 108 838	2 150 058
2003	1 179 384	2 315 255
2004	1 220 633	2 414 669
2005	1 283 147	2 550 754

   Zvolte vhodnou regresní funkci pro dané časové řady a odhadněte parametry. Ověřte vhodnost zvoleného regresního modelu. [Datový soubor: vydaje.txt]

2. Datový soubor kurzy2002.txt obsahuje směnné kurzy norské koruny (NOK), eura (EUR), britské libry (GBP) a amerického dolaru v roce 2002. Pomocí lineární regrese vyjádřete kurz norské koruny pomocí zbývajících kurzů měn. Ověřte vhodnost zvoleného regresního modelu. [Datový soubor: kurzy2002.txt]

3. Datový soubor phillips.txt o inflaci a nezaměstnanosti v USA od roku 1948 do roku 2003. Inflace je vyjádřena pomocí procentní změny indexu spotřebitelských cen, nezaměstnanost je uvedena v procentech. Pomocí lineárního regresního modelu popište závislost inflace na míře nezaměstnanosti. Ověřte vhodnost zvoleného regresního modelu. [Datový soubor: phillips.txt]

4. Datový soubor intdef.txt obsahuje následující proměnné: i3 – tříměsíční úroková sazba T-bill (obligace vydávaná vládou USA), inf – roční inflace (index spotřebitelských cen) a def – deficit státního rozpočtu vyjádřený jako procento hrubého domácího produktu. Sestavte lineární regresní model, ve kterém vysvětlovanou proměnnou je úroková sazba T-bill. Určete odhady parametrů modelu.
   [Datový soubor: intdef.txt]

5. Obecná míra plodnosti (gfr) je počet narozených dětí na každých 1000 žen v plodném věku. Rovnice

$$\mathrm{gfr}_t = \beta_1 + \beta_2 \mathrm{pe}_t + \beta_3 \mathrm{ww2} + \beta_4 \mathrm{pill}_t + u_t$$

   popisuje tuto plodnost jako lineární funkci daňového osvobození (pe) a dvou binárních proměnných. Proměnná ww2 nabývá hodnoty 1 mezi lety 1941 až 1945, tedy v době, kdy se USA zapojily do 2. světové války, proměnná pills má hodnotu 1 od roku 1963, kdy se staly přístupné antikoncepční pilulky. Odhadněte parametry tohoto regresního modelu. Vzhledem k tomu, že sledovaná plodnost může záviset také na zpožděných hodnotách proměnné pe, odhadněte parametry modelu

$$\mathrm{gfr}_t = \beta_1 + \beta_2 \mathrm{pe}_t + \beta_3 \mathrm{pe}_{t-1} + \beta_4 \mathrm{pe}_{t-2} + \beta_5 \mathrm{ww2} + \beta_6 \mathrm{pill}_t + u_t.$$

   [Datový soubor: plodnost.txt]