evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
UNIVERZITA OBRANY
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Základní parametrické modely pro funkci přežití

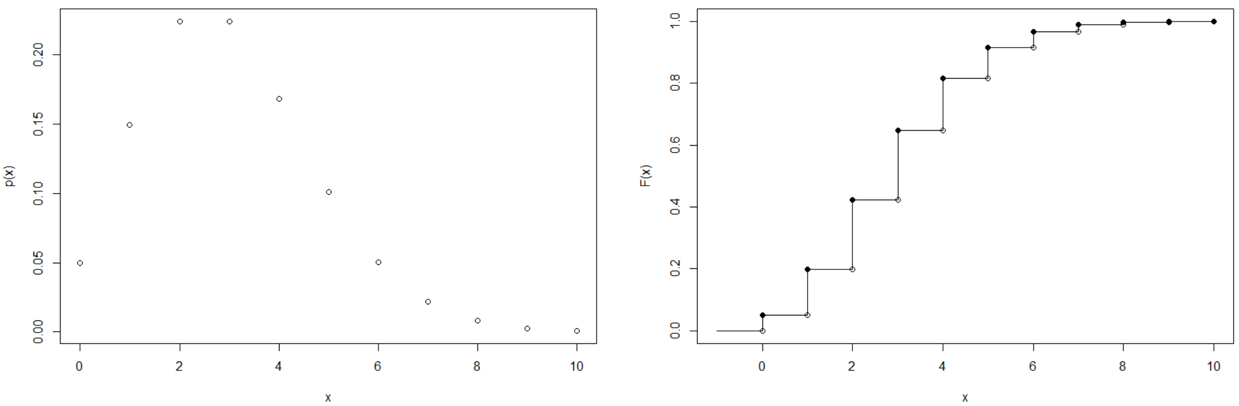
1 Modely diskrétní náhodné veličiny

Náhodná veličina X má **Poissonovo rozdělení** $Po(\lambda)$, právě když má pravděpodobnostní funkce tvar

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & x = 0, 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\lambda > 0$ je střední hodnota dané náhodné veličiny.

Poissonovo rozdělení pravděpodobností je jednou z nejčastěji používaných rozdělení v teorii rizik, protože popisuje rozdělení tzv. řídkých jevů, např. počet povodní nebo požárů v dané oblasti za jednotku času, počet nehod na dané křižovatce za jednotku času apod.



Obr. 1: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $Po(3)$

Náhodná veličina X má **alternativní rozdělení** $A(\pi)$, právě když má pravděpodobnostní funkce tvar

$$p(x) = \begin{cases} \pi^x (1-\pi)^{1-x} & x = 0, 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro parametr platí $0 < \pi < 1$.

Náhodná veličina X má **binomické rozdělení** $B(n, \pi)$, právě když má pravděpodobnostní funkce tvar

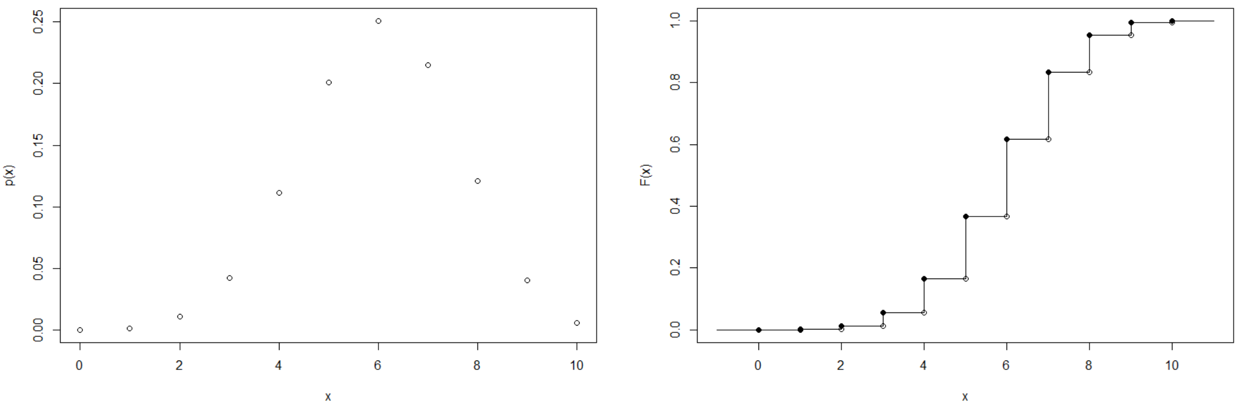
$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x} & x = 0, 1, \dots, n, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Parametr n obvykle udává počet nezávislých pokusů, $0 < \pi < 1$ potom pravděpodobnost úspěchu (příp. nezdaru) v jednom pokuse.

Náhodná veličina s binomickým rozdělením udává počet úspěchů (příp. nezdarů) v posloupnosti n nezávislých pokusů. Náhodná veličina X má **hypergeometrické rozdělení** $Hg(N, M, n)$, právě když má pravdě-

Operační program Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Název projektu: Inovace magisterského studijního programu Fakulty ekonomiky a managementu
Registrační číslo projektu: CZ.1.07/2.2.00/28.0326

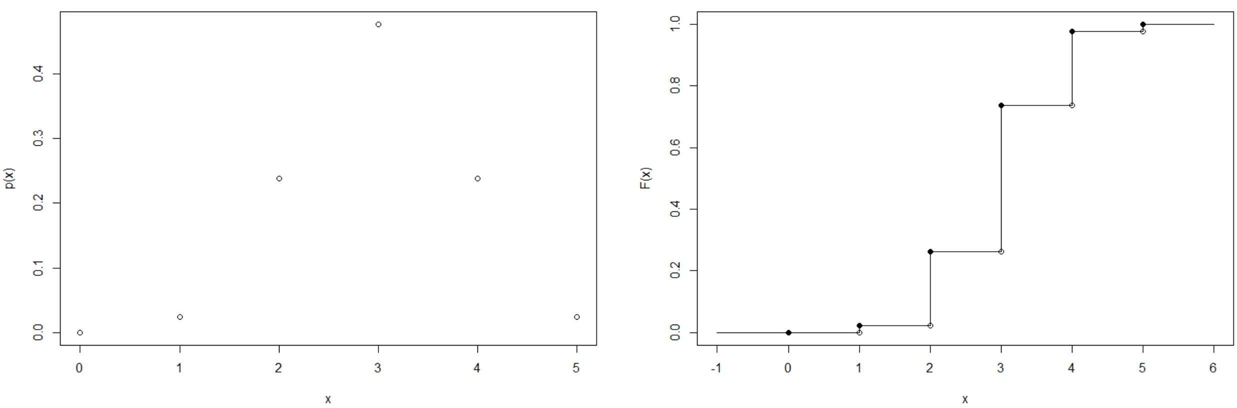
PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY.



Obr. 2: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $B(10; 0{,}6)$

podobnostní funkce tvar

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} & \max\{0, n-N+M\} \leq x \leq \min\{n, M\}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

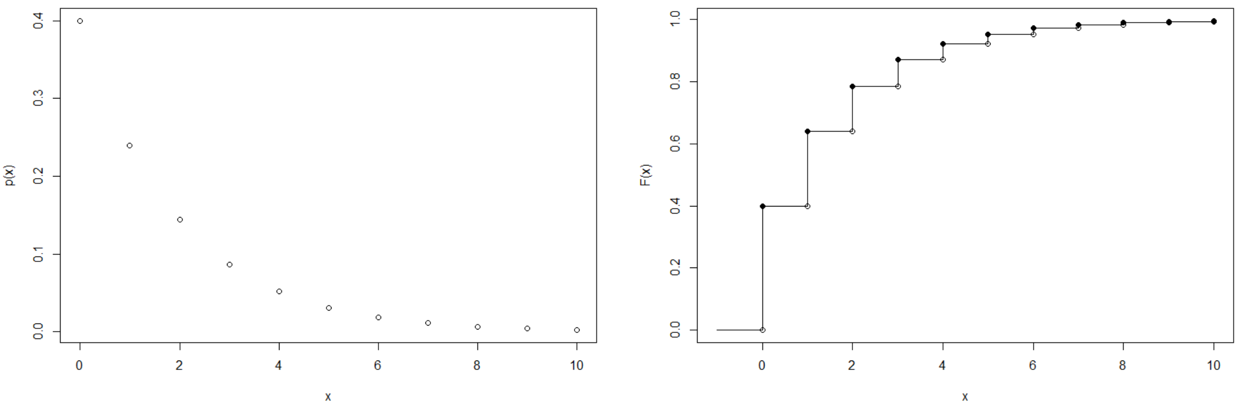


Obr. 3: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $Hg(10, 6, 5)$

Náhodná veličina X má **geometrické rozdělení** $Ge(\pi)$, právě když má pravděpodobnostní funkce tvar

$$p(x) = \begin{cases} \pi(1-\pi)^x & x = 0, 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $0 < \pi < 1$. Náhodná veličina s geometrický rozdělením udává počet neúspěšných pokusů předcházející prvnímu úspěchu, nebo analogicky počet nezdarů předcházejících prvnímu zdaru.



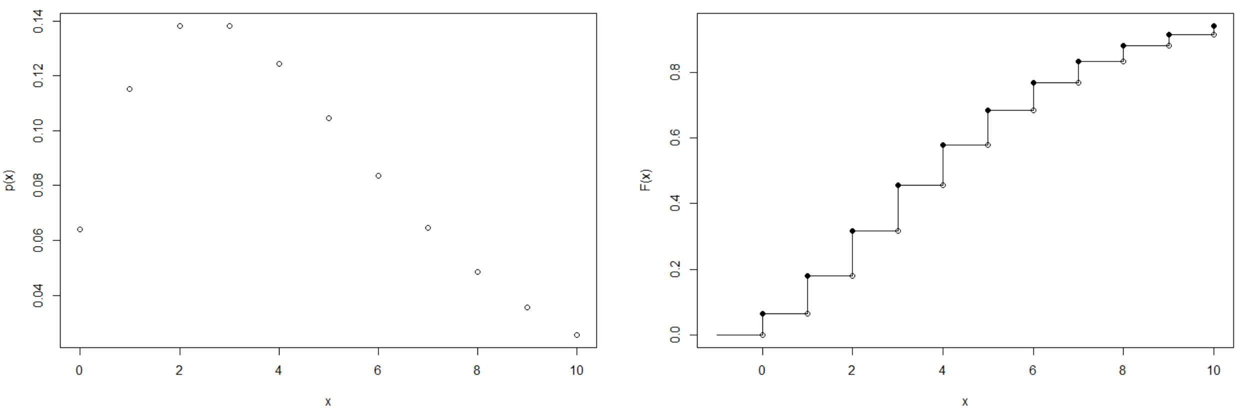
Obr. 4: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $Ge(0{,}4)$

Náhodná veličina X má **negativně binomické rozdělení** $NB(m, \pi)$, právě když má pravděpodobnostní funkce tvar

$$p(x) = \begin{cases} \binom{m+x-1}{x}\pi^m(1-\pi)^x & x = 0, 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $0 < \pi < 1$, $m > 0$.

Náhodná veličina s negativně binomickým rozdělením udává počet neúspěšných pokusů předcházející m-tému úspěchu v posloupnosti nezávislých pokusů (nebo analogicky počet zdarů před m-tým nezdarem).

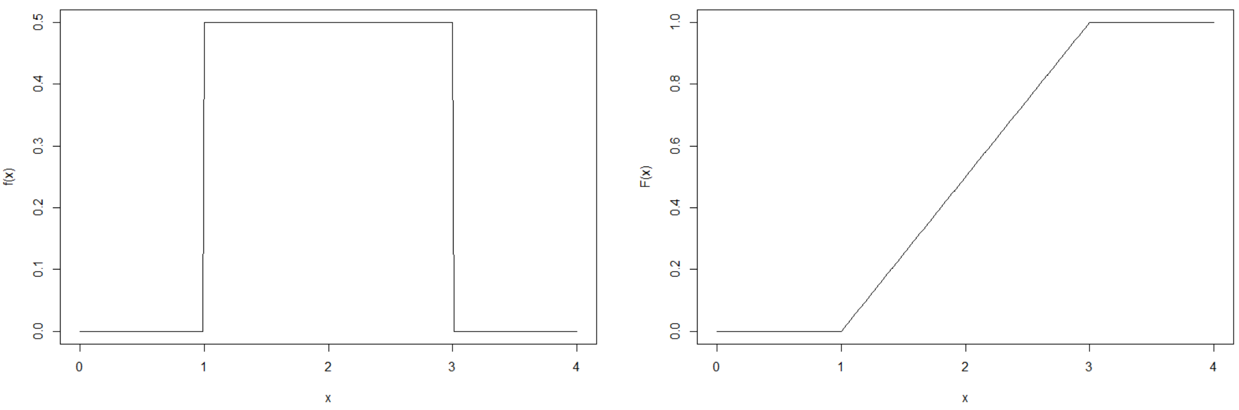


Obr. 5: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $NB(3; 0{,}4)$

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
UNIVERZITA OBRANY
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2 Modely spojité náhodné veličiny

Náhodná veličina X má **rovnoměrné rozdělení** $R(\alpha, \beta)$ právě tehdy, když má funkce hustoty pravděpodobnosti tvar



Obr. 6: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $R(1, 3)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \alpha < x < \beta, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$.

Distribuční funkci náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením dostaneme

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{\alpha}^{x} \frac{1}{\beta - \alpha} dt = \cdots = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} \quad \text{pro} \quad \alpha < x < \beta.$$

Celkový tvar distribuční funkce je

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le \alpha, \\ \dfrac{x - \alpha}{\beta - \alpha} & \alpha < x < \beta, \\ 1 & x \ge \beta. \end{cases}$$

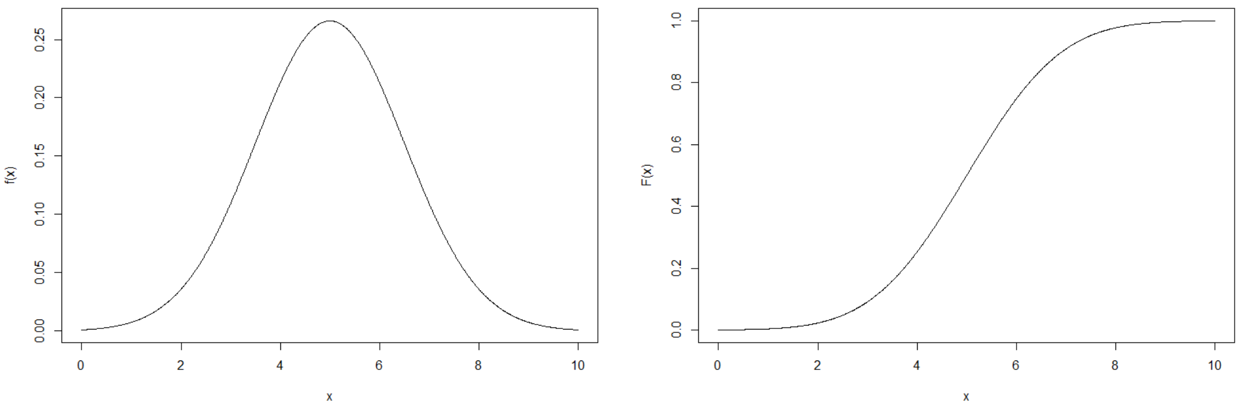
Náhodná veličina X má **normální rozdělení** $N(\mu, \sigma^2)$ právě tehdy, když má funkce hustoty pravděpodobnosti tvar

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{pro} \quad x \in \mathbb{R}$$

kde $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$.

Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad \text{pro} \quad x \in \mathbb{R}$$



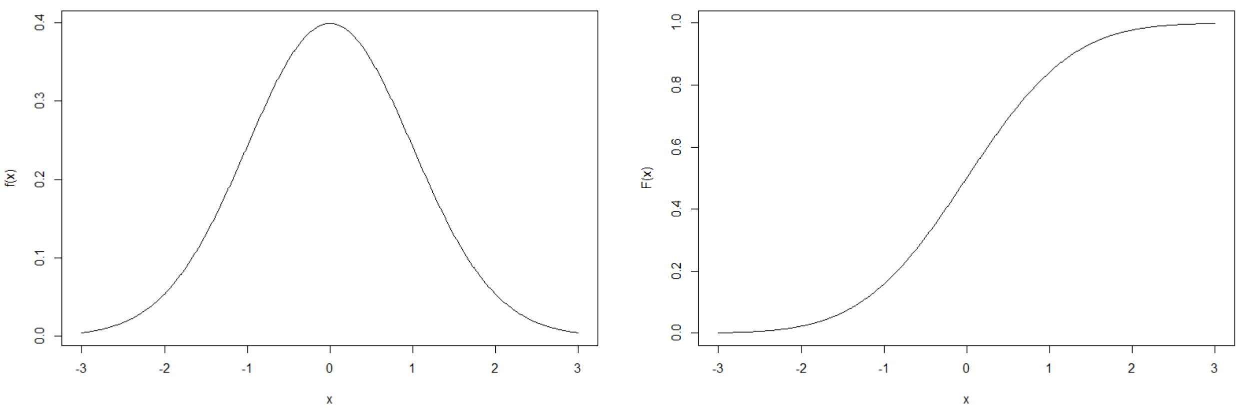
Obr. 7: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $N(5; 1{,}5^2)$

Funkce hustoty normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$ má tvar

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \quad \text{pro} \quad u \in \mathbb{R},$$

distribuční funkce

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} \phi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{pro} \quad u \in \mathbb{R}$$



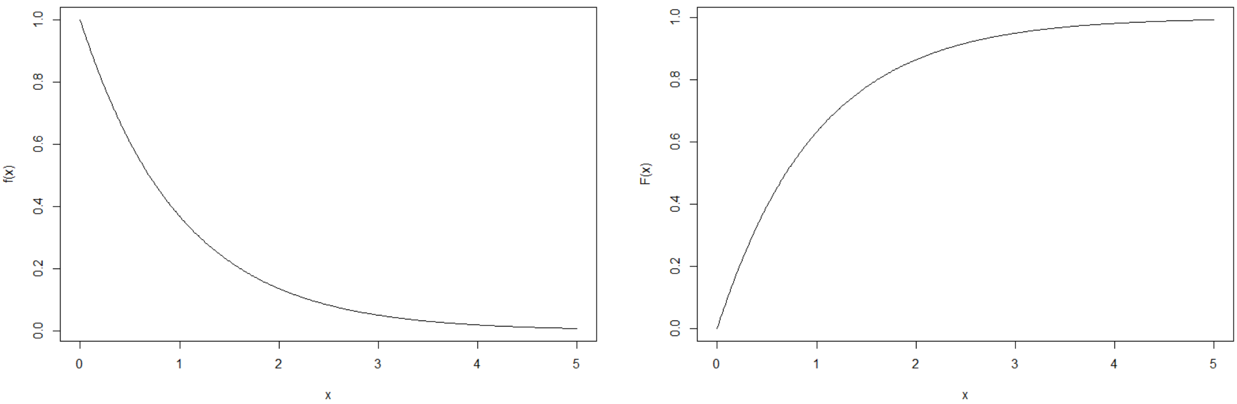
Obr. 8: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $N(0,1)$

Náhodná veličina X má **exponenciální rozdělení** $Ex(\lambda)$ právě tehdy, když má funkce hustoty pravděpodobnosti tvar

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0, \\ 0 & x \le 0, \end{cases}$$

kde $\lambda > 0$. Distribuční funkce je

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0, \end{cases}$$



Obr. 9: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $Ex(1)$

Náhodná veličina X má **gama rozdělení** $G(\lambda, p)$ právě tehdy, když má funkce hustoty pravděpodobnosti tvar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)}\, x^{p-1} e^{-\lambda x} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0, \end{cases}$$

kde $\lambda > 0, p > 0$. $\Gamma(p)$ je tzv. **gama funkce** (odtud název rozdělení) daná vztahem

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty y^{p-1} e^{-y} \mathrm{y},\ p > 0.$$

Volbou $p = 1$ přechází rozdělení $G(\lambda, p)$ v rozdělení exponenciální $Ex(\lambda)$. Volbou $p = \frac{n}{2},\ \lambda = \frac{1}{2}$ dostaneme tzv. **Pearsonovo** χ^2 **rozdělení**.

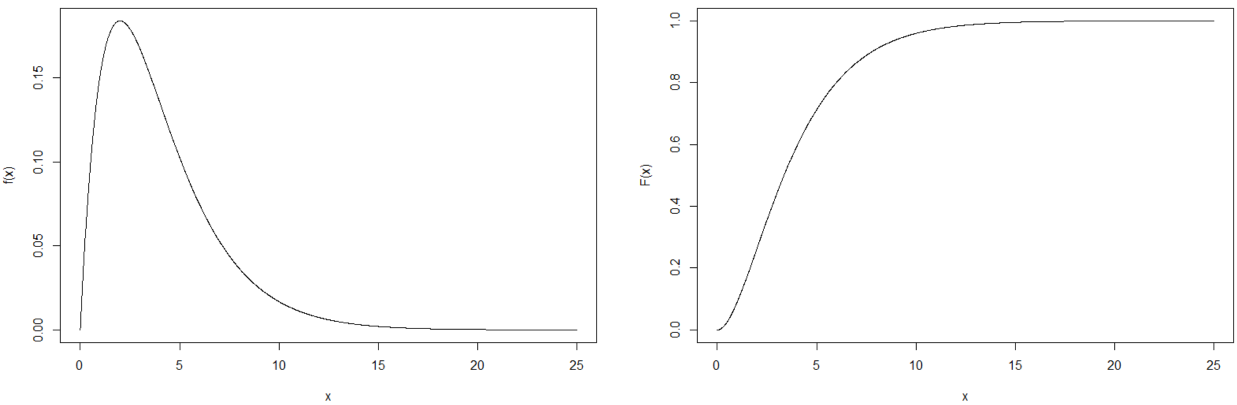
Náhodná veličina X má **Weibullovo rozdělení** $W(p, \lambda)$ právě tehdy, když má funkce hustoty pravděpodobnosti tvar

$$f(x) = \begin{cases} \lambda p x^{p-1} e^{-\lambda x^p} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0, \end{cases}$$

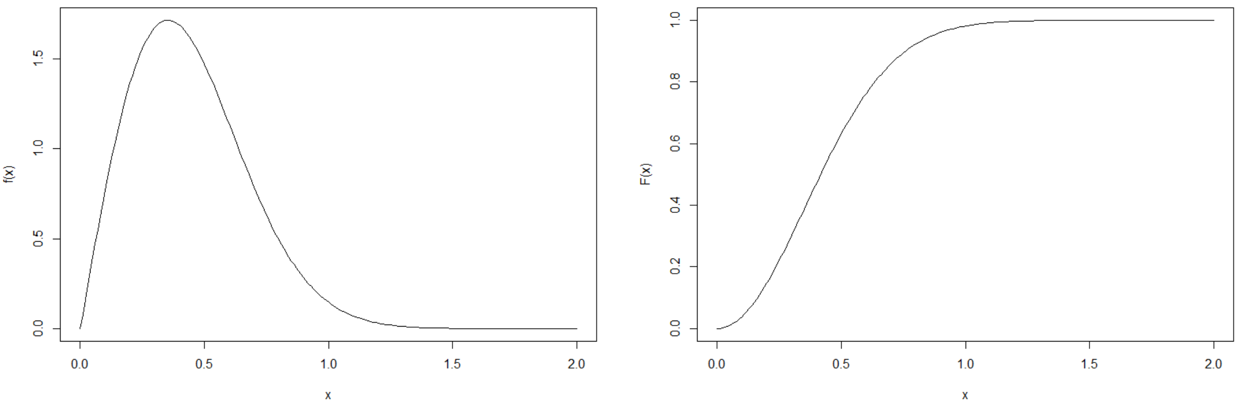
kde $\lambda > 0, p > 0$. Volbou $p = 1$ dostaneme rozdělení exponenciální $Ex(\lambda)$.

Nechť X je nezáporná náhodná veličina. Má-li náhodná veličina $\ln X$ normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, potom náhodná veličina X má logaritmicko-normální rozdělení $LN(\mu, \sigma^2)$. Náhodná veličina X má **logaritmicko-normální rozdělení** $LN(\mu, \sigma^2)$ právě tehdy, když má funkce hustoty pravděpodobnosti tvar

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0, \end{cases}$$



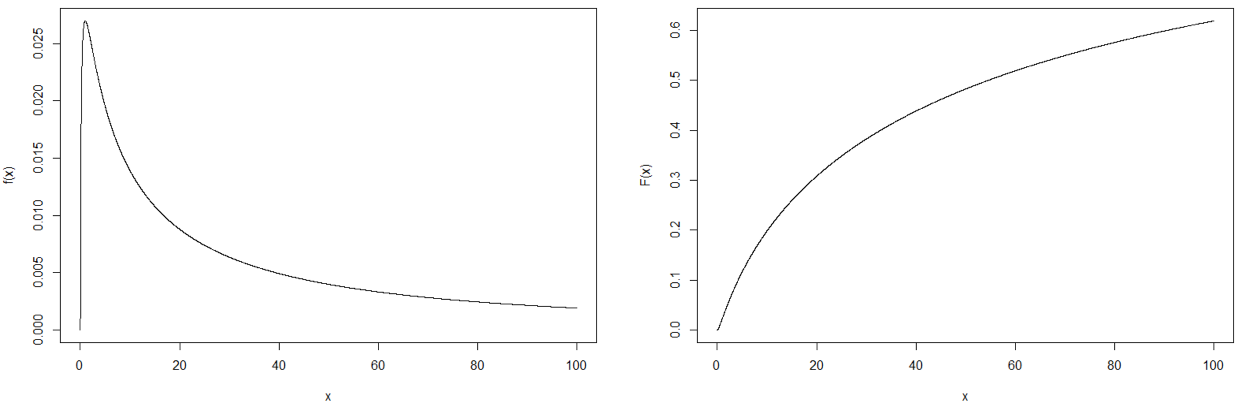
Obr. 10: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $G(2,2)$



Obr. 11: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $W(2,2)$

Příklady k procvičení

1. Náhodná veličina X popisuje dobu do poruchy vybraného zařízení. Graficky znázorněte hustotu a distribuční funkci náhodné veličiny X a stanovte medián, dolní a horní kvartil a největší a nejmenší decil a největší a nejmenší percentil, když
   a) X má normální rozdělení $N(0,1)$,
   b) X má normální rozdělení $N(10,16)$,
   c) X má exponenciální rozdělení $Ex(5)$,
   d) X má Weibullovo rozdělení $W(2,1)$,
   e) X má gamma rozdělení $\Gamma(2,1)$,



Obr. 12: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $LN(4, 2^2)$

f) X má logaritmicko-normální rozdělení $LN(2, 4)$.

Vlastnosti jednotlivých rozdělení podle průběhu jejich hustot nebo podle průběhu jejich distribučních funkcí porovnejte. Pro řešení využijte podle vlastní volby software STATISTICA, R nebo MATLAB.

2. Náhodná veličina X popisuje počet poruch vybraného zařízení za jednotku času. Graficky znázorněte pravděpodobnostní funkci a distribuční funkci náhodné veličiny X a stanovte medián, dolní a horní kvartil, když

a) X má binomické rozdělení $Bi(10; 0{,}1)$,

b) X má binomické rozdělení $Bi(10; 0{,}5)$,

c) X má binomické rozdělení $Bi(10; 0{,}8)$,

d) X má Poissonovo rozdělení $Po(2)$,

e) X má Poissonovo rozdělení $Po(10)$,

f) X má Poissonovo rozdělení $Po(20)$,

g) X má geometrické rozdělení $Ge(0{,}1)$,

h) X má geometrické rozdělení $Ge(0{,}5)$,

i) X má geometrické rozdělení $Ge(0{,}8)$,

j) X má negativně binomické rozdělení $NB(2; 0{,}5)$,

k) X má negativně binomické rozdělení $NB(10; 0{,}1)$,

k) X má negativně binomické rozdělení $NB(20; 005)$.

Vlastnosti jednotlivých rozdělení podle průběhu jejich pravděpodobnostních funkcí nebo podle průběhu jejich distribučních funkcí porovnejte. Pro řešení využijte podle vlastní volby software STATISTICA, R nebo MATLAB.