evropský sociální fond v ČR · EVROPSKÁ UNIE · MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY · OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost · UNIVERZITA OBRANY
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# Funkce přežití, funkce spolehlivosti

## 1 Funkce přežití

Budeme uvažovat nezápornou náhodnou veličinu $X$, která udává dobu čekání na rizikovou událost (např. poruchu sledovaného zařízení apod.). Rozdělení pravděpodobností takové náhodné veličiny $X$ je v teorii spolehlivosti zvykem popisovat pomocí **funkce přežití** $S(x)$. Je definována vztahem

$$S(x) = P(X > x)$$

a pomocí distribuční funkce ji lze zapsat ve tvaru

$$S(x) = 1 - F(x).$$

Funkci přežití lze využít k výpočtu obecných momentů náhodné veličiny $X$. Za předpokladu, že existuje $k$-tý obecný moment $\mu_k = EX^k$, pak platí

$$\mu_k = k \int_0^\infty x^{k-1} S(x) dx. \tag{1}$$

Dále se funkce přežití používá ke stanovení $100\gamma\%$-ní životnosti $T_\gamma$. Ze vztahu $x_{1-\gamma} = T_\gamma$ mezi $(1-\gamma)$-kvantilem $X$ a $T_\gamma$ hned dostaneme

$$1 - \gamma = F(x_{1-\gamma}) = F(T_\gamma) = 1 - S(T_\gamma)$$

a odtud vztah

$$\gamma = S(T_\gamma),$$

který je vhodný pro stanovení $T_\gamma$.

**Příklad**
Předpokládejme, že náhodná veličina $X$, která má exponenciální rozdělení $Ex(\lambda)$, udává životnost daného zařízení.

a) Stanovte funkci přežití $S(x)$ náhodné veličiny $X$.

b) Pomocí $S(x)$ stanovte $T_{0{,}10};\ T_{0{,}25};\ T_{0{,}50};\ T_{0{,}75}$ a $T_{0{,}90}$.

c) Pomocí $S(x)$ vypočtěte obecné momenty $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4$.

d) Výsledky stanovené v bodě c) použijte k výpočtu střední hodnoty $EX$, rozptylu $DX$, šikmosti $\alpha_3$ a špičatosti $\alpha_4$.

Požadované charakteristiky vyjádřete nejprve obecně a následně určete jejich hodnoty pro $\lambda = 0{,}1$.

a) Protože distribuční funkce $F(x)$ má tvar $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, pro $x \geq 0$, funkce přežití je

$$S(x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Operační program Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Název projektu: Inovace magisterského studijního programu Fakulty ekonomiky a managementu
Registrační číslo projektu: CZ.1.07/2.2.00/28.0326

PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY.

b) Ze vztahu $\gamma = S(T_\gamma) = e^{-\lambda T_\gamma}$ lze snadno vyjádřit $100\gamma$%-ní životnost $T_\gamma$. Tedy,

$$T_\gamma = -\frac{\ln\gamma}{\lambda}.$$

Dosazením do tohoto vzorce získáme požadované životnosti:

$$\begin{aligned}
T_{0,10} &\doteq \frac{2{,}303}{\lambda} = 23{,}03,\\
T_{0,25} &\doteq \frac{1{,}386}{\lambda} = 13{,}86,\\
T_{0,50} &\doteq \frac{0{,}693}{\lambda} = 6{,}93,\\
T_{0,75} &\doteq \frac{0{,}288}{\lambda} = 2{,}88,\\
T_{0,90} &\doteq \frac{0{,}105}{\lambda} = 1{,}05.
\end{aligned}$$

c) Obecné momenty lze spočítat ze vztahu (1). Konkrétně

$$\mu_1 = 1 \cdot \int_0^\infty x^0 e^{-\lambda x}dx = \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda} = 10.$$

Užitím metody „per partes“ lze postupně spočítat i další obecné momenty, tj. $\mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4$. Matematickou indukcí lze dokonce odvodit obecné vyjádření obecného momentu ve tvaru

$$\mu_k = \frac{k!}{\lambda^k}, \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Tedy

$$\mu_2 = \frac{2}{\lambda^2} = 200,\ \mu_3 = \frac{6}{\lambda^3} = 6\,000,\ \mu_4 = \frac{24}{\lambda^4} = 240\,000.$$

d) Předchozích výsledků můžeme použít k výpočtu příslušných charakteristik. Dostaneme, že střední hodnota je

$$EX = \mu_1 = \frac{1}{\lambda} = 10,$$

rozptyl je

$$DX = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{\lambda^2} = 100,$$

šikmost je

$$\begin{aligned}
\alpha_3 = \frac{E(X-EX)^3}{DX^{3/2}} &= \lambda^3\left[\mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3\right] = \\
&= \lambda^3\left[\frac{3!}{\lambda^3} - 3\frac{2!}{\lambda^2}\frac{1}{\lambda} + 2\left(\frac{1}{\lambda}\right)^3\right] = 6 - 6 + 2 = 2
\end{aligned}$$

a špičatost je

$$\alpha_4 = \frac{E(X - EX)^4}{DX^2} = \lambda^4 \left[\mu_4 - 4\mu_3\mu_1 + 6\mu_2\mu_1^2 - 3\mu_1^4\right] =$$
$$= \lambda^4 \left[\frac{4!}{\lambda^4} - 4\frac{3!}{\lambda^3}\frac{1}{\lambda} + 6\frac{2!}{\lambda^2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{\lambda}\right)^4\right] = 4! - 4! + 12 - 3 = 9.$$

## 2 Funkce spolehlivosti

Při popisu rizikových událostí, např. při popisu procesu poruch, živelných katastrof apod., má rozdělení pravděpodobnosti doby čekání na takovou událost (budeme říkat doba čekání na poruchu) obvykle rozdělení s těžkými chvosty. Je proto důležité vyšetřit chování chvostů rozdělení doby do poruchy. Distribuční funkce ani hustota ani funkce přežití neposkytují samy o sobě dostatečně názornou představu o chování chvostů.

Funkce, která umožňuje dobře rozlišovat mezi rozděleními doby do poruchy na základě chování chvostů těchto rozdělení, se nazývá **riziková funkce**. Budeme ji značit $s(x)$ a definovat pro spojitou dobu do poruchy $X$ vztahem

$$s(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{f(x)}{S(x)},$$

kde $F$ je distribuční funkce, $S$ je funkce přežití a $f$ je hustota doby do poruchy $X$. Riziková funkce $s(x)$ není definována pro hodnoty $x$, pro které je $F(x) = 1$.

Riziková funkce $s(x)$ se v teorii spolehlivosti též nazývá **intenzita poruch** či **funkce spolehlivosti**, někdy **hazardní poměr**, v pojišťovnictví **křivka úmrtnosti**. V ekonomii se používá její převrácená hodnota $\frac{S(x)}{f(x)}$ a nazývá se **Millsův poměr**.

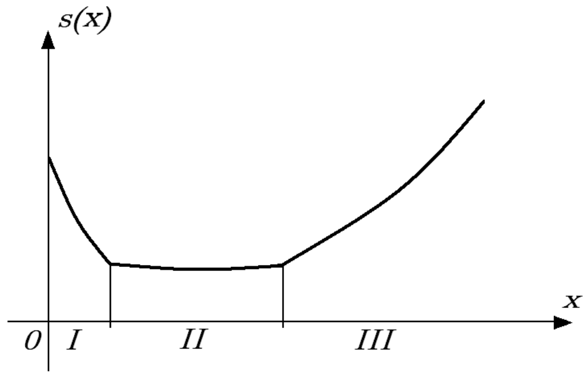
Dále ukážeme pravděpodobnostní interpretaci rizikové funkce. Pro daný časový okamžik $x > 0$ a „malý“ časový interval délky $\Delta x > 0$ stanovíme podmíněnou pravděpodobnost, že se sledovaný prvek porouchá v intervalu $(x, x + \Delta x\rangle$ za předpokladu, že do okamžiku $x$ pracoval bez poruchy. Je-li $X$ doba bezporuchové činnosti tohoto prvku, postupně dostaneme

$$P(x < X \le x + \Delta x \,|\, X > x) = \frac{P(x < X \le x + \Delta x \wedge X > x)}{P(X > x)} =$$
$$= \frac{P(x < X \le x + \Delta x)}{P(X > x)} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{S(x)} =$$
$$= \frac{1}{S(x)} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \Delta x.$$

Když se $\Delta x$ blíží k 0, pak podíl $\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$ se blíží k derivaci distribuční funkce $F(x)$ (pokud v bodě $x$ tato derivace existuje). Protože $F'(x) = f(x)$, dostáváme pro „malé“ hodnoty $\Delta x$ přibližný vztah

$$P(x < X < x + \Delta x \,|\, X > x) \doteq \frac{f(x)}{S(x)} \Delta x = s(x)\Delta x.$$

Z tohoto vztahu je patrné, že riziková funkce je lokální charakteristikou spolehlivosti. Pro daný časový okamžik $x$ je podmíněná pravděpodobnost poruchy v intervalu $x + \Delta x$ za podmínky, že do času $x$ se prvek neporouchal, úměrná délce $\Delta x$ tohoto intervalu a konstantou úměrnosti je hodnota rizikové funkce $s(x)$ v okamžiku $x$. Je-li $s(x) < 1$, lze $s(x)$ přibližně interpretovat jako podmíněnou pravděpodobnost $P(x < X \le x + 1 \,|\, X > x)$.




Obr. 1: Typický průběh rizikové funkce $s(x)$

Rizikovou funkci náhodné veličiny $X$ lze také použít ke stanovení rozdělení pravděpodobností této náhodné veličiny. Z definice rizikové funkce dostaneme

$$s(x) = \frac{1}{S(x)}\, f(x) = \frac{1}{S(x)} \cdot \frac{dF(x)}{dx} = -\frac{1}{S(x)} \cdot \frac{dS(x)}{dx}$$

odtud dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{dS(x)}{S(x)} = -s(x)dx$$

a její integrací dostaneme

$$\ln S(x) = C - \int_0^x s(t)dt,$$

přičemž z počáteční podmínky $S(0) = 1$ dostaneme, že konstanta $C = 0$, a tedy

$$S(x) = e^{-\int_0^x s(t)dt}.$$

Pro distribuční funkci pak dostáváme vyjádření

$$F(x) = 1 - e^{-\int_0^x s(t)dt}.$$

Odtud derivováním dostaneme vyjádření hustoty $f(x)$ pomocí $s(x)$ ve tvaru

$$f(x) = s(x)e^{-\int_0^x s(t)dt}.$$

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
UNIVERZITA OBRANY
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## Příklady k procvičení

1. Náhodná veličina $X$ popisující životnost zřízení má exponenciální rozdělení $Ex(2)$.

   a) Stanovte funkci přežití $S(x)$ náhodné veličiny $X$.

   b) Pomocí $S(x)$ stanovte $T_{0{,}10};\ T_{0{,}25};\ T_{0{,}50};\ T_{0{,}75}$ a $T_{0{,}90}$.

   c) Pomocí $S(x)$ vypočtěte obecné momenty $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4$.

   d) Výsledky stanovené v bodě c) použijte k výpočtu střední hodnoty $EX$, rozptylu $DX$, šikmosti $\alpha_3$ a špičatosti $\alpha_4$.

   e) Stanovte rizikovou funkci $s(x)$.

   f) Vypočtěte hustotu $X$ pomocí rizikové funkce $s(x)$.

2. Náhodná veličina $X$ popisující životnost zřízení má normální rozdělení $N(10, 4)$.

   a) Stanovte funkci přežití $S(x)$ v bodech $x \in \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 50, 100\}$ a v uvedených bodech ji graficky znázorněte.

   b) Pomocí $S(x)$ stanovte životnosti $T_{0{,}10};\ T_{0{,}25};\ T_{0{,}50};\ T_{0{,}75}$ a $T_{0{,}90}$.

   c) V bodech $x \in \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 50, 100\}$ stanovte rizikovou funkci $s(x)$

3. Náhodná veličina $X$ popisující životnost má Weibullovo rozdělení s distribuční funkcí

$$F(x, \lambda, \tau) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\tau}\right] & \text{pro } x \geq 0, \\ 0 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

   a) Stanovte funkci přežití $S(x)$ náhodné veličiny $X$.

   b) Stanovte rizikovou funkci $s(x)$.

   c) Vypočtěte hustotu $X$ pomocí rizikové funkce s(x). .

4. Předpokládejme, že dvě elektronické komponenty mají životnosti $Y_1$ a $Y_2$, přičemž $Y_1$ a $Y_2$, jsou nezávislé náhodné veličiny a $Y_i$ má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda_i, i = 1, 2$.

   a) Stanovte distribuční funkci, funkci přežití a hustotu náhodné veličiny $Y = \min\{Y_1, Y_2\}$.

   b) Stanovte životnosti $T_{0{,}10};\ T_{0{,}25};\ T_{0{,}50};\ T_{0{,}75}$ a $T_{0{,}90}$.