

PARCIÁLNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

**JAROMÍR KUBEN
PAVLÍNA RAČKOVÁ**

Brno 2014

Verze 12. června 2014

Obsah

1	Parciální diferenciální rovnice	1
1.1	Úvod	1
1.2	Lineární parciální diferenciální rovnice 2. řádu	2
1.3	Klasifikace lineárních PDR	3
1.4	LPDR druhého řádu důležité v aplikacích	7
1.5	Vlnová rovnice	10
1.5.1	Struna nekonečné délky (d'Alembertova metoda řešení)	10
1.5.2	Struna konečné délky (Fourierova metoda řešení)	13
1.6	Rovnice vedení tepla	17
	Literatura	19

Kapitola 1

Parciální diferenciální rovnice

1.1 Úvod

Parciální diferenciální rovnice je rovnice, v níž je neznámým objektem funkce dvou nebo více proměnných, přičemž tato neznámá funkce se zde vyskytuje včetně (některých) parciálních derivací.

Řád parciální diferenciální rovnice je nejvyšší derivace neznámé funkce, která se v rovnici vyskytuje.

Řešení parciální diferenciální rovnice je funkce, která má na jisté množině Ω potřebné derivace a splňuje danou rovnici.

Příklady parciálních diferenciálních rovnic

1) Parciální diferenciální rovnice 1. řádu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \text{kde } u = u(x, y).$$

Stručný zápis: $u_x + u_y = 1$.

Řešením jsou např. funkce:

$$1. \ u(x, y) = x + 3, (x, y) \in R^2 = \Omega,$$

$$2. \ u(x, y) = 2x - y + 7, (x, y) \in R^2 = \Omega.$$

2) Parciální diferenciální rovnice 2. řádu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \text{kde } u = u(x, y).$$

Stručný zápis: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, resp. $\Delta u = 0$.

Tato rovnice se nazývá *Laplaceova parciální diferenciální rovnice*. Symbol Δ se nazývá *laplacián* nebo *Laplaceův operátor*.

Řešením jsou např. funkce:

$$1. \ u(x, y) = Ax + By + C, \text{ kde } A, B, C \in R, (x, y) \in R^2 = \Omega,$$

$$2. \ u(x, y) = xy, (x, y) \in R^2 = \Omega,$$

$$3. \ u(x, y) = x^2 - y^2, (x, y) \in R^2 = \Omega,$$

$$4. u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} = \Omega.$$

3) Parciální diferenciální rovnice 2. řádu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \text{kde } u = u(x, y).$$

Stručný zápis: $u_{xy} = 0$.

Řešením jsou např. funkce:

1. $u(x, y) = f(x) + g(y)$, kde f a g jsou libovolné funkce takové, že existuje f' a g' , např.:

2. $u = \sin x + e^y$,

3. $u = \lg x + \ln y$.

4) Parciální diferenciální rovnice 2. řádu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad \text{kde } u = u(x, y, z).$$

Stručný zápis: $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$, resp. $\Delta u = 0$.

Jde o Laplaceovu parciální diferenciální rovnici v $\mathbb{R}^3$.

Řešením jsou např. funkce:

1. $u(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$, $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 = \Omega$,

2. $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} = \Omega$.

1.2 Lineární parciální diferenciální rovnice 2. řádu

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$\boxed{A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u = G(x, y),} \quad (1.1)$$

splňujícími podmínku $|A| + |B| + |C| > 0$, $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ (tedy vždy aspoň jeden z koeficientů figurujících u druhých derivací je nenulový). Takové rovnice se nazývají *lineární parciální diferenciální rovnice 2. řádu*, stručně LPDR 2. řádu.

Přitom:

- 1) x, y jsou nezávisle proměnné,
- 2) $u = u(x, y)$ je hledaná funkce proměnných x, y ,
- 3) u_x, u_y jsou parciální derivace prvního řádu funkce $u = u(x, y)$,
- 4) u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} jsou parciální derivace druhého řádu funkce $u = u(x, y)$, přičemž předpokládáme, že $u_{xy} = u_{yx}$,
- 5) A, B, C, D, E, F, G jsou zadané funkce proměnných x, y .

Jestliže je $G \equiv 0$, jedná se o *homogenní* LPDR 2. řádu. V případě, že $G \neq 0$, hovoříme o *nehomogenní* LPDR 2. řádu. Graf funkce $u = u(x, y)$, která je řešením LPDR, si lze představit jako plochu v prostoru.

Stručně lze rovnici zapsat

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G(x, y),$$

resp.

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = H(x, y, u, u_x, u_y),$$

kde $H(x, y, u, u_x, u_y) = G(x, y) - Du_x - Eu_y - Fu$. Poznamenejme, že koeficient u smíšené derivace u_{xy} píšeme ve tvaru $2B$ z formálních důvodů, zjednoduší se tím totiž některé zápisy (zejména když se použijí k označení matice).

Jak uvidíme dále, mezi tyto rovnice patří řada rovnic, které mají významné aplikace ve fyzice a mnoha technických oborech. Díky tomu patří k základním nástrojům matematického modelování.

1.3 Klasifikace lineárních PDR

Naším cílem bude změnit souřadnicový systém tak, aby se zjednodušil tvar rovnice (1.1), a to tak, aby koeficienty u některých druhých parciálních derivací byly rovny nule.

Označení:

- Staré souřadnice: x, y
- Nové souřadnice: ξ, η .

Vazba mezi novými a starými souřadnicemi je dána vztahy $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, kde φ a ψ jsou vhodné funkce. Transformace mezi starými a novými souřadnicemi musí být prostá na Ω a musí platit

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

- $u = u(x, y)$ je neznámá funkce ve starých souřadnicích.
- $U = U(\xi, \eta)$ je neznámá funkce v nových souřadnicích. Vazba mezi nimi je dána vztahem $u(x, y) = U(\xi, \eta) = U[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$.

Po zderivování a dosazení dostaneme:

$$\tilde{A}U_{\xi\xi} + 2\tilde{B}U_{\xi\eta} + \tilde{C}U_{\eta\eta} = \tilde{H}(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta),$$

kde $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ a $\tilde{H}$ jsou funkce proměnných ξ a η , které jsou dány funkcemi A , B , C a H .

Lze ukázat, že vhodnou transformací lze vždy dosáhnout právě jedné ze tří možností:

- | |
|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\tilde{A} = 0 = \tilde{C} \Rightarrow U_{\xi\eta} = \tilde{H}(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$ – rovnice <i>hyperbolického</i> typu
 $U_{\xi\eta} = \tilde{H}$ je <i>kanonický tvar LPDR hyperbolického</i> typu. 2. $\tilde{A} = 0 = \tilde{B} \Rightarrow U_{\eta\eta} = \tilde{H}(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$
 nebo
 $\tilde{B} = 0 = \tilde{C} \Rightarrow U_{\xi\xi} = \tilde{H}(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$
 $U_{\eta\eta} = \tilde{H}$ resp. $U_{\xi\xi} = \tilde{H}$ je <i>kanonický tvar LPDR parabolického</i> typu. 3. $\tilde{B} = 0$ a $\tilde{A} = \tilde{C} \Rightarrow U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = \tilde{H}(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$ – rovnice <i>eliptického</i> typu
 $U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = \tilde{H}$ je <i>kanonický tvar LPDR eliptického</i> typu. |
|---|

Určení typu LDPR a nalezení transformace

K rovnici (1.1) přiřadíme tzv. *charakteristickou rovnici*

$$A(\dot{y})^2 - 2B\dot{x}\dot{y} + C(\dot{x})^2 = 0. \quad (1.2)$$

Pozor, znaménko u koeficientu $2B$ se mění!

Označení: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$.

Řešením je dvojice funkcí $(x(t), y(t))$, kterou interpretujeme jako křivku v R^2 . Tato křivka se nazývá *charakteristika* LPDR.

Předpokládejme, že charakteristika je grafem funkce proměnné x , tedy $y = y(x)$. Pak platí:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y} dt}{\dot{x} dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Pro $A \neq 0$ z rovnice (1.2) po úpravě vyjde

$$A\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2 - 2B\frac{\dot{y}}{\dot{x}} + C = 0,$$

tudíž

$$A(y')^2 - 2By' + C = 0. \quad (1.3)$$

Rovnice (1.3) je kvadratická a diferenciální, její řešení je ve tvaru

$$y'_{1,2} = \frac{2B \pm \sqrt{4B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \quad (1.4)$$

Lze ukázat, že výše uvedené tři typy odpovídají znaménku diskriminantu $B^2 - AC$.

1. *Hyperboloický typ* nastane, právě když $B^2 - AC > 0$.

V tomto případě dostaneme z (1.4) dvě obyčejné diferenciální rovnice $y'_1 = \dots$ a $y'_2 = \dots$.

Předpokládejme, že jejich řešení dostaneme v implicitním tvaru $\varphi(x, y) = c_1$, $\psi(x, y) = c_2$, kde c_1, c_2 jsou integrační konstanty.

Pak nové proměnné volíme takto: $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$.

2. *Parabolický typ* nastane, právě když $B^2 - AC = 0$.

V tomto případě získáme z (1.4) jednu obyčejnou diferenciální rovnici $y' = \dots$. Předpokládejme, že její řešení dostaneme v implicitním tvaru $\varphi(x, y) = c$, kde c je integrační konstanta.

Pak nové proměnné volíme takto: $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, kde funkci ψ lze zvolit libovolně tak, aby

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Obvykle lze volit $\eta = y$.

3. *Eliptický typ* nastane, právě když $B^2 - AC < 0$.

V tomto případě získáme z (1.4) dvě obyčejné diferenciální rovnice $y' = \dots$, kde pravé strany obsahují komplexní jednotku i a jsou komplexně sdružené. (Takovými rovnicemi jsme se při studiu obyčejných diferenciálních rovnic nezabývali.) V jednoduchých případech je lze formálně řešit např. separací proměnných. Dostaneme dvojici řešení v implicitním tvaru $\varphi(x, y) \pm i\psi(x, y) = c$, kde c je integrační konstanta

Pak nové proměnné volíme takto: $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$.

Výraz $B^2 - AC$ je obecně funkcí dvou proměnných x a y , takže jeho znaménko se v množině Ω může měnit. Tedy konkrétní LPDR rovnice může být v některých bodech eliptická, v jiných parabolická atd. O takové LPDR 2. řádu říkáme, že je *smíšeného typu*. Pro každou část množiny Ω , kde je rovnice stejného typu, se musí najít transformace samostatně.

Poznámka 1.1 V předchozím textu jsme předpokládali, že charakteristika je grafem funkce proměnné x , tedy $y = y(x)$. Obdobně lze postupovat, když je grafem funkce proměnné y , tedy $x = x(y)$. Pak pro $C \neq 0$ je $A - 2Bx' + C(x')^2 = 0$, kde $x' = \frac{dx}{dy} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}$. Další postup je zcela stejný.

Pokud $A = 0 = C$, je rovnice přímo v kanonickém tvaru (hyperbolický typ) a není ji třeba transformovat.

Příklad 1.2 Určete typ následující LPDR a převedte ji na kanonický tvar:

$$u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_x = 0. \quad (1.5)$$

Řešení. Napíšeme charakteristickou rovnici:

$$(y')^2 + 2y' - 3 = 0.$$

Její řešení dostaneme:

$$y'_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow y'_1 = -3 \text{ a } y'_2 = 1 \Rightarrow \text{rovnice je hyperbolického typu.}$$

$$y' = -3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -3 \Rightarrow \int dy = \int -3dx \Rightarrow y = -3x + c_1 \Rightarrow c_1 = 3x + y,$$

$$y' = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \int dy = \int dx \Rightarrow y = x + c_2 \Rightarrow c_2 = y - x.$$

Zavedeme nové souřadnice:

$$\xi = 3x + y, \quad \eta = y - x, \\ u(x, y) = U(\xi, \eta) = U[3x + y, y - x].$$

Vypočteme parciální derivace. Přitom použijeme pravidla pro derivaci složené funkce.

$$\begin{aligned} u_x &= U_\xi \cdot \xi_x + U_\eta \cdot \eta_x, & \Rightarrow & & u_x &= U_\xi \cdot 3 + U_\eta \cdot (-1), \\ u_y &= U_\xi \cdot \xi_y + U_\eta \cdot \eta_y, & & & u_y &= U_\xi \cdot 1 + U_\eta \cdot 1. \end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned} u_{xx} &= U_{\xi\xi} \cdot (\xi_x)^2 + 2U_{\xi\eta} \cdot \xi_x \eta_x + U_{\eta\eta} \cdot (\eta_x)^2 + U_\xi \cdot \xi_{xx} + U_\eta \cdot \eta_{xx}, \\ u_{yy} &= U_{\xi\xi} \cdot (\xi_y)^2 + 2U_{\xi\eta} \cdot \xi_y \eta_y + U_{\eta\eta} \cdot (\eta_y)^2 + U_\xi \cdot \xi_{yy} + U_\eta \cdot \eta_{yy}, \\ u_{xy} &= U_{\xi\xi} \cdot \xi_x \xi_y + U_{\xi\eta} \cdot \xi_x \eta_y + U_{\eta\xi} \cdot \xi_y \eta_x + U_{\eta\eta} \cdot \eta_x \eta_y + U_\xi \cdot \xi_{xy} + U_\eta \cdot \eta_{xy}, \end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned} u_{xx} &= U_{\xi\xi} \cdot 9 - 6U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta} + U_\xi \cdot 0 + U_\eta \cdot 0, \\ u_{yy} &= U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta} + U_\xi \cdot 0 + U_\eta \cdot 0, \\ u_{xy} &= 3U_{\xi\xi} + 3U_{\xi\eta} - U_{\eta\xi} - U_{\eta\eta} + U_\xi \cdot 0 + U_\eta \cdot 0. \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice (1.5):

$$9U_{\xi\xi} - 6U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta} - 6U_{\xi\xi} - 4U_{\xi\eta} + 2U_{\eta\eta} - 3U_{\xi\xi} - 6U_{\xi\eta} - 3U_{\eta\eta} + 3U_{\eta\eta} - U_{\eta} = 0$$

$$-16U_{\xi\eta} + 3U_{\xi} - U_{\eta} = 0$$

$$U_{\xi\eta} = \frac{3}{16}U_{\xi} - \frac{1}{16}U_{\eta}$$

▲

Příklad 1.3 Určete typ následující LPDR a převedte ji na kanonický tvar:

$$x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + 2xu_x = 0. \quad (1.6)$$

Řešení. Napíšeme charakteristickou rovnici:

$$x^2 \cdot (y')^2 + 2xy \cdot y' + y^2 = 0.$$

Její řešení dostaneme:

$$y'_{1,2} = \frac{-2xy \pm 0}{2x^2} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \text{rovnice je parabolického typu}$$

$$y' = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |y| = -\ln |x| + \ln |c| \Rightarrow c = xy.$$

Zavedeme nové souřadnice:

$$\xi = xy, \eta = y,$$

$$u(x, y) = U(\xi, \eta) = U[xy, y].$$

Druhou rovnost, $\eta = y$ volíme; je třeba provést kontrolu, že jakobián je nenulový.

Vypočteme parciální derivace. Použijeme pravidla pro derivaci složené funkce — viz příklad 1.2.

$$\begin{aligned} u_x &= yU_{\xi}, & u_{xx} &= y^2 U_{\xi\xi}, \\ u_y &= xU_{\xi} + U_{\eta}, & u_{yy} &= x^2 U_{\xi\xi} + 2xU_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \\ & & u_{xy} &= xyU_{\xi\xi} + yU_{\xi\eta} + U_{\xi}. \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice (1.6):

$$x^2 y^2 U_{\xi\xi} - 2x^2 y^2 U_{\xi\xi} - 2xy^2 U_{\xi\eta} - 2xyU_{\xi} + x^2 y^2 U_{\xi\xi} + 2xy^2 U_{\xi\eta} + y^2 U_{\eta\eta} + 2xyU_{\xi} = 0$$

$$y^2 U_{\eta\eta} = 0$$

$$U_{\eta\eta} = 0$$

Tuto rovnici snadno vyřešíme, stačí dvakrát integrovat podle proměnné η (proměnná ξ se chová jako konstanta):

$$U_{\eta} = \int 0 d\eta = K(\xi) \Rightarrow U = \int K(\xi) d\eta = K(\xi)\eta + L(\xi),$$

kde $K(\xi)$ a $L(\xi)$ jsou libovolné funkce mající spojité druhé derivace.

Dosazením za ξ a η dostaneme obecné řešení zadané rovnice:

$$u(x, y) = K(xy)y + L(xy).$$

Tedy obecné řešení závisí na dvou funkcích, které můžeme libovolně volit.

▲

Příklad 1.4 Určete typ následující LPDR a převedte ji na kanonický tvar:

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} = 0. \quad (1.7)$$

Řešení. Napíšeme charakteristickou rovnici:

$$(y')^2 - 2y' + 5 = 0.$$

Její řešením dostaneme:

$$\begin{aligned} y'_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = 1 \pm 2i \Rightarrow \text{rovnice je eliptického typu} \\ y' &= 1 \pm 2i \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \pm 2i \Rightarrow \int dy = \int (1 \pm 2i) dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = (1 \pm 2i)x + c \Rightarrow c = y - x \pm 2ix. \end{aligned}$$

Zavedeme nové souřadnice:

$$\begin{aligned} \xi &= y - x, \eta = 2x, \\ u(x, y) &= U(\xi, \eta) = U[y - x, 2x]. \end{aligned}$$

Vypočteme parciální derivace. Použijeme pravidla pro derivaci složené funkce — viz příklad 1.2.

$$\begin{aligned} u_x &= -U_\xi + 2U_\eta, & u_{xx} &= U_{\xi\xi} - 4U_{\xi\eta} + 4U_{\eta\eta}, \\ u_y &= U_\xi, & u_{yy} &= U_{\xi\xi}, \\ & & u_{xy} &= -U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta}. \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice (1.7):

$$\begin{aligned} U_{\xi\xi} - 4U_{\xi\eta} + 4U_{\eta\eta} - 2U_{\xi\xi} + 4U_{\xi\eta} + 5U_{\xi\xi} &= 0 \\ 4U_{\xi\xi} + 4U_{\eta\eta} &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = 0}$$

▲

1.4 LPDR druhého řádu důležité v aplikacích

Velká část matematických modelů vychází ze zákonů a principů, které vyjadřují rovnováhu mezi stavovými a tokovými veličinami a jejich prostorovými a časovými změnami. Říká se jim *bilanční zákony*. Základní bilanční zákon říká, že změna celkového množství veličiny u obsažené v oblasti Ω_B mezi časy t_1 a t_2 se musí rovnat celkovému množství veličiny, která proteče přes hranici $\partial\Omega_B$ během časového intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ a přírůstku nebo úbytku veličiny u vyprodukované zdroji nebo pohlcené norami uvnitř Ω_B během tohoto časového intervalu. Vztahy mezi stavovými veličinami a odpovídajícími tokovými veličinami závisí na vlastnostech konkrétního prostředí nebo materiálu. Obvykle je nazýváme *konstitutivní zákony* nebo *materiálové vztahy*.

Vedení tepla v jedné dimenzi

Uvažujme jednorozměrnou tyč s konstantní hustotou ρ a konstantní měrnou tepelnou kapacitou c . Označíme-li teplotu v bodě x a čase t funkcí $u = u(x, t)$, pak veličina $\rho c u(x, t)$ představuje hustotu tepelné energie. V tomto případě zákon zachování vyjadřuje rovnováhu mezi vnitřní energií $\rho c u$ a tepelným tokem ϕ :

$$\rho c u_t(x, t) + \phi_x(x, t) = 0 \quad (1.8)$$

Vztahem, který svazuje tok ϕ a teplotu u , zde bude Fourierův tepelný zákon, který říká, že tok je přímo úměrný gradientu teploty se zápornou konstantou úměrnosti, tedy

$$\phi = -K u_x.$$

Konstanta K představuje součinitel tepelné vodivosti. Fourierův zákon je obdobou Fickova zákona: teplo proudí z teplejších oblastí do chladnějších. Dosadíme-li výše uvedené vztahy do základního zákona zachování (1.8), dostáváme

$$u_t - k u_{xx} = 0, \quad k = \frac{K}{\rho c}$$

což je *difuzní rovnice* v jedné dimenzi.

Obdobné rovnice v rovinném a prostorovém případě mají tvar

$$\begin{aligned} u_t &= k(u_{xx} + u_{yy}), \\ u_t &= k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}). \end{aligned}$$

Popisují šíření tepla (nebo jiný difuzní proces) v rovinné desce nebo tělese v prostoru. Stručně je lze zapsat ve tvaru $u_t = k \Delta u$, kde Δ je Laplaceův operátor.

Kmitání struny a vlnová rovnice

Další základní parciální diferenciální rovnice, tzv. vlnová rovnice, popisuje jeden z nejčastějších jevů v přírodě: vlnění (např. elektromagnetické vlnění, vlny na vodní hladině nebo akustické vlny).

Uvažujme pružnou strunu délky l a předpokládejme, že dochází pouze k malým kmitům ve vertikálním směru. Výchylku v bodě x a čase t popíšeme spojitě diferencovatelnou funkcí $u(x, t)$. Vlastnosti struny jsou popsány spojitými funkcemi $\rho(x, t)$ a $T(x, t)$, které představují hustotu a vnitřní napětí struny v bodě x a čase t . Předpokládáme, že napětí $T(x, t)$ má vždy směr tečny k profilu struny v bodě x . Uvažujme libovolný, avšak pevný úsek mezi body $x = a$ a $x = b$. K odvození rovnice popisující pohyb struny použijeme tentokrát Newtonův pohybový zákon, který říká, že změna hybnosti v daném úseku je rovna působící síle. Budeme předpokládat, že jedinou silou, která na úsek struny působí, je napětí vyvolané okolními částmi struny. Po úpravách dojdeme k základní rovnici matematického modelování popisující kmitání struny v jedné dimenzi

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad a^2 = \frac{T}{\rho}. \quad (1.9)$$

Rovnice (1.9) se nazývá *vlnová rovnice* a konstanta $a > 0$ vystihuje rychlost šíření vlny.

Obdobné rovnice v rovinném a prostorovém případě mají tvar

$$\begin{aligned}u_{tt} &= a^2(u_{xx} + u_{yy}), \\u_{tt} &= a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}).\end{aligned}$$

Popisují např. kmitání rovinné desky nebo tělesa v prostoru. Stručně je lze zapsat ve tvaru $u_{tt} = a^2 \Delta u$, kde Δ je Laplaceův operátor.

Laplaceova a Poissonova rovnice — stacionární případ

Při vyšetřování předchozích případů nás nyní bude zajímat pouze chování v tzv. *rovnovážném (ustáleném) stavu*, tedy ve stavu, kdy řešení nezávisí na čase ($u_t = u_{tt} = 0$). Vlnová i difuzní rovnice pak v libovolné dimenzi přejde na *Laplaceovu rovnici*

$$\Delta u = 0,$$

kteřá má ve dvou dimenzích tvar $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Řešením Laplaceovy rovnice jsou tzv. harmonické funkce. V jednorozměrném případě si lze představit podélně izolovanou tenkou tyč, u které dochází k výměně tepla s okolím pouze přes její konce. Funkce $u = u(x)$ popisující teplotu v tyči pak závisí pouze na proměnné x . Laplaceova rovnice se zredukuje na tvar $u_{xx} = 0$.

Obdobná rovnice v prostoru má tvar

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

Rovnovážný stav můžeme zkoumat i v případě, že jsou v modelu přítomny časově nezávislé zdroje. Vlnová i difuzní rovnice pak pro $u_t = u_{tt} = 0$ (stacionární případ) přejde na tvar

$$\Delta u = f,$$

což je tzv. *Poissonova rovnice*.

Je-li F potenciálové pole (na přímce, v rovině nebo v prostoru), pak jeho potenciál U vyhovuje Laplaceově resp. Poissonově rovnici.

Okrajové a počáteční podmínky

Stejně jako u obyčejných diferenciálních rovnic platí, že samotná parciální diferenciální rovnice neposkytuje dostatečnou informaci k tomu, abychom její řešení byli schopni určit jednoznačně. K jednoznačnému určení řešení je třeba mít k dispozici ještě další informace. U stacionárních rovnic to bývají nejčastěji tzv. *okrajové podmínky*, které spolu s rovnicí tvoří tzv. *okrajovou úlohu*. Např.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u(x, y) = \varphi(x, y) \text{ pro } (x, y) \in \partial\Omega$$

tvoří tzv. *Dirichletovu okrajovou úlohu pro Laplaceovu rovnici*. (Symbol $\partial\Omega$ značí hranici množiny Ω .)

U nestacionárních rovnic máme obvykle k dispozici kromě okrajových podmínek ještě tzv. *počáteční podmínky*, které spolu s rovnicí a okrajovými podmínkami tvoří tzv. *počátečně-okrajovou úlohu*. Např.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \quad t > 0, x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \langle 0, 1 \rangle, \end{aligned}$$

tvoří tzv. počátečně-okrajovou úlohu pro vlnovou rovnici. Okrajové podmínky jsou zde homogenní Dirichletovy. Funkce φ značí počáteční výchylku a ψ počáteční rychlost struny v daném bodě x . Derivace u_t se v čase $t = 0$ chápe jako derivace zprava.

1.5 Vlnová rovnice

Uvažujme strunu umístěnou do osy x a předpokládejme, že dochází pouze k malým kmitům ve vertikálním směru. Pak vlastní kmity struny jsou dány rovnicí

$$\boxed{u_{tt} = a^2 u_{xx}}, \quad (1.10)$$

kde x je délková souřadnice, $t \geq 0$ je čas, $u(x, t)$ je výchylka v bodě x v čase t , $a^2 = \frac{T}{\rho} > 0$ je konstanta vystihující rychlost šíření vlny (T je napětí struny, ρ je lineární hustota).

1.5.1 Struna nekonečné délky (d'Alembertova metoda řešení)

V dalším budeme předpokládat, že máme „nekonečně dlouhou“ strunu, tj. $x \in \mathbb{R}$ a $t \geq 0$. Pokusíme se najít obecné řešení této vlnové rovnice.

K rovnici (1.10) napíšeme charakteristickou rovnici

$$(x')^2 - a^2 = 0,$$

kde $x = x(t)$ (oproti předchozí kapitole, kde nezávisle proměnné byly označeny x a y , teď používáme t a x).

Její řešení dostaneme:

$$\begin{aligned} x'_{1,2} &= \pm a \Rightarrow \text{rovnice je hyperbolického typu} \\ \Rightarrow x' &= a, \quad x' = -a \Rightarrow x = at + c_1, \quad x = -at + c_2 \Rightarrow c_1 = x - at, \quad c_2 = x + at. \end{aligned}$$

Nové souřadnice jsou:

$$\begin{aligned} \xi &= x - at, \quad \eta = x + at, \\ u(x, t) &= U(\xi, \eta) = U[x - at, x + at]. \end{aligned}$$

Vypočteme parciální derivace:

$$\begin{aligned} u_x &= U_\xi + U_\eta, & u_{xx} &= U_{\xi\xi} + 2U_\xi U_\eta + U_{\eta\eta}, \\ u_t &= -aU_\xi + aU_\eta, & u_{tt} &= a^2 U_{\xi\xi} - 2a^2 U_{\xi\eta} + a^2 U_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Dosadíme do původní rovnice a upravíme:

$$\begin{aligned} a^2 U_{\xi\xi} - 2a^2 U_{\xi\eta} + a^2 U_{\eta\eta} - a^2 U_{\xi\xi} - 2a^2 U_{\xi\eta} - a^2 U_{\eta\eta} &= 0 \\ -4a^2 U_{\xi\eta} &= 0 \end{aligned}$$

Rovnice (1.10) přejde na rovnici

$$U_{\xi\eta} = 0. \quad (1.11)$$

Rovnici (1.11) lze snadno integrovat

$$\begin{aligned} U_{\xi} &= \int 0 \, d\eta = \tilde{K}(\xi), \\ U(\xi, \eta) &= \int \tilde{K}(\xi) \, d\xi = K(\xi) + L(\eta), \quad \text{kde } K' = \tilde{K}. \end{aligned}$$

Obecné řešení rovnice (1.6) má tudíž tvar $U(\xi, \eta) = K(\xi) + L(\eta)$, kde K a L jsou libovolné funkce mající spojité druhé derivace. Pak vztah

$$u(x, t) = U[x - at, x + at] = K(x - at) + L(x + at) \quad (1.12)$$

je obecným řešením rovnice (1.10).

Aby řešení rovnice (1.12) bylo určeno jednoznačně, budeme předpokládat, že jsou navíc splněny počáteční podmínky

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x) \dots \text{počáteční výchylka (počáteční tvar struny),} \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \dots \text{počáteční okamžitá rychlost,} \end{aligned}$$

kde φ a ψ jsou dané funkce.

Najdeme konkrétní tvar funkcí K a L ze vztahu (1.12), aby byly splněny počáteční podmínky. Pro $t = 0$ musí platit

$$u(x, 0) = K(x) + L(x) = \varphi(x), \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= -aK'(x - at) + aL'(x + at), \\ u_t(x, 0) &= -aK'(x) + aL'(x) = \psi(x). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Rovnici (1.14) integrujeme na intervalu $\langle x_0, x \rangle$ nebo $\langle x, x_0 \rangle$, kde x_0 je pomocný pevně zvolený bod.

$$\begin{aligned} -a(K(x) - K(x_0)) + a(L(x) - L(x_0)) &= \int_{x_0}^x \psi(s) \, ds, \\ -K(x) + L(x) &= \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(s) \, ds + c, \quad \text{kde } c = L(x_0) - K(x_0). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Sečtením (1.13) a (1.15) dostaneme:

$$2L(x) = \varphi(x) + \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(s) \, ds + c \quad \Rightarrow \quad L(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(s) \, ds + \frac{c}{2}.$$

Odečtením (1.13) a (1.15) dostaneme:

$$2K(x) = \varphi(x) - \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(s) ds - c \quad \Rightarrow \quad K(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(s) ds - \frac{c}{2}.$$

Řešení počáteční úlohy je pak ve tvaru:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= K(x - at) + L(x + at) = \\ &= \frac{1}{2} \varphi(x - at) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x-at} \psi(s) ds - \frac{c}{2} + \frac{1}{2} \varphi(x + at) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at} \psi(s) ds + \frac{c}{2}, \end{aligned}$$

tedy

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds.$$

Tento tvar řešení odvodil v roce 1746 d'Alembert. První dva členy vystihují vliv počáteční výchylky: počáteční vlna se rozdělí na dvě části, z nichž jedna postupuje ve směru kladné poloosy x rychlostí a a druhá ve směru záporné poloosy x rychlostí a . Integrál vyjadřuje vliv počáteční rychlosti.

Označíme-li $\Psi(s)$ primitivní funkci k $\psi(s)$, bude mít předchozí vzorec tvar

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} [\Psi(x + at) - \Psi(x - at)].$$

Příklad 1.5 Najděte d'Alembertovo řešení rovnice $u_{tt} = 9u_{xx}$ s počátečními podmínkami $\varphi(x) = e^{-x^2}$ a $\psi(x) = \cos x$.

Řešení. Ze zadání je vidět, že $a = 3$. Dosazením do rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [e^{-(x-3t)^2} + e^{-(x+3t)^2}] + \frac{1}{6} \int_{x-3t}^{x+3t} \cos s ds = \\ &= \frac{1}{2} [e^{-(x-3t)^2} + e^{-(x+3t)^2}] + \frac{1}{6} [\sin(x + 3t) - \sin(x - 3t)] = \\ &= \frac{1}{2} [e^{-(x-3t)^2} + e^{-(x+3t)^2}] + \frac{1}{3} \cos x \sin 3t. \end{aligned}$$

V závěrečné úpravě jsme použili vzorec $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$.



1.5.2 Struna konečné délky (Fourierova metoda řešení)

Uvažujme strunu konečné délky $l > 0$. Umístíme ji na osu x tak, že levý konec bude v počátku.

Kmity struny lze opět popsat vlnovou rovnicí

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

s počátečními podmínkami

$$u(x, 0) = \varphi(x) \dots \text{počáteční výchylka (počáteční tvar struny), } x \in \langle 0, l \rangle,$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) \dots \text{počáteční okamžitá rychlost, } x \in \langle 0, l \rangle,$$

a okrajovými podmínkami

$$u(0, t) = \alpha(t), t \geq 0,$$

$$u(l, t) = \beta(t),$$

kde φ, ψ, α a β jsou dané funkce.

Budeme předpokládat, že v krajních bodech $x = 0$ a $x = l$ platí tzv. podmínky kompatibility

$$\varphi(0) = \alpha(0), \quad \varphi(l) = \beta(0),$$

$$\psi(0) = \alpha'(0), \quad \psi(l) = \beta'(0).$$

My se omezíme na případ struny s pevnými konci, tedy

$$\alpha(t) \equiv 0, \quad \beta(t) \equiv 0.$$

Poznámka 1.6 Při řešení využijeme princip superpozice.

1. Jsou-li $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ řešení rovnice (1.10). Pak také $u_1(x, t) + u_2(x, t)$ je řešením rovnice (1.10). Tedy součet dvou řešení je zase řešení.

Jsou-li totiž u_1 a u_2 řešení, pak platí

$$(u_1 + u_2)_{tt} = a^2(u_1 + u_2)_{xx},$$

protože $(u_1 + u_2)_{tt} = u_{1|tt} + u_{2|tt}$ a podobně $(u_1 + u_2)_{xx} = u_{1|xx} + u_{2|xx}$.

2. Je-li $u(x, t)$ řešení rovnice (1.10) a $\alpha \in R$, pak $\alpha u(t, x)$ je také řešení rovnice (1.10). Tedy násobek řešení konstantou je zase řešení.

Je-li totiž u řešení, pak

$$(\alpha u)_{tt} = a^2(\alpha u)_{xx},$$

protože $(\alpha u)_{tt} = \alpha u_{tt}$ a podobně $(\alpha u)_{xx} = \alpha u_{xx}$.

3. Pokud $u_1(x, t)$ a $u_2(x, t)$ splňují nulové okrajové podmínky, pak také $u_1(x, t) + u_2(x, t)$, resp. αu je splňují také.

Celkově: Nechť $u_1(x, t), \dots, u_n(x, t)$ jsou řešení rovnice $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \in \langle 0, l \rangle$, $t \geq 0$, které splňují nulové okrajové podmínky $u_i(0, t) = u_i(l, t) = 0$, $i = 1, \dots, n$, a $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ jsou libovolné konstanty. Pak také lineární kombinace

$$\alpha_1 u_1(x, t) + \dots + \alpha_n u_n(x, t)$$

je řešením této úlohy splňující nulové okrajové podmínky. Obecně ale nejsou splněny počáteční podmínky.

Princip Fourierovy metody

1. Najdeme jakási speciální řešení rovnice vlnové rovnice splňující okrajové podmínky (ale obecně ne počáteční podmínky). Takových řešení bude celá nekonečná posloupnost $\{u_n\}$.
2. Pokusíme se najít konstanty $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ tak, aby lineární kombinace $\alpha_1 u_1(x, t) + \alpha_2 u_2(x, t) + \dots$ splnila nejen okrajové, ale i počáteční podmínky.

(Půjde o nekonečné řady – budeme proto předpokládat, že konvergují, lze je derivovat člen po členu atd.)

1. Hledáme řešení ve tvaru

$$u(x, t) = T(t) \cdot X(x), \quad (1.16)$$

kde $X(x)$ a $T(t)$ jsou reálné funkce jedné reálné proměnné, jejichž druhé derivace existují a jsou spojité. Navíc tyto funkce splňují okrajové podmínky $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$.

Úloha má vždy triviální řešení $u \equiv 0$. My hledáme netriviální řešení!

Derivací (1.16) obdržíme:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= T''(t) \cdot X(x), \\ u_{xx} &= T(t) \cdot X''(x). \end{aligned}$$

Dosazením do vlnové rovnice dostaneme:

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Protože levá strana závisí jen na t a pravá jen na x , je to možné pouze v případě, že obě strany jsou konstantní. Označme tuto konstantu $-\lambda$. Tedy musí platit

$$\begin{aligned} \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} &= -\lambda = \frac{X''(x)}{X(x)} \\ \Rightarrow X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \quad T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy pro $T(t)$ a $X(x)$ obyčejné lineární diferenciální rovnice 2. řádu. Z okrajových podmínek vyjde

$$\begin{aligned} T(t) \cdot X(0) &= 0, \\ T(t) \cdot X(l) &= 0 \Rightarrow X(0) = 0 = X(l). \end{aligned}$$

(Kdyby $X(0) \neq 0$ nebo $X(l) \neq 0$, muselo by být $T(t) \equiv 0$ a dostali bychom triviální řešení.)

Nejprve budeme řešit tzv. okrajovou úlohu

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, \\ X(0) &= 0 = X(l). \end{aligned}$$

Tvar řešení bude záviset na parametru λ . Tato úloha se nazývá *Sturmův-Liouvilleův problém*.

- i) Je-li $\lambda < 0$, pak charakteristická rovnice je

$$\mu^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \mu = \pm \sqrt{-\lambda}$$

a k ní příslušející obecné řešení je

$$X = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Z okrajových podmínek

$$X(0) = c_1 + c_2 = 0,$$

$$X(l) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0$$

dostaneme $c_1(e^{\sqrt{-\lambda}l} - e^{-\sqrt{-\lambda}l}) = 0$, protože $\sqrt{-\lambda}l \neq -\sqrt{-\lambda}l$ pro $\lambda < 0$ a exponenciála je rostoucí funkce.

Tedy $c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow$ výsledkem je jen triviální řešení.

ii) Je-li $\lambda = 0$, pak $X'' = 0$ a charakteristická rovnice je

$$\mu^2 = 0$$

a k ní příslušející obecné řešení je

$$\mu_{1,2} = 0 \Rightarrow X = c_1 + c_2 x.$$

Z okrajových podmínek

$$X(0) = c_1 = 0,$$

$$X(l) = c_1 + c_2 l = 0$$

dostaneme $c_1 = 0, c_2 = 0$. Tedy výsledkem je opět jen triviální řešení.

iii) Je-li $\lambda > 0$, pak charakteristická rovnice má tvar

$$\mu^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \mu^2 = -\lambda,$$

a tedy

$$\mu_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda} \Rightarrow X = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Z okrajových podmínek dostaneme

$$X(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0,$$

$$X(l) = 0 \cdot \cos \sqrt{\lambda}l + c_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0.$$

Aby řešení nebylo triviální, musí být

$$\sqrt{\lambda} \cdot l = n\pi, \quad n \in N,$$

tedy

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2.$$

Řešení je pak ve tvaru

$$X_n(x) = C_n \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n \in N,$$

kde C_n jsou libovolné konstanty.

Nyní budeme řešit druhou diferenciální rovnici

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad \text{kde } \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \text{ tj.}$$

$$T''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T(t) = 0.$$

Příslušná charakteristická rovnice má tvar

$$\mu^2 + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 = 0,$$

tj. $\mu_{1,2} = \pm i \frac{n\pi a}{l}$. Obecné řešení je pak

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t.$$

Celkové řešení vlnové rovnice lze psát

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

konstanta C_n je zahrnuta do $A_n, B_n, n \in N$.

2. Řešení hledáme ve tvaru

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Konstanty A_n a B_n určíme z počátečních podmínek. Z podmínky

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \varphi(x), \quad x \in \langle l, 0 \rangle$$

určíme A_n . Zřejmě A_n musí být Fourierovy koeficienty rozvoje $\varphi(x)$ do sinové řady, tedy

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx.$$

Z druhé podmínky derivováním člen po členu vyjde

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi a}{l} t + B_n \frac{n\pi a}{l} \cos \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

tedy

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x = \psi(x),$$

takže koeficienty u sinů musí být Fourierovy koeficienty rozvoje $\psi(x)$ do sinové řady, tedy

$$B_n \frac{n\pi a}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx,$$

tudíž

$$B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx.$$

1.6 Rovnice vedení tepla

Uvažujeme tenkou tyč délky l , jejíž konce jsou udržovány na konstantní teplotě $u = 0$, a kde je v čase $t = 0$ rozložení teploty v tyči dáno funkcí $\varphi = \varphi(x)$.

Nalézt rozložení teploty v tyči v čase $t > 0$ znamená nalézt řešení $u = u(x, t)$ rovnice vedení tepla

$$u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (1.17)$$

s okrajovými podmínkami

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

a počáteční podmínkou

$$u(x, 0) = \varphi(x).$$

Opět použijeme Fourierovu metodu. Protože postup je obdobný (jen o něco kratší), shrneme stručně základní kroky.

Nejprve hledáme speciální řešení, které splňuje okrajové podmínky, a které má tvar

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t).$$

Po dosazení do (1.17) a po úpravách dostaneme

$$-\frac{T'(t)}{kT(t)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

Tímto jsme rovnici (1.17) převedli na dvě obyčejné diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} T' + \lambda kT &= 0, \\ X'' + \lambda X &= 0. \end{aligned}$$

Pro neznámou funkci X s využitím okrajových podmínek $X(0) = X(l) = 0$ dostaneme

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

a odpovídající řešení ve tvaru

$$X_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Rovnice

$$T' + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kT = 0$$

má charakteristickou rovnici

$$\mu + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 k = 0,$$

takže její obecné řešení je

$$T_n(t) = A_n e^{-(n\pi/l)^2 kt}.$$

Celkové řešení pak můžeme vyjádřit ve tvaru nekonečné řady

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-(n\pi/l)^2 kt} \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

(Konstanty A_n jsou zahrnuté do konstant C_n .)

Konstanty C_n určíme jako koeficienty Fourierovy řady z počáteční podmínky

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Zřejmě C_n musí být Fourierovy koeficienty rozvoje $\varphi(x)$ do sinové řady, tedy

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx.$$

Literatura

- [1] Barták, J., Herrmann, L., Lovicar, V., Vejvoda, O. *Parciální diferenciální rovnice II. Evoluční rovnice*. 1. vydání. Praha: SNTL, 1988. 222 s.
Dostupné v knihovně UO pod číslem S 2670/21.
- [2] Mika, S., Kufner, A. *Parciální diferenciální rovnice I. Stacionární rovnice*. 1. vydání. Praha: SNTL, 1983. 184 s.
Dostupné v knihovně UO pod číslem S 2670/20.
- [3] Drábek, P., Holubová, G. *Parciální diferenciální rovnice* [online]. Skriptum. 1. vydání. Ostrava: VŠB, 2011, viii+283 s. Dostupné z http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/parcialni_diferencialni_rovnice.pdf [cit. 2014-04-24].