Markovské metody pro modelování pravděpodobnosti rizikových stavů

1 Markovský řetězec

Budeme uvažovat náhodný proces s diskrétním časem (náhodnou posloupnost) $X(t),\ t \in T = \{0, 1, 2, \dots\}$ s konečnou množinou stavů $E = \{1, 2, \dots, N\}$. V případě, že $X(t) = i$, budeme říkat, že proces je v čase t ve stavu $i,\ t \in T,\ i \in E$. Stavy procesu $X(t)$ mohou popisovat různé rizikové situace a zajímá nás, s jakou pravděpodobností se v čase t sledovaný proces v jednotlivých rizikových situacích vyskytne.

Předpokládejme, že sledujeme v souvislosti s pojišťovacími operacemi zdravotní stav pojištěnců. Pro jednoduchost předpokládejme, že uvažujeme tři možné kategorie zdravotního stavu pojištěnce: 1. aktivní; 2. onemocnělý; 3. hospitalizovaný. Sledování zdravotního stavu sledujeme v diskrétních časových okamžicích, např. ve dnech. Pak tento zdravotní stav lze popsat náhodnou posloupností $X(t),\ t \in T$. Je-li v čase $t = 2$ sledovaný pojištěnec zdravotně aktivní, lze pomocí $X(t)$ tuto situaci zapsat ve tvaru $X(2) = 1$ a říkáme, že v čase $t = 2$ je proces ve stavu 1 (tj. pojištěnec je aktivní). Cílem je popsat dynamiku procesu $X(t)$, tedy popsat pravděpodobnosti stavů $p_i(t) = P(X(t) = i)$ pro $i \in E$ a $t \in T$. V obecné situaci může být dynamika procesu $X(t)$ velmi komplikovaná, mezi veličinami $X(0),\ X(1),\ X(2), \dots$ mohou být složité statistické vazby, tyto veličiny mohou být různě korelované a najít odhad základních charakteristik tohoto procesu a stanovit predikci budoucího vývoje procesu, najít pravděpodobnosti $p_i(t)$ pro velká t (zejména v situacích, kdy je k dispozici pouze jediný záznam realizace procesu) může být problém značně obtížný. Je ovšem možné klást na pravděpodobnostní strukturu procesu $X(t)$ jisté zjednodušující předpoklady, které dobře postihnou charakter některých procesů na straně jedné a na straně druhé po matematické stránce celou situaci zjednoduší. Typickým příkladem takového předpokladu je **markovská vlastnost** sledovaného procesu, která znamená, že pravděpodobnost budoucího vývoje procesu v čase $t + 1$, známe-li stav procesu v přítomném čase t, už nezávisí na minulém vývoji procesu v časech $t - 1,\ t - 2, \dots, 2, 1, 0$. Markovskou vlastnost lze formálně vyjádřit pomocí podmíněných pravděpodobností tak, že pro všechna $t = 0, 1, 2, \dots$ a všechny stavy $i, j, i_{t-1}, \dots, i_0 \in E$ platí

$$P(X_{t+1} = j | X_t = i, X_{t-1} = i_{t-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{t+1} = j | X_t = i), \tag{1}$$

pokud podmíněná pravděpodobnost vlevo existuje (tj. když $P(X_t = i,\ X_{t-1} = i_{t-1}, \dots,\ X_0 = i_0) > 0$). Splňuje-li proces $X(t)$ vlastnost (1) říkáme, že $X(t)$ je **markovský proces s diskrétním časem** nebo stručněji, že $X(t)$ je **markovský řetězec**. Pro pravděpodobnosti (1) pak zavádíme označení

$$p_{ij}(t, t+1) = P(X_{t+1} = j | X_t = i)$$

a pravděpodobnosti $p_{ij}(t, t+1)$, pokud jsou definovány, nazýváme **pravděpodobnosti přechodu ze stavu** i **v čase** t **do stavu** j **v** $t+1$. Někdy se tyto pravděpodobnosti nazývají **pravděpodobnosti přechodu 1. řádu**, protože jde o pravděpodobnost přechodu za jednu jednotku času. Dále zavádíme podmíněné pravděpodobnosti

$$p_{ij}(t, t+s) = P(X_{t+s} = j | X_t = i),$$

které definujeme pro $t, t+s \in T$ a $i, j \in E$ a pokud existují, nazýváme je **pravděpodobnosti přechodu ze stavu** i **v čase** t **do stavu** j **v čase** $t+s$. Jinak se též nazývají **pravděpodobnosti přechodu** s**-tého řádu**. V některých situacích se může stát, že pravděpodobnost přechodu $p_{ij}(t, t+s)$ nezávisí na časových okamžicích t a $t+s$, ale pouze na jejich vzdálenosti, tedy na jejich rozdílu s. Pak říkáme, že markovský řetězec $X(t)$ je

Operační program Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Název projektu: Inovace magisterského studijního programu Fakulty ekonomiky a managementu
Registrační číslo projektu: CZ.1.07/2.2.00/28.0326

PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY.

homogenní. V další části tohoto odstavce budeme uvažovat jenom homogenní markovské řetězce a zavedeme následující terminologii a označení:

$p_i(0) = P(X(0) = i)$	nazveme počáteční pravděpodobnost stavu i,
$\boldsymbol{p}(0) = (p_1(0), p_2(0), \ldots, p_N(0))$	nazveme počáteční rozdělení stavů markovského řetězce,
$p_i(t) = P(X(t) = i)$	nazveme absolutní pravděpodobnost stavu i v čase t,
$\boldsymbol{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \ldots, p_N(t))$	nazveme absolutní rozdělení stavů markovského řetězce v čase t.

Dále pro homogenní řetězec platí, že $p_{ij}(t, t+1)$ nezávisí na t a můžeme proto místo $p_{ij}(t, t+1)$ psát pouze $p_{ij}(1) = p_{ij}$. Pravděpodobnost p_{ij} nazýváme pravděpodobností přechodu homogenního řetězce po jednom kroku a matici

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1N} \\ p_{21}, p_{22}, \ldots, p_{2N} \\ \vdots \\ p_{N1}, p_{N2}, \ldots, p_{NN} \end{pmatrix}$$

nazýváme **maticí pravděpodobností přechodu homogenního markovského řetězce** stručně jenom **maticí pravděpodobností přechodu**. Pro každý řádek matice pravděpodobností přechodu $\boldsymbol{P}$ platí, že $\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1$, a protože $p_{ij} \geq 0, \;\; i, j \in E$, platí, že matice $\boldsymbol{P}$ je **stochastická matice**.

Pomocí matice pravděpodobností přechodu $\boldsymbol{P}$ a vektoru počátečních stavů $\boldsymbol{p}(0)$ lze jednoduše popsat dynamiku procesu $X(t)$ (tj. jeho konečněrozměrná rozdělení pravděpodobností). Platí

$$P(X(0) = i_0, X(1) = i_1, \ldots, X(k) = i_k) = p_{i_0}(0) p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{k-1} i_k}$$

pro libovolné stavy $i_0, i_1, \ldots, i_k \in E$. Uvedeného vztahu je možné využít k popisu pravděpodobností přechodu s-tého řádu. Pro homogenní markovský řetězec platí, že $p_{ij}(t, t+s)$ nezávisí na t, můžeme proto zavést označení

$$p_{ij}^{(s)} = p_{ij}(t, t+s) \;\text{ pro }\; s = 1, 2, \ldots \;\text{ a }\; p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j, \\ 1 & \text{pro } i = j. \end{cases}$$

Pravděpodobnosti $p_{ij}^{(s)}$ pak udávají pravděpodobnosti přechodu homogenního řetězce ze stavu i do stavu j po s krocích. Můžeme je zapsat do matice

$$\boldsymbol{P^{(s)}} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(s)}, \ldots, p_{1N}^{(s)} \\ \vdots \\ p_{N1}^{(s)}, \ldots, p_{NN}^{(s)} \end{pmatrix},$$

kterou nazýváme maticí pravděpodobností přechodu homogenního markovského řetězce po s krocích nebo též s-tého řádu. Pomocí vzorce pro celkovou pravděpodobnost a markovské vlastnosti snadno nahlédneme, že platí

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(2)} &= P(X(t+2) = j | X(t) = i) = \\ &= \sum_{k=1}^{N} P(X(t{+}2){=}j | X(t{+}1) = k, X(t) = i) \cdot P(X(t{+}1){=}k | X(t) = i) = \\ &= \sum_{k=1}^{N} P(X(t+2) = j | X(t+1) = k) P(X(t+1) = k | X(t) = i) = \sum_{k=1}^{N} p_{kj} p_{ik} \end{aligned}$$

pro $i, j \in E$. Když získaný výsledek zapíšeme v maticovém tvaru, dostaneme

$$\boldsymbol{P}^{(2)} = \boldsymbol{P}^{2}.$$

Analogicky lze odvodit, že platí

$$\boldsymbol{P}^{(s)} = \boldsymbol{P}^{s}.$$

Slovně vyjádřeno, matice pravděpodobností přechodu homogenního markovského řetězce po s krocích je rovna s-té mocnině matice pravděpodobností přechodu tohoto řetězce. Ze vzorce pro celkovou pravděpodobnost dostaneme vyjádření absolutní pravděpodobnosti stavu i v čase t ve tvaru

$$p_i(t) = P(X(t) = i) = \sum_{k=1}^{N} P(X(0) = k) P(X(t) = i | X(0) = k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} p_k(0) p_{ki}^{(t)}, \;\; i \in E.$$

Potom užitím maticového zápisu dostaneme

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(0)\boldsymbol{P}^{(t)} = \boldsymbol{p}(0)\boldsymbol{P}^{t}. \tag{2}$$

Vidíme, že absolutní pravděpodobnosti stavů homogenního markovského řetězce v čase t lze jednoduše vyjádřit pomocí počátečních pravděpodobností stavů a matice pravděpodobností přechodu. Z uvedeného vztahu lze snadno získat pravděpodobnosti rizikových stavů sledovaného procesu, když známe počáteční rozdělení stavů a matici pravděpodobností přechodu.

Z hlediska dlouhodobého sledování řetězce $X(t)$ je užitečné umět stanovit absolutní pravděpodobnosti stavů $p_i(t)$ pro velká t. Tedy pro $t \to \infty$ je potřeba stanovit $\lim_{t\to\infty} p_i(t), \; i \in E$. Vzhledem k (2) závisí tato limita na vlastnostech matice pravděpodobností přechodu $\boldsymbol{P}$. Lze ukázat, že v případě, kdy existuje přirozené číslo r tak, že r-tá mocnina matice $\boldsymbol{P}$, tedy matice $\boldsymbol{P}^r$ má v některém sloupci jenom kladné prvky, tak existují limity

$$\lim_{t\to\infty} p_{ik}^{(t)} = \pi_k,$$
$$\lim_{t\to\infty} p_k(t) = \pi_k$$

pro $i, k \in E$, přičemž limitní pravděpodobnosti $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N$ jsou jediným řešením rovnic

$$\pi_k = \sum_{j=1}^{N} \pi_j \, p_{jk}, \;\; k \in E \;\text{ a }\; \sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1. \tag{3}$$

Když položíme $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_N)$ a

$$\boldsymbol{\Pi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\pi} \\ \ldots \\ \boldsymbol{\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N \\ \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N \\ \ldots \\ \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N \end{pmatrix},$$

lze uvedené limitní vztahy zapsat maticově ve tvaru

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{P}^{(t)} = \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{P}^{t} = \boldsymbol{\Pi}$$
$$\text{a} \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{p}(t) = \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{p}(0)\boldsymbol{P}^{t} = \boldsymbol{\pi},$$

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost UNIVERZITA OBRANY
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

přičemž $\boldsymbol{\pi}$ je jediným řešením soustavy rovnic

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi P}, \quad \boldsymbol{\pi 1} = 1, \tag{4}$$

kde $\mathbf{1}$ je sloupcový vektor délky N tvořený samými jedničkami.

Vektor $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_N)$ pak definuje tzv. **stacionární rozdělení pravděpodobností** řetězce $X(t)$.

Jestliže počáteční rozdělení pravděpodobnosti je stacionární, tj. když $\boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{\pi}$, pak všechna absolutní rozdělení pravděpodobnosti $\boldsymbol{p}(t)$ jsou stacionární, tj. $\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{\pi}$ a říkáme, že řetězec je ve **statistické rovnováze**.

Příklad

Vyjdeme z předpokladů, že při pojištění motorových vozidel používá pojišťovna tří kategorizací pojistného: 0 – základní pojistné, 1 – bonus 30 % a 2 – bonus 50 %. Označme $X(t)$ náhodný proces, který značí kategorii pojistného v t-tém pojistném období. Množina stavů tohoto procesu je $E = \{0, 1, 2\}$. Pojištěnec je zařazen do příslušné kategorie podle toho, jaký počet pojistných událostí nahlásil v předchozím období. V prvním pojistném období je pojištěnec zařazen do kategorie 0 a platí základní pojištění. Jestliže v prvním pojistném období měl pojištěnec bezeškodní průběh, je v následném období zařazen o kategorii výše (získá bonus). Pokud ale uplatní jeden pojistný nárok, je v příštím období zařazen o kategorii níže, při uplatnění více než jednoho pojistného nároku je zařazen o dvě kategorie níže. Předpokládejme, že počet pojistných událostí v pojistném období t je náhodná veličina $Y_t,\ t = 1, 2 \ldots$. Potom proces $X(t)$ je definován následovně: $X(0) = 1$ a pro $t \geq 1$ platí

$$X(t+1) = \begin{cases} \min\{X(t)+1; 2\} & \text{pro } Y_t = 0, \\ \max\{X(t)-1; 0\} & \text{pro } Y_t = 1, \\ 0 & \text{pro } Y_t > 1. \end{cases}$$

Budeme předpokládat, že náhodné veličiny Y_t pro $t = 1, 2 \ldots$ jsou nezávislé a mají stejné Poissonovo rozdělení s parametrem λ. Pak $X(t)$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů $E = \{0, 1, 2\}$, počátečním rozdělením pravděpodobností $\boldsymbol{p}(0) = (1, 0, 0)$ a maticí pravděpodobností přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 - e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1 - e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{pmatrix}.$$

Protože matice $\boldsymbol{P}$ má v prvním sloupci jenom kladné prvky, existuje stacionární rozdělení $\boldsymbol{\pi} = \lim_{t \to \infty} \boldsymbol{p}(t)$ a získáme jej řešením rovnice (3). Když položíme $a_0 = e^{-\lambda}$ a $a_1 = \lambda e^{-\lambda}$, dostaneme po dosazení do (3) soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_0(1 - a_0) + \pi_1(1 - a_0) + \pi_2(1 - a_0 - a_1), \\ \pi_1 &= \pi_0 a_0 + \pi_2 a_1, \\ \pi_2 &= \pi_1 a_0 + \pi_2 a_0, \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 &= 1. \end{aligned}$$

Odtud snadno nalezneme řešení

$$\pi_0 = \frac{1 - a_0 - a_0 a_1}{1 - a_0 a_1} = \frac{1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-2\lambda}}{1 - \lambda e^{-2\lambda}},$$

$$\pi_1 = \frac{a_0(1 - a_0)}{1 - a_0 a_1} = \frac{e^{-\lambda}(1 - e^{-\lambda})}{1 - \lambda e^{-2\lambda}},$$

$$\pi_2 = \frac{a_0^2}{1 - a_0 a_1} = \frac{e^{-2\lambda}}{1 - \lambda e^{-2\lambda}}.$$

Odtud lze odvodit, že když základní výše pojištění za pojistné období je V, zaplatí pojištěnec při bonusu 30 % pro kategorii 1 a při bonusu 50 % pro kategorii 2 v dlouhodobém horizontu za pojišťovací období částku $\pi_0 V + 0{,}7\pi_1 V + 0{,}5\pi_2 V$. Uvedená částka záleží na parametru λ, který je roven střednímu počtu pojistných událostí pojištěnce. Při dlouhodobém sledování se dá odhadnout dlouhodobým průměrem počtu pojistných událostí pojištěnce za sledovaná pojistná období.

Příklady k procvičení

1. Počasí v jisté pobřežní oblasti je jednoduše klasifikováno jako „slunečno“ nebo „deštivo“. Po slunečném dni následuje opět slunečný den s pravděpodobností 0,9 a po deštivém dni přichází deštivý den s pravděpodobností 0,3.

   a) Popište popsanou situaci pomocí markovského řetězce.

   b) Jestliže v pátek bylo slunečno, jaká je pravděpodobnost, že neděle bude opět slunečná?

   c) Jestliže v pátek bylo slunečno, jaká je pravděpodobnost, že sobota i neděle bude opět slunečná?

2. Předpokládejme, že daná osoba O_1 obdrží zprávu od osoby O_0, že daný rizikový jev A pravděpodobně nastane. Zprávu předá osobě O_2, která ji dále předá osobě O_3 atd. Předpokládejme, že každá z uvažovaných osob tuto zprávu předává v nezměněné podobě s pravděpodobností $1 - \theta$ a s pravděpodobností θ předá negaci původní zprávy, $0 < \theta < 1$. (Lze si představit, že θ je „malé“ číslo, blízké nule.) Otázkou je zjistit pravděpodobnost, že t-tá osoba O_t obdrží původní zprávu, že jev A pravděpodobně nastane. modelujte situaci pomocí markovského řetězce. Určete stacionární rozdělení pravděpodobností.