Studijní text

Název předmětu: PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

Garant předmětu: RNDr. Marek Sedlačík, Ph.D.

Téma: Pravděpodobnost

Obsah

1 Pravděpodobnost

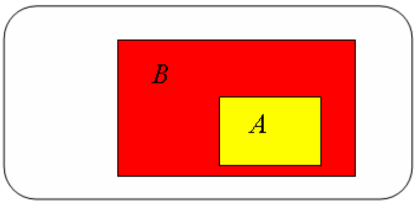
1.1 Náhodný pokus a náhodný jev

Základní pojmy, z nichž budeme vycházet, jsou:

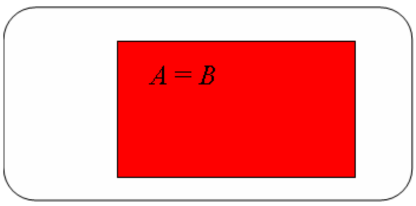
- **Náhodný pokus** je každá činnost, jejíž výsledek není jednoznačně určen podmínkami, za kterých probíhá (např. hod kostkou, měření délky, běh na 100 metrů, losování v loterii atd.).
- Výsledkem náhodného pokusu je **náhodný jev** (např. padlo 5 ok, délka je 25,7cm, dosažený čas je 13,8 s, vylosovaný los je B265430, atd.).
- **Jev jistý** Ω – při provedení náhodného pokusu nastane vždy.
- **Jev nemožný** $\emptyset$ – jev, který nemůže nikdy nastat.
- **Elementární jev** ω – jestliže neexistují jevy A, B takové, že $\omega = A \cup B$.
- Množinu všech elementárních jevů nazýváme **prostor elementárních jevů**. Může být buď konečný $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ nebo nekonečný $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$.
- Libovolný náhodný jev je podmnožina prostoru náhodných jevů (A . . . padne sudé číslo, tj. $A = \{2, 4, 6\}$).

Vztahy mezi jevy vyjadřujeme pomocí množinových relací:

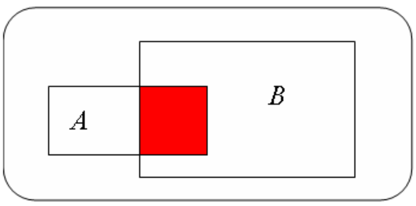
1. Jev A je **částí** jevu B ($A \subset B$), pokud nastane jev A nastane i jev B.



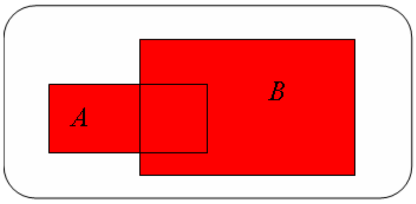
2. Jevy A a B jsou **rovnocenné** ($A = B$), jev A nastane právě když nastane jev B.



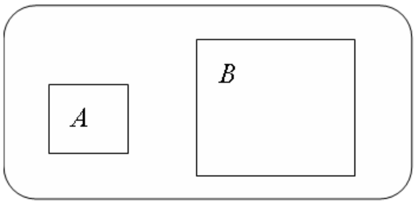
3. **Průnik** jevů A a B ($A \cap B$), současně nastane jev A i B.



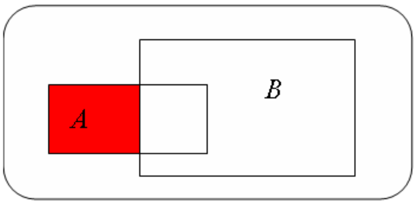
4. **Sjednocení** jevů A a B ($A \cup B$), nastane alespoň jeden z jevů A a B



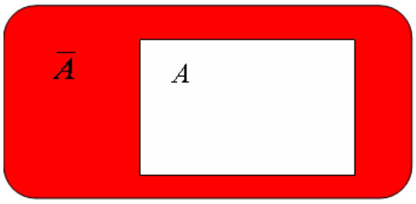
5. Jevy A a B se nazývají **neslučitelné**, jestliže při jednom náhodném pokusu nemohou současně nastat ($A \cap B = \emptyset$).



6. **Rozdílem** dvou jevů $A - B$ se rozumí jev, který nastane právě když nastane jev A a nenastane jev B.



7. **Opačný** jev k jevu A je ten, který znamená že jev A nenastal, označuje se $\overline{A}$.

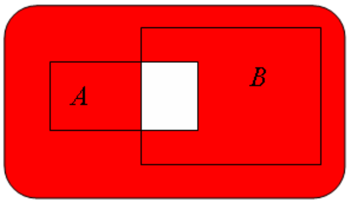


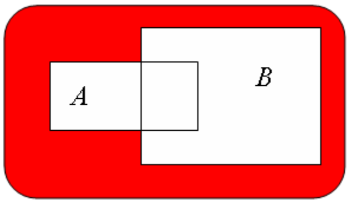
Zřejmě platí vztahy

$$A \cup \overline{A} = \Omega, A \cap \overline{A} = \emptyset.$$

Z níže uvedených obrázků je patrné, že

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{a} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$





Obdobně pro větší počet jevů ($k \geq 2$) platí tzv. **de Morganova pravidla**:

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{k} A_i} = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{A_i} \quad \text{a} \quad \overline{\bigcup_{i=1}^{k} A_i} = \bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_i}.$$

1.2 Vlastnosti pravděpodobnosti

Axiomy teorie pravděpodobnosti jsou:

1. Pravděpodobnost jevu A je nezáporné číslo ($P(A) \geq 0$).
2. Pravděpodobnost jistého jevu Ω je rovna jedné ($P(\Omega) = 1$).
3. Pravděpodobnost sjednocení konečného (nebo spočetného) počtu neslučitelných jevů je rovna součtu pravděpodobností jednotlivých jevů

$$P\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

Z axiomů vyplývají další vlastnosti pravděpodobnosti:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$
  Odvození: Vzhledem k tomu, že jevy Ω a $\emptyset$ jsou neslučitelné a $\Omega \cup \emptyset = \Omega$, platí $P(\Omega) + P(\emptyset) = 1$, tedy $1 + P(\emptyset) = 1 \Rightarrow P(\emptyset) = 0$.
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
  Odvození: Jevy $A, \overline{A}$ jsou neslučitelné a $P(A) \cup P(\overline{A}) = 1$, takže $P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(\overline{A}) =$ $= 1 - P(A)$.
- Je-li $A \subset B$, pak $0 \leq P(A) \leq P(B)$.
  Odvození: Jestliže $A \subset B$, je $A \cap B = A$ a pro jev B platí $B = \Omega \cap B = (A \cup \overline{A}) \cap B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap$ $\cap B) = A \cup (\overline{A} \cap B)$. Jevy A a $\overline{A} \cap B$ jsou neslučitelné, a proto $P(B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B) \geq P(A)$, neboť $P(\overline{A} \cap B) \geq 0$.
- Je-li $A \subset B$, pak $P(B - A) = P(B) - P(A)$.
  Odvození: Protože $B - A = \overline{A} \cap B$, plyne z předchozí vlastnosti, že $P(B) = P(A) + P(B - A) \Rightarrow$ $\Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)$.

1.3 Statistická definice pravděpodobnosti

Definice 1.1 Statistická definice pravděpodobnosti je určena vztahem

$$P(A) \approx \frac{n(A)}{n},$$

kde n je počet pokusů, $n(A)$ je četnost jevu A při n pokusech.

S rostoucím počtem pokusů se relativní četnost jevu A blíží k pravděpodobnosti nastoupení jevu A.

1.4 Klasická definice pravděpodobnosti

Definice 1.2 Jestliže množina elementárních jevů $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ je konečná a všechny jevy jsou stejně možné, tzn. $P(\omega_i = \frac{1}{n})$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, potom je pravděpodobnost dána

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

kde m je počet výsledků příznivých jevu A, n je počet všech možných výsledků.

Příklad 1.1 Ze sady 32 karet náhodně vybereme 4. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi budou právě 3 červené (srdce)?

Řešení: Počet všech možných výsledků je

$$n = \binom{32}{4},$$

Počet všech příznivých výsledků je

$$m = \binom{8}{3}\binom{24}{1},$$

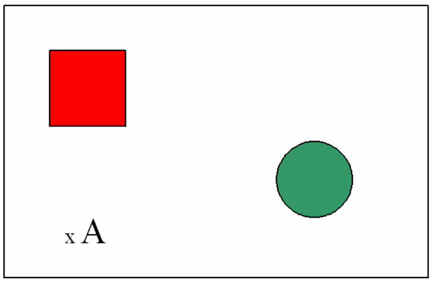
$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\binom{8}{3}\binom{24}{1}}{\binom{32}{4}} = 0{,}037.$$

Příklad 1.2 Házíme současně dvěma hracími kostkami. Najděte pravděpodobnost, že součet počtu ok bude roven 3.

Řešení: Trojku mohu hodit dvěma způsoby: 1+2 nebo 2+1. Pravděpodovnost je rovna

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = 0{,}056.$$

Příklad 1.3 Je známo, že v sérii N výrobků je M kvalitních ($N - M$ nekvalitních). Vybereme náhodně (bez vracení) r výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že z takto vybraných r výrobků je k kvalitních?



Obrázek 1: Geometrická pravděpodobnost

Řešení: Počet všech možných výsledků je

$$n = \binom{N}{r},$$

Počet všech příznivých výsledků je

$$m = \binom{M}{k}\binom{N-M}{r-k},$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{r-k}}{\binom{N}{r}}$$

1.5 Geometrická definice pravděpodobnosti

Používáme ji tehdy, můžeme-li náhodné jevy zobrazit geometricky na přímce, v rovině nebo v prostoru.

Definice 1.3 Množina elementárních jevů má nekonečný počet prvků vytvářejících určitou oblast Ω, která je omezená a uzavřená a má velikost $V(\Omega)$ (vyjádřenou délkou, případně obsahem či objemem). Jev $A \subset \Omega$ tvoří oblast o velikosti $V(A)$, potom je pravděpodobnost jevu A dána

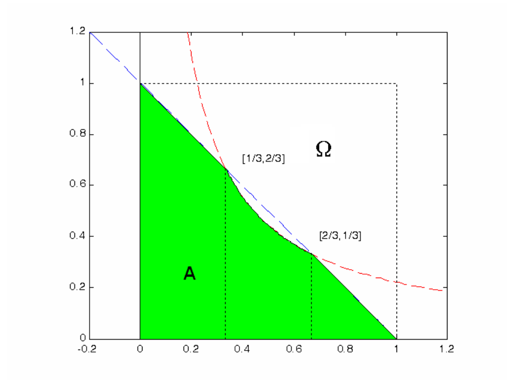
$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)},$$

Příklad 1.4 V rovině je dán obdélník o stranách 10 cm a 5 cm. V tomto obdélníku je čtverec o straně 2 cm a kruh o poloměru 1 cm a bod A (obrázek 1). Určete pravděpodobnost, že libovolně vybraný bod padne do čtverce, do kruhu, do bodu A.

Řešení: Pravděpodobnost, že vybraný bod padne do čtverce je:
$V(A) = 2 \cdot 2 = 4$ cm^2, $V(\Omega) = 10 \cdot 5 = 50$ cm^2,

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)} = \frac{4}{50} = 0{,}08.$$

Pravděpodobnost, že vybraný bod padne do kruhu je:



Obrázek 2: Geometrická pravděpodobnost

$V(A) = \pi$ cm^2, $V(\Omega) = 50$ cm^2,

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)} = \frac{\pi}{50} = 0{,}0628.$$

Pravděpodobnost, že vybraný bod padne do bodu A je:
$V(A) = 0$ cm^2, $V(\Omega) = 50$ cm^2,

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)} = \frac{0}{50} = 0.$$

Příklad 1.5 Nechť x, y jsou čísla z intervalu $[0; 1]$. Jaká je pravděpodobnost, že jejich součet bude menší než 1 a zároveň jejich součin nebude větší než $2/9$?

Řešení:

Součet menší než 1

$$x + y < 1 \Leftrightarrow y < 1 - x,$$

součin menší než $2/9$

$$xy < \frac{2}{9} \Leftrightarrow y < \frac{2}{9x}.$$

Takto vymezená oblast je na obrázku 2. Odtud dostáváme

$$V(\Omega) = 1,$$

$$V(A) = \int_0^{1/3} (1-x)dx + \int_{1/3}^{2/3} \frac{2}{9x}dx + \int_{2/3}^{1} (1-x)dx = 0{,}487,$$

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)} = 0{,}487.$$

2 Podmíněná pravděpodobnost

2.1 Podmíněná pravděpodobnost

2.1 Motivace

- $P(A)$ ... numerické ohodnocení možnosti nastoupení jevu A při provádění daného náhodného pokusu.
- Po provedení pokusu máme k dispozici nějakou doplňující informaci (např. jev B) o výsledku sledovaného pokusu.
- Lze této informace využít? Obecně ano! $\Longrightarrow$
- $P(A|B)$ ... numerické ohodnocení možnosti nastoupení sledovaného jevu A za této doplňující informace B.

Nechť $P(A)$ je pravděpodobnost jevu A při daném systému podmínek. Připojíme-li k tomuto systému další podmínku, tj. nastoupení jevu B, hovoříme o *podmíněné pravděpodobnosti* jevu A za předpokladu, že nastal jev B.

Definice 2.1 Podmíněnou pravděpodobnost $P(A|B)$ definujeme vztahem:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0.$$

Příklad 2.1 Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padly 2 pětky, je-li známo, že součet ok je dělitelný pěti?

Řešení:

Jev A ... padnou 2 pětky,
jev B ... součet je dělitelný 5 (1+4, 4+1, 2+3, 3+2, 4+6, 6+4, 5+5),
$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$,
$P(B) = \frac{7}{36}$,

$$P(A/B) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{7}{36}} = \frac{1}{7}.$$

2.2 Pravidlo o násobení pravděpodobností, nezávislost jevů

Z předchozí definice vyjádříme

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A).$$

Pravidlo o násobení pravděpodobností lze rozšířit na i na průnik s jevů $A_1, A_2, \ldots, A_s$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_s) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_s|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{s-1}).$$

Pro 3 jevy platí

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B).$$

Příklad 2.2 První dělník vyrobí denně 60 výrobků, z toho 10 % zmetků. Druhý dělník vyrobí denně 40 výrobků, z toho 5 % zmetků. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek je zmetek a pochází od prvního resp. druhého dělníka?

Řešení:
Jev $A_1 \ldots$ výrobek pochází od 1. dělníka $P(A_1) = \frac{60}{100} = \frac{6}{10} = 0{,}6$,
jev $A_2 \ldots$ výrobek pochází od 2. dělníka $P(A_2) = \frac{40}{100} = \frac{4}{10} = 0{,}4$,
jev $B \ldots$ výrobek je zmetek $P(B) = \frac{6+2}{100} = \frac{8}{100} = 0{,}08$.
Výrobek je zmetek, za podmínky, že je od 1. dělníka

$$P(B/A_1) = 0{,}1.$$

Výrobek je zmetek a pochází od 1. dělníka

$$P(A_1 \cap B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) = 0{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}06.$$

Výrobek je zmetek, za podmínky, že je od 2. dělníka

$$P(B/A_2) = 0{,}05.$$

Výrobek je zmetek a pochází od 2. dělníka

$$P(A_2 \cap B) = P(A_2) \cdot P(B/A_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}05 = 0{,}02.$$

Jestliže $P(A/B) = P(A)$, říkáme, že jev A je **nezávislý** na jevu B. Nezávislost dvou jevů je oboustranná. Je-li jev A nezávislý na jevu B, pak také jev B je nezávislý na jevu A, tedy $P(B/A) = P(B)$. Jsou-li jevy A a B nezávislé, pak

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Daný vztah je nutnou i postačující podmínkou nezávislosti.

Mějme množinu náhodných jevů $A_i, i = 1, 2, \ldots, n$. U této množiny jevů rozlišujeme nezávislost **párovou** (tj. nezávislost každé dvojice jevů) a nezávislost **vzájemnou**. Jevy nazýváme **vzájemně nezávislé** (dále jen nezávislé), právě když pro libovolnou podmnožinu $\{A_{i1} \cap \cdots \cap A_{ir}\}$ množiny $\{A_1, \ldots, A_n\}$ jevů, $2 \leq r \leq n$, platí

$$P(A_{i1} \cap \cdots \cap A_{ir}) = P(A_{i1}) \cdots P(A_{ir}).$$

Tento vztah musí platit pro všechny dvojice, trojice, atd. až n-tice náhodných jevů $A_1, \ldots, A_n$. Pro skupinu nezávislých jevů pak platí

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_s) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_s).$$

2.3 Pravidlo o sčítání pravděpodobností

Pravděpodobnost sjednocení libovolných jevů A a B se rovná

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Obecně pro s libovolných jevů $A_1, A_2, \ldots, A_s$ má **pravidlo o sčítání pravděpodobností** tvar

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s) &= \sum_{i=1}^{s} P(A_i) - \sum\sum P(A_i \cap A_j) + \\ &+ \sum\sum\sum P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + \\ &+ (-1)^{s-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_s). \end{aligned}$$

Například pro $s = 3$ dostáváme

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - \\ &- P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

Výpočet pravděpodobnosti nastoupení alespoň jednoho z jevů $A_1, A_2, \ldots, A_s$ lze zjednodušit v následujících dvou případech:

- Pro s **neslučitelných** jevů $A_1, A_2, \ldots, A_s$ platí

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_s).$$

- Pro s **nezávislých** jevů $A_1, A_2, \ldots, A_s$ platí

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \cdots P(\overline{A_s}).$$

  Odvozeno užitím de Morganova pravidla.

Příklad 2.3 O daném návrhu nezávisle na sobě hlasují 3 osoby označené A, B a C. Osoba A nebude souhlasit s návrhem s pravděpodobností 0,7, osoba B nebude souhlasit s pravděpodobností 0,5 a osoba C s pravděpodobností 0,3. Jaká je pravděpodobnost, že návrh bude zamítnut, jestliže k zamítnutí stačí, aby alespoň jedna osoba nesouhlasila s návrhem?

Řešení:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + \\ &\quad + P(A \cap B \cap C) = \\ &= 0{,}7 + 0{,}5 + 0{,}3 - \\ &\quad - 0{,}7 \cdot 0{,}5 - 0{,}7 \cdot 0{,}3 - 0{,}5 \cdot 0{,}3 + \\ &\quad + 0{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}895 \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= 1 - P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \\ &= 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}895. \end{aligned}$$

Příklad 2.4 Z úplné sady 32 karet náhodně vybereme 1 kartu. Značí-li jev A, že vytažená karta je zelená, jev B že vytažená karta je eso, určete pravděpodobnost jevů A, B, $A \cap B$, $A \cup B$. Jsou oba jevy nezávislé?

Řešení: $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$. Potom

$$P(A \cap B) = \frac{1}{32} = P(A)P(B/A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32},$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32},$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32} = P(A \cap B).$$

Jevy A a B jsou nezávislé.

2.4 Formule úplné pravděpodobnosti a Bayesův vzorec

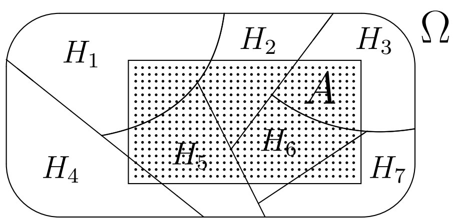
Definice 2.2 *Jevy $H_1, H_2, \ldots, H_n$ tvoří* ***úplný systém neslučitelných jevů****, jestliže jsou vzájemně neslučitelné a* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.

Potom zřejmě platí

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} H_i\right) = P(H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n) =$$

$$= P(H_1) + P(H_2) + \cdots + P(H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1.$$

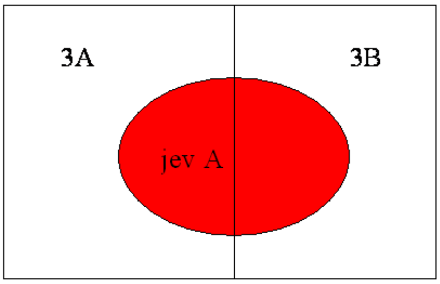
Dále se budeme za tohoto předpokladu zajímat o pravděpodobnost jevu A, když známe podmíněné psti $P(A|H_i)$ a psti $P(H_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.



Věta 2.1 Za uvedených předpokladů je pravděpodobnost jevu A rovna

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i).$$

Uvedený vztah nazýváme **formulí úplné pravděpodobnosti** jevu A



Obrázek 3: Bayesův vzorec

Jevy H_i se nazývají *hypotézami* jevu A a o jevech $H_1, H_2, \dots, H_n$ říkáme, že tvoří *úplný systém hypotéz* jevu A.

Víme-li, že výsledkem náhodného pokusu je jev A, můžeme stanovit také podmíněné pravděpodobnosti $P(H_i|A)$ hypotéz H_i vzhledem k jevu A pomocí **Bayesova vzorce**

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j)P(A|H_j)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Vztah plyne z věty o násobení pravděpodobností a z formule úplné pravděpodobnosti.

Příklad 2.5 Na gymnáziu je v 3.A 13 chlapců a 16 děvčat, v 3.B je 14 chlapců a 12 děvčat. Náhodně vybereme v každé třídě po 1 studentovi a z těchto 2 opět náhodně vybereme jednoho. S jakou pravděpodobností to bude chlapec?

Řešení: Označme
jev A ... je to chlapec,
jev B_1 ... je z 3.A,
jev B_2 ... je z 3.B.
Zřejmě $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$, $P(A/B_1) = \frac{13}{29}$, $P(A/B_2) = \frac{14}{26}$. Úplná pravděpodobnost jevu A je pak rovna

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{29} + \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{26} = 0{,}493.$$

Příklad 2.6 Je známo, že 90 % výrobků odpovídá standardu. Byla vypracována zjednodušená kontrolní zkouška, která u standardního výrobku dá kladný výsledek s pravděpodobností 95 %, kdežto u výrobku nestandardního s pravděpodobností 20 %. Jaká je pravděpodobnost, že výrobek, u kterého zkouška proběhla kladně, je standardní?

Řešení: Označme
jev A ... zkouška výrobku dopadla kladně,
jev B_1 ... výrobek je standardní,
jev B_2 ... výrobek není standardní.

Zřejmě $P(B_1) = 0{,}9$, $P(B_2) = 0{,}1$, $P(A/B_1) = 0{,}95$, $P(A/B_2) = 0{,}2$. Pravděpodobnost, že výrobek, u něhož zkouška dala kladný výsledek, je standardní, je tedy rovna

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A/B_1)}{P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2)} = \\ = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}95}{0{,}9 \cdot 0{,}95 + 0{,}1 \cdot 0{,}2} = 0{,}977.$$

Literatura

Základní

MANN, P.S. Introductory Statistics. 6th edition. Hoboken: Wiley, 2007. ISBN 978-0-471-75530-2.

MOUČKA, J., RÁDL, P. Matematika pro studenty ekonomie. 1. vyd. Grada 2010. ISBN 978-80-247-3260-2.

NEUBAUER, J., SEDLAČÍK, M., KŘÍŽ, O. Základy statistiky – Aplikace v technických a ekonomických oborech. Grada 2012.ISBN: 978-80-247-4273-1.

ŘEZANKOVÁ, H. Analýza dat z dotazníkových šetření. 2. vydání, Professional Publishing, 2010. ISBN: 9788074310195.

Doporučená

AGRESTI, A. Categorical Data Analysis. Second Edition. Wiley 2002. ISBN: 0-471-36093-7.

ANDĚL, J. Statistické metody. 3. vydání. Praha: Matfyzpress, 2003. ISBN 80-86732-08-8.

ANDĚL, J. Základy matematické statistiky. 2. vyd. Praha: Matfyzpress, 2007, 358 s. ISBN 978-80-7378-001-2.

VÁGNER, M. Integrální počet funkcí jedné proměnné. 1. vydání. Brno: UO, 2005,126 s. ISBN 80-7231-025-9.

VÁGNER, M., KAŠTÁNKOVÁ, V. Posloupnosti a řady. 1. vydání. Brno: UO, 2006. ISBN 80-7231-131-X.

Úkoly pro samostatnou práci

1. Průmyslově vyráběný filtr je podroben třem různým zkouškám. Jev A_i spočívá v tom, že filtr obstojí v i-té zkoušce, $i = 1, 2, 3$. Pomocí jevů A_i vyjádřete, že filtr obstojí
   a) jen v 1. zkoušce,
   b) jen v 1. a 2. zkoušce,
   c) ve všech třech zkouškách,
   d) alespoň v jedné zkoušce,

e) alespoň ve dvou zkouškách,
f) právě v jedné zkoušce,
g) právě ve dvou zkouškách,
h) nejvýše v jedné zkoušce.

2. Pokud se naučíte ke zkoušce z 50 otázek pouze 25, jakou máte pravděpodobnost, že ze tří vytažených otázek budete znát
   a) všechny 3,
   b) právě 2?
3. Vojenský prostor je střežen ze 6 pozorovatelen z celkového počtu 9 pozorovatelen. Nepřítel ostřeluje 3 pozorovatelny. Jaká je pravděpodobnost, že ostřeluje
   a) 3 obsazené pozorovatelny,
   b) 2 obsazené a 1 neobsazenou pozorovatelnu,
   c) alespoň 1 neobsazenou pozorovatelnu?
4. Na zastávku přijíždí autobus linky A každých 15 minut a autobus linky B každých 20 minut. Určete pravděpodobnost, že od okamžiku, kdy cestující přijde na tuto zastávku, přijede
   a) autobus A dříve než autobus B,
   b) autobus A nebo autobus B do 5 minut.
5. Hodíme postupně dvě hrací kostky. Určete pravděpodobnosti v jednotlivých úlohách a rozhodněte, zda formulované jevy jsou nezávislé:
   a) na druhé kostce bude počet ok větší než 2, když na první kostce padla 2 oka,
   b) na obou kostkách bude součet větší než 6, když na první kostce padla 2 oka,
   c) na druhé kostce bude počet ok menší než 4, když na první kostce padl lichý počet ok,
   d) na obou kostkách bude součet větší než 9, když na první kostce padl sudý počet ok.
6. Při zásahu cíle se rozsvítí žárovka. Na cíl střílejí nezávisle na sobě 4 střelci, kteří zasáhnou cíl s pravděpodobnostmi 0,55, 0,42, 0,36 a 0,22. Každý střelec vystřelí jedenkrát. Jaká je pravděpodobnost, že se žárovka
   a) rozsvítí,
   b) nerozsvítí?
7. V četě je 25 vojáků, kteří jsou různě kvalitní střelci, 5 je výtečných, 11 je dobrých, 7 je průměrných a 2 jsou špatní střelci. Pravděpodobnosti zásahu cíle u těchto 4 skupin vojáků jsou 0,9, 0,7, 0,5 a 0,3.
   a) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný voják zasáhne jedním výstřelem cíl?
   b) Vybraný voják cíl nezasáhl. Mezi jaké vojáky s největší pravděpodobností patří?

Řešení:

1. a) $A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$; b) $A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}$; c) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$; d) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$;
   e) $\left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right) \cup \left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\right) \cup \left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right)$;
   f) $\left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3\right)$; g) $\left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right) \cup \left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right) \cup$
   $\cup \left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\right)$; h) $\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right) \cup \left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3\right)$;
2. a) 0,117; b) 0,383;

3. a) 0,238; b) 0,536; c) 0,762;
4. a) 5/8; b) 1/2;
5. a) 2/3; ano b) 1/3; ne c) 1/2; ano d) 2/9; ne;
6. a) 0,870; b) 0,130;
7. a) 0,652; b) mezi průměrné.