INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Časové řady, typy trendových funkcí a odhady trendů

1 Stochastický proces

Posloupnost náhodných veličin $\{Y_t, t = 0, \pm 1, \pm 2 \dots\}$ se nazývá **stochastický proces**. Pomocí něho budeme modelovat pozorované časové řady.

Střední hodnota stochastického procesu $\{Y_t\}$ je funkce μ_t daná vztahem

$$\mu_t = E(Y_t), \quad t == 0, \pm 1, \pm 2 \dots .$$

Autokovarianční funkce je definována jako

$$\gamma_{t,s} = C(Y_t, Y_s), \quad t, s = 0, \pm 1, \pm 2 \dots ,$$

kde $C(Y_t, Y_s) = E[(Y_t - \mu_t)(Y_s - \mu_s)] = E[Y_t, Y_s] - \mu_t \mu_s$. **Autokorelační funkce** je dána vztahem

$$\rho_{t,s} = \frac{C(Y_t, Y_s)}{\sqrt{D(Y_t) D(Y_s)}} = \frac{\gamma_{t,s}}{\sqrt{\gamma_{t,t} \gamma_{s,s}}}.$$

Jedním z důležitých vlastností stochastických procesů je **stacionarita**, což znamená, že pravděpodobnostní rozdělení, které řídí chování stochastického procesu je v čase neměnné, proces je ve „statistickém ekvilibriu“.

O procesu $\{Y_t\}$ řekneme, že je **striktně stacionární**, jestliže simultánní rozdělení $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}$ je stejné jako simultánní rozdělení $Y_{t_1-k}, Y_{t_2-k}, \dots, Y_{t_n-k}$ pro všechna t a všechna možná zpoždění k.

Jestliže funkce $\gamma_{s,t}$ závisí na svých argumentech pouze prostřednictvím jejich rozdílů $k = s - t$, pak říkáme, že proces je **kovariančně stacionární**. Autokovarianční funkcí takového procesu budeme rozumět funkci jedné proměnné $\gamma_k = \gamma_{s-t} = \gamma_{s,t}$. Je-li navíc střední hodnota procesu μ_t konstantní pro všechna t ($\mu_t = \mu$), proces $\{Y_t\}$ označujeme za **slabě stacionární**. V dalším budeme místo slabě stacionární proces psát jen krátce proces stacionární. **Autokovarianční funkce** γ_k stacionárního stochastického procesu je definována jako

$$\gamma_k = C(Y_t, Y_{t-k}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)],$$

a **autokorelační funkce (ACF)** ρ_k je dána vztahem

$$\rho_k = \frac{C(Y_t, Y_{t-k})}{\sqrt{D(Y_t) D(Y_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}.$$

Korelace mezi dvěma náhodnými veličinami je často způsobena tím, že obě veličiny jsou korelovány s veličinou třetí. Parciální autokorelace podávají informaci o korelaci veličin Y_t a Y_{t-k} očištěnou o vliv veličin ležících mezi nimi.

Parciální autokorelaci se zpožděním k vyjadřuje parciální regresní koeficient ϕ_{kk} v autoregresi k-tého řádu

$$Y_t = \phi_{k1} Y_{t-1} + \phi_{k2} Y_{t-2} + \cdots + \phi_{kk} Y_{t-k} + e_t,$$

kde e_t je veličina nekorelovaná s $Y_{t-j}, j \geq 1$. Je to funkce zpoždění k a nazývá se **parciální autokorelační funkce (PACF)** ρ_{kk}. Po vynásobení obou stran předchozí rovnice veličinou Y_{t-1} má střední hodnota této rovnice tvar

$$\gamma_j = \phi_{k1} \gamma_{j-1} + \phi_{k2} \gamma_{j-2} + \cdots + \phi_{kk} \gamma_{j-k},$$

Operační program Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Název projektu: Inovace magisterského studijního programu Fakulty ekonomiky a managementu
Registrační číslo projektu: CZ.1.07/2.2.00/28.0326

PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY.

takže platí

$$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \phi_{k2}\rho_{j-2} + \cdots + \phi_{kk}\rho_{j-k}.$$

Pro $j = 1, 2, \ldots, k$ potom dostáváme

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_{k1}\rho_0 + \phi_{k2}\rho_1 + \cdots + \phi_{kk}\rho_{k-1} \\
\rho_2 &= \phi_{k1}\rho_1 + \phi_{k2}\rho_0 + \cdots + \phi_{kk}\rho_{k-2} \\
&\cdots \\
\rho_k &= \phi_{k1}\rho_{k-1} + \phi_{k2}\rho_{k-2} + \cdots + \phi_{kk}\rho_0.
\end{aligned}$$

Tyto rovnice se nazývají **Yule-Walkerovy rovnice.** Řešením této soustavy (Cramerovým pravidlem) pro $k = 1, 2, \ldots$ postupně dostáváme

$$\rho_{11} = \phi_{11} = \rho_1,$$

$$\rho_{22} = \phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2},$$

$$\rho_{kk} = \phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

Obecně jsou parametry μ, γ_0 a ρ_k neznámé, za předpokladu stacionarity použijeme odhady

$$\widehat{\mu} = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t,\ \widehat{\gamma}_0 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \overline{Y})^2.$$

kde n je počet hodnot (délka) časové řady. Odhad ρ_k je dán výběrovou autokorelací

$$\widehat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{n}(Y_t - \overline{Y_t})(Y_{t-k} - \overline{Y_t})}{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \overline{Y})^2},\ k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

(V programu R lze spočítat pomocí funkce `acf`.) Výběrovou parciální korelační funkci získáme nahrazením ρ_i jejím odhadem $\hat{\rho}_i$ v odpovídajícím vzorci. Byl však odvozen rekurzivní vztah, který výpočet zjednoduší

$$\begin{aligned}
\widehat{\rho}_{11} &= \widehat{\rho}_1 \\
\widehat{\rho}_{kk} &= \frac{\hat{\rho}_k - \sum_{j=1}^{k-1}\widehat{\rho}_{k-1,j}\,\widehat{\rho}_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1}\widehat{\rho}_{k-1,j}\,\widehat{\rho}_j}, \\
\widehat{\rho}_{kj} &= \widehat{\rho}_{k-1,j} - \widehat{\rho}_{kk}\widehat{\rho}_{k-1,k-j}, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1.
\end{aligned}$$

(V programu R lze spočítat pomocí funkce `pacf`)

Důležitý stacionárním stochastickým procesem je tzv. proces **bílého šumu**. Jedná se o posloupnost nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem. Pro bílý $\{\epsilon_t\}$ platí

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\rho_{kk} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

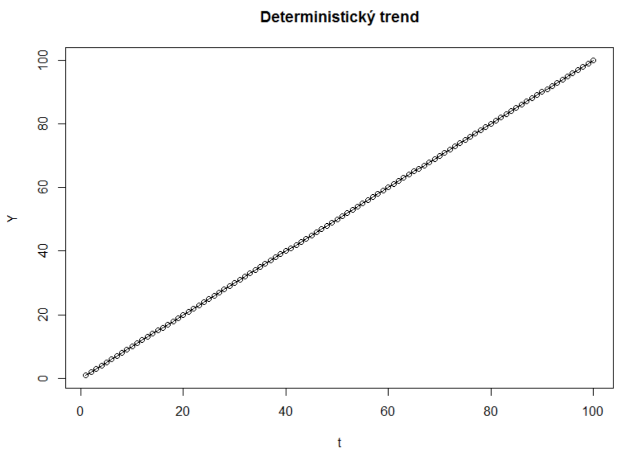
Gaussovský bílý šum – posloupnost nezávislých náhodných veličin s rozdělením $N(0, \sigma^2_{\epsilon_t})$.

2 Trend

Např. proces

$$Y_t = Y_0 + at, t = 1, \dots n$$

obsahuje deterministický lineární trend. Y_0 označuje počáteční hodnotu. Pro $n = 100, Y_0 = 0, a = 1$ proces zobrazený v grafu.



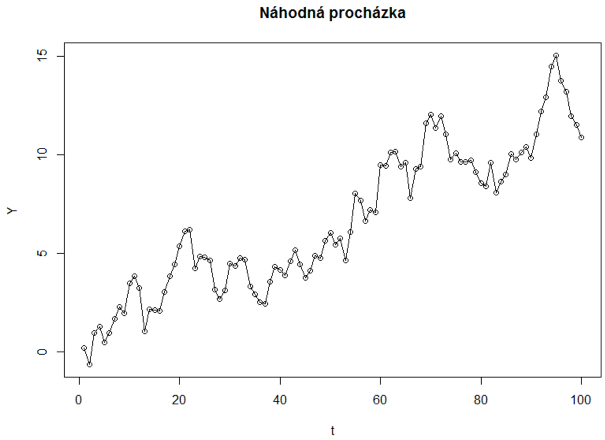
Např. proces („náhodná procházka“ nebo „random walk“)

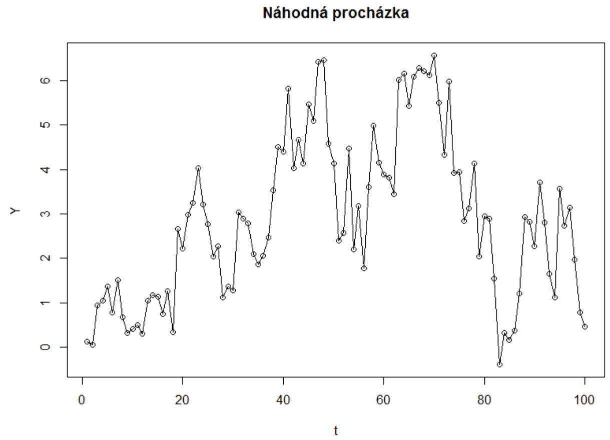
$$Y_t = Y_{t-1} + \epsilon_t, t = 1, \dots n,$$

kde $\epsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_{t-1} + \epsilon_t = (Y_{t-2} + \epsilon_{t-1}) + \epsilon_t = \\ &= (Y_{t-3} + \epsilon_{t-2}) + \epsilon_{t-1} + \epsilon_t = \dots = \\ &= Y_0 + \epsilon_1 + \dots + \epsilon_t = Y_0 + \sum_{i=1}^{t} \epsilon_i \end{aligned}$$

Y_0 značí počáteční hodnotu. Dvě z možných realizací procesu (simulací) pro $n = 100, Y_0 = 0, \epsilon_t \sim \text{WN}(0, 1)$ jsou zobrazeny v grafech.





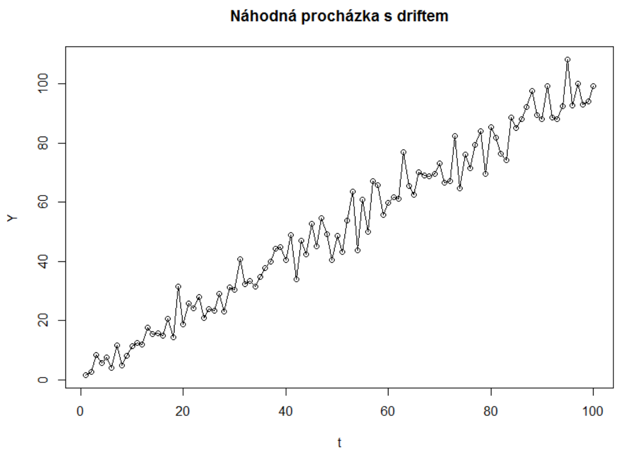
Např. proces („náhodná procházka“ s driftem)

$$Y_t = Y_{t-1} + a + \epsilon_t, t = 1, \dots n,$$

kde $\epsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$ lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_{t-1} + a + \epsilon_t = (Y_{t-2} + a + \epsilon_{t-1}) \\ &+ a + \epsilon_t = (Y_{t-3} + a + \epsilon_{t-2}) \\ &+ 2a + \epsilon_{t-1} + \epsilon_t = \dots = \\ &= Y_0 + at + \sum_{i=1}^{t} \epsilon_i \end{aligned}$$

Y_0 značí počáteční hodnotu. Jedna z možných realizací procesu (simulace) pro $n = 100, Y_0 = 0, \epsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, 1)$ je zobrazena v grafu.



3 Dekompozice časových řad

3.1 Klouzavé průměry

Základem klasické analýzy časové řady Y_t je její rozklad na trend T_t, sezónní složku S_t a složku reziduální (zbytkovou, náhodnou) e_t. V **aditivním modelu** má dekompozice tvar

$$Y_t = T_t + S_t + e_t,$$

v **multiplikativním modelu** potom tvar

$$Y_t = T_t \cdot S_t \cdot e_t.$$

Obvyklou metodou, jak získat trend je využití lineárních filtrů

$$T_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \lambda_i Y_{t+i}.$$

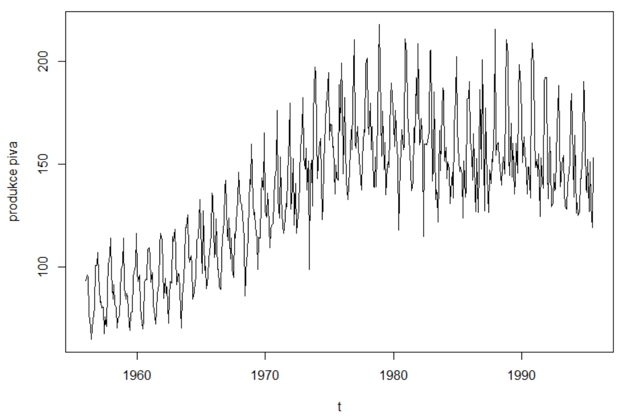
Jednoduchým příkladem lineárních filtrů jsou klouzavé průměry s konstantními váhami

$$T_t = \frac{1}{2a+1} \sum_{i=-a}^{a} Y_{t+i}.$$

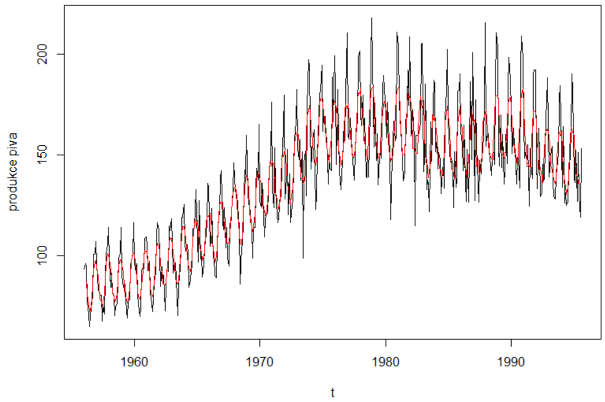
Vyrovnanou hodnotu časové řady v čase τ získáme jako průměr hodnot $\{y_{\tau-a}, \dots, y_\tau, \dots, y_{\tau+a}\}$. Například pro $a = 2, 12$ a 40 dostáváme

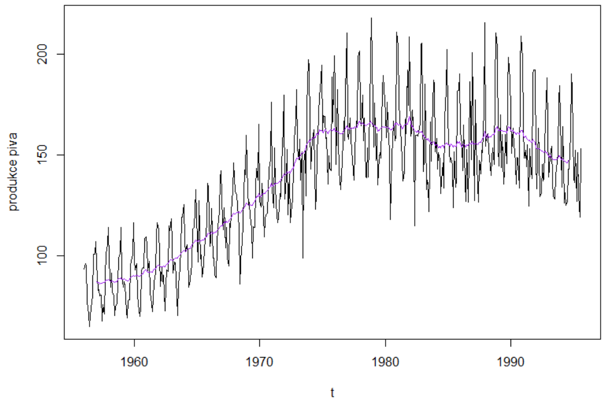
- $a = 2$, $\lambda_i = \{\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\}$
- $a = 12, \lambda_i = \underbrace{\{\frac{1}{25}, \dots, \frac{1}{25}\}}_{\text{25 krát}}$
- $a = 40, \lambda_i = \underbrace{\{\frac{1}{81}, \dots, \frac{1}{81}\}}_{\text{81 krát}}$

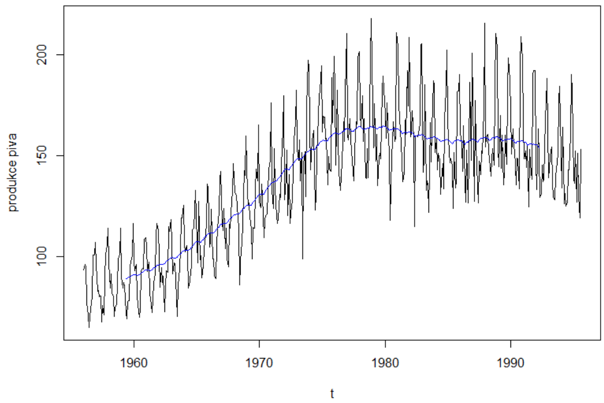
Graf zobrazuje obsahuje měsíční produkci piva v Austrálii od ledna 1956 do srpna 1995



Grafy zobrazují klouzavé průměry délky 5 ($a = 2$), 25 ($a = 12$), 81 ($a = 20$).





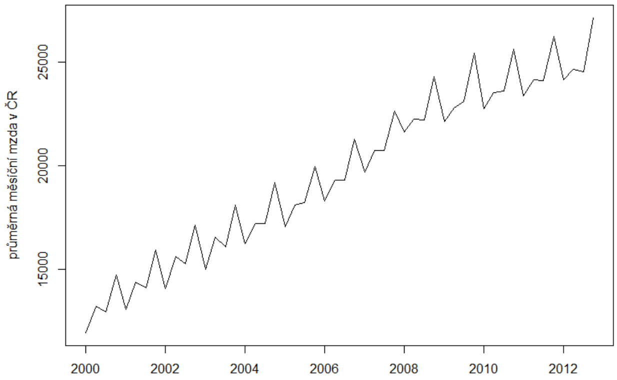


Klouzavé průměry (v R je možné je počítat pomocí funkce `filter`) jsou základem klasické dekompozice, kterou v programu R provádí funkce `decompose`. Poněkud sofistikovanější metodu dekompozice nabízí funkce `stl`.

Dekompozici časové řady lze také provádět pomocí lineární regrese (funkce `lm` – viz regresní analýza). Mimo trendu (lineárního, kvadratického atd.) je často vhodné do regresního modelu přidat buď sezónní složky, nebo periodické funkce s vhodnými periodami.

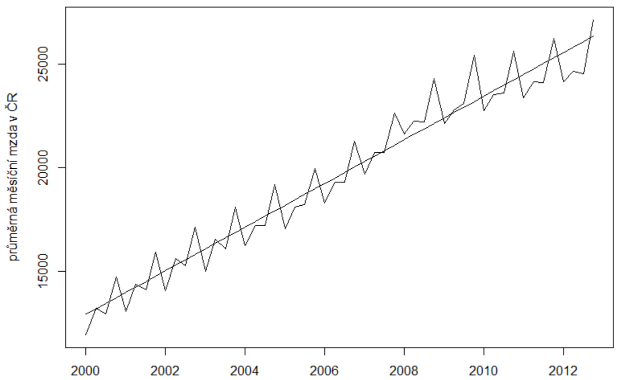
3.2 Regrese

Na obrázku je znázorněn vývoj hrubé měsíční mzdy v ČR v období 2000–2012, jedná se o čtvrtletní data.



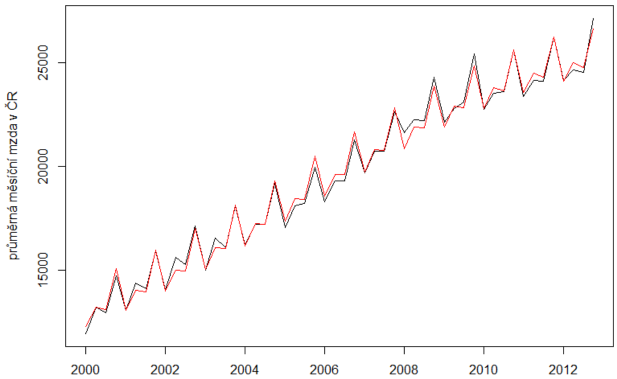
Trend odhadneme pomocí přímkové regrese, pro numerickou stabilitu výpočtu provedeme transformaci časové proměnné $t = rok - 1999$, takže $t = 1\ \ldots, 13$.

	Odhad	Sm. chyba	t-test	p-hodnota
konstanta	11875,9388	286,5841	41,44	0,0000
t	1051,1374	34,6343	30,35	0,0000



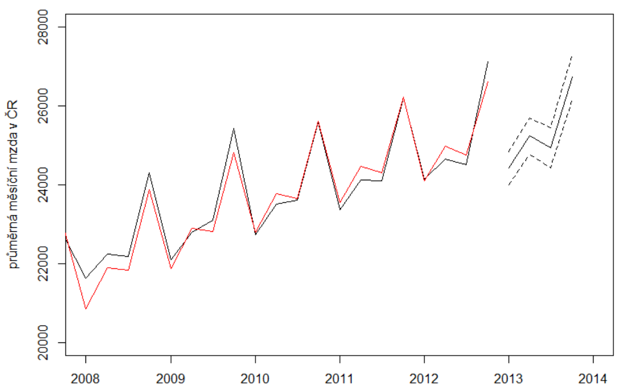
Periodickou složku odhadneme pomocí „dummy“ proměnných q_1, q_2, q_3, q_4. Trend potom pomocí polynomu 3. stupně. konstantu do modelu nezahrneme, vznikne vlastně součtem „dummy“ proměnných q_1, q_2, q_3, q_4.
$q_1 = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots, 1, 0, 0, 0)'$
$q_1 = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0)'$
$q_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, \ldots, 0, 0, 1, 0)'$
$q_1 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots, 0, 0, 0, 1)'$

	Odhad	Sm. chyba	t-test	p-hodnota
t	484,4349	152,8450	3,17	0,0027
t^2	111,4610	23,3280	4,78	0,0000
t^3	-5,7907	1,0430	-5,55	0,0000
q_1	11684,2530	282,8990	41,30	0,0000
q_2	12457,0559	287,3388	43,35	0,0000
q_3	12138,0542	291,5674	41,63	0,0000
q_4	13921,6368	295,6681	47,09	0,0000



Vyjdeme-li z uvedeného regresního modelu, dostaneme predikce da rok 2013 spolu s 95% intervaly spolehlivosti:

	predikce	dolní	horní
2013, 1.čtvrtletí	24423,14	24008,05	24838,23
2013, 2.čtvrtletí	25237,73	24777,01	25698,44
2013, 3.čtvrtletí	24943,50	24431,21	25455,79
2013, 4.čtvrtletí	26734,30	26164,51	27304,09



Příklady k procvičení

1. Data v souboru rozvody.txt zachycují vývoj počtu rozvodů v ČR od roku 1960 do roku 1910. Popište trend vhodnou regresní funkcí. Vykreslete graf odhadnutého trendu, určete rezidua a popište jejich vlastnosti.
[Datový soubor: rozvody.txt]

2. Data v souboru CPI_CR_ctvrtletni.txt zachycují vývoj indexu spotřebitelských cen v ČR od roku 2000 do roku 2012. Jedná se o čtvrtletní indexy, kdy hodnota 100 odpovídá průměru roku 2005. Popište trend vhodnou regresní funkcí. Vykreslete graf odhadnutého trendu, určete rezidua a popište jejich vlastnosti.
[Datový soubor: CPI_CR_ctvrtletni.txt]

3. V ročence infekční nemoci 2012 je uveden vývoj počtu hlášeného svrabu na 100 000 obyvatel od roku 1993 do roku 2011. Popište trend vhodnou regresní funkcí. Vykreslete graf odhadnutého trendu, určete rezidua a popište jejich vlastnosti. [Datový soubor: svrab.txt]

4. Soubor PM10_UK.txt obsahuje údaje o množství prachových částic PM10 v ovzduší ve Velké Británii od roku 1990 do roku 2010. Cílem je popsat dynamiku těchto částic v ovzduší. Popište trend vhodnou regresní funkcí. Vykreslete graf odhadnutého trendu, určete rezidua a popište jejich vlastnosti.
[Datový soubor: PM10_UK.txt]

5. Datový soubor airmiles z balíčku „datasets“ obsahuje údaje o „Revenue Passenger Miles“ tedy o celkové množství mílí nalétaných platícími pasažéry na komerčních aerolinkách v USA v letech 1937 až 1960. Popište trend vhodnou regresní funkcí. Vykreslete graf odhadnutého trendu, určete rezidua a popište jejich vlastnosti. [Příkaz pro R: data(airmiles)]

6. Datový soubor airpass z balíčku „TSA“ obsahuje měsíční údaje o počtu pasažérů na mezinárodních linkách letech 1960 až 1971. Popište trend vhodnou regresní funkcí. Vykreslete graf odhadnutého trendu, určete rezidua a popište jejich vlastnosti. Pomocí vhodných „dummy“ proměnných popište periodické chování této časové řady. Poté analyzovanou řadu zlogaritmujte a opět proveďte popis trendu této transformované časové řady. [Příkaz pro R: data(airpass)]