PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

Náhodná veličina

Katedra kvantitativních metod FVL UO Brno

5. PŘEDNÁŠKA

Obsah

Výsledky některých náhodných pokusů jsou přímo vyjádřeny číselně (např. při hodu kostkou padne 6). Náhodnou veličinou budeme rozumět číselné ohodnocení výsledku náhodného pokusu.

Definice

Náhodná veličina je reálná *funkce* $X(\omega)$ definovaná na množině elementárních jevů Ω. Každému elementárnímu jevu ω z množiny Ω přiřazuje právě jedno reálné číslo $X(\omega) = x$. Obor hodnot veličiny X je množina $M = \{x; X(\omega) = x\}$, tj. $X : \Omega \to M$.

Náhodné veličiny značíme velkými písmeny z konce abecedy $X, Y, \ldots$ (příp. $X_1, X_2, \ldots$) a jejich konkrétní realizace malými písmeny $x, y, \ldots$. Pomocí náhodných veličin můžeme zavést náhodné jevy např. $X = x, X \leq x, x_1 < X < x_2$ a podobně.

Výsledky některých náhodných pokusů jsou přímo vyjádřeny číselně (např. při hodu kostkou padne 6). Náhodnou veličinou budeme rozumět číselné ohodnocení výsledku náhodného pokusu.

Definice

Náhodná veličina je reálná *funkce* $X(\omega)$ definovaná na množině elementárních jevů Ω. Každému elementárnímu jevu ω z množiny Ω přiřazuje právě jedno reálné číslo $X(\omega) = x$. Obor hodnot veličiny X je množina $M = \{x; X(\omega) = x\}$, tj. $X : \Omega \to M$.

Náhodné veličiny značíme velkými písmeny z konce abecedy $X, Y, \ldots$ (příp. $X_1, X_2, \ldots$) a jejich konkrétní realizace malými písmeny $x, y, \ldots$. Pomocí náhodných veličin můžeme zavést náhodné jevy např. $X = x, X \leq x, x_1 < X < x_2$ a podobně.

Výsledky některých náhodných pokusů jsou přímo vyjádřeny číselně (např. při hodu kostkou padne 6). Náhodnou veličinou budeme rozumět číselné ohodnocení výsledku náhodného pokusu.

Definice

Náhodná veličina je reálná *funkce* $X(\omega)$ definovaná na množině elementárních jevů Ω. Každému elementárnímu jevu ω z množiny Ω přiřazuje právě jedno reálné číslo $X(\omega) = x$. Obor hodnot veličiny X je množina $M = \{x; X(\omega) = x\}$, tj. $X : \Omega \to M$.

Náhodné veličiny značíme velkými písmeny z konce abecedy $X, Y, \ldots$ (příp. $X_1, X_2, \ldots$) a jejich konkrétní realizace malými písmeny $x, y, \ldots$. Pomocí náhodných veličin můžeme zavést náhodné jevy např.
$X = x, X \leq x, x_1 < X < x_2$ a podobně.

Náhodnou veličinou je např. životnost výrobku, která může teoreticky nabýt jakékoli nezáporné hodnoty, doba čekání na obsluhu, u níž je rovněž $M = \{x; x \geq 0\}$, počet poruch na zařízení během 100 hodin provozu, kde $M = \{x; x = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Podle oboru hodnot M rozdělujeme náhodné veličiny na

- *diskrétní (nespojité)* $\ldots M$ je konečná nebo spočetná množina,
- *spojité* $\ldots M$ je uzavřený nebo otevřený interval.

Náhodnou veličinou je např. životnost výrobku, která může teoreticky nabýt jakékoli nezáporné hodnoty, doba čekání na obsluhu, u níž je rovněž $M = \{x; x \geq 0\}$, počet poruch na zařízení během 100 hodin provozu, kde $M = \{x; x = 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Podle oboru hodnot M rozdělujeme náhodné veličiny na

- *diskrétní (nespojité)* ... M je konečná nebo spočetná množina,
- *spojité* ... M je uzavřený nebo otevřený interval.

Příklady:

- *Diskrétní náhodná veličina:* počet členů domácnosti ($M = \{1, 2, \dots\}$), počet poruch stroje během jedné pracovní směny ($M = \{0, 1, 2, \dots\}$), počet rozbitých lahví v zásilce 1000 lahví ($M = \{0, 1, 2, \dots, 1000\}$), počet narozených chlapců mezi 500 novorozeňaty ($M = \{0, 1, 2, \dots, 500\}$), apod.
- *Spojitá náhodná veličina:* hmotnost rohlíku ($M = (0, \infty)$), množství alkoholu v destilátu měřené v procentech ($M = (0, 100)$), hodnota elektrického napětí v rozvodné síti ($M = \langle 0, \infty)$), doba čekání na vlak metra, který jezdí v pravidelných 10-ti minutových intervalech ($M = \langle 0, 10)$) apod.

Příklady:

- *Diskrétní náhodná veličina:* počet členů domácnosti ($M = \{1, 2, \dots\}$), počet poruch stroje během jedné pracovní směny ($M = \{0, 1, 2, \dots\}$), počet rozbitých lahví v zásilce 1000 lahví ($M = \{0, 1, 2, \dots, 1000\}$), počet narozených chlapců mezi 500 novorozeňaty ($M = \{0, 1, 2, \dots, 500\}$), apod.
- *Spojitá náhodná veličina:* hmotnost rohlíku ($M = (0, \infty)$), množství alkoholu v destilátu měřené v procentech ($M = (0, 100)$), hodnota elektrického napětí v rozvodné síti ($M = \langle 0, \infty)$), doba čekání na vlak metra, který jezdí v pravidelných 10-ti minutových intervalech ($M = \langle 0, 10)$) apod.

Pro úplný popis náhodné veličiny je nutné znát nejen množinu hodnot M, ale i pravděpodobnosti výskytu těchto hodnot (zákon rozdělení náhodné veličiny).

Zákon rozdělení pravděpodobností – pravidlo, které každé množině B hodnot náhodné veličiny přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty z množiny B.

Popis náhodné veličiny provádíme nejčastěji pomocí funkcí a pomocí charakteristik. Budeme definovat

- distribuční funkci $F(x)$,
- pravděpodobnostní funkci $p(x)$,
- funkci hustoty pravděpodobnosti $f(x)$.

Dále zavedeme

- charakteristiky polohy,
- charakteristiky variability,
- charakteristiky koncentrace.

Popis náhodné veličiny provádíme nejčastěji pomocí funkcí a pomocí charakteristik. Budeme definovat

- distribuční funkci $F(x)$,
- pravděpodobnostní funkci $p(x)$,
- funkci hustoty pravděpodobnosti $f(x)$.

Dále zavedeme

- charakteristiky polohy,
- charakteristiky variability,
- charakteristiky koncentrace.

Definice

Distribuční funkce $F(x)$ náhodné veličiny X přiřazuje každému reálnému číslu x pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude hodnoty menší nebo rovné číslu x, tedy

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Vlastnosti distribuční funkce $F(x)$:

1. pro každé reálné číslo x platí $0 \leq F(x) \leq 1$,
2. $F(x)$ je neklesající, zprava spojitá funkce,
3. pro každou distribuční funkci platí

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1,$$

   pokud je $M = \{x; x \in (a, b\rangle\}$, potom $F(a) = 0$ a $F(b) = 1$,
4. pro každá reálná čísla $x_1 \leq x_2$ platí

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

!!! Pomocí distribuční funkce se popisují diskrétní i spojité n.v..

Vlastnosti distribuční funkce $F(x)$:

1. pro každé reálné číslo x platí $0 \leq F(x) \leq 1$,
2. $F(x)$ je neklesající, zprava spojitá funkce,
3. pro každou distribuční funkci platí
$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1,$$
pokud je $M = \{x; x \in (a, b\rangle\}$, potom $F(a) = 0$ a $F(b) = 1$,
4. pro každá reálná čísla $x_1 \leq x_2$ platí
$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

!!! Pomocí distribuční funkce se popisují diskrétní i spojité n.v..

Vlastnosti distribuční funkce $F(x)$:

1. pro každé reálné číslo x platí $0 \leq F(x) \leq 1$,
2. $F(x)$ je neklesající, zprava spojitá funkce,
3. pro každou distribuční funkci platí

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1,$$

   pokud je $M = \{x; x \in (a, b\rangle\}$, potom $F(a) = 0$ a $F(b) = 1$,

4. pro každá reálná čísla $x_1 \leq x_2$ platí

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

!!! Pomocí distribuční funkce se popisují diskrétní i spojité n.v..

Vlastnosti distribuční funkce $F(x)$:

1. pro každé reálné číslo x platí $0 \leq F(x) \leq 1$,
2. $F(x)$ je neklesající, zprava spojitá funkce,
3. pro každou distribuční funkci platí
$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1,$$
pokud je $M = \{x; x \in (a, b\rangle\}$, potom $F(a) = 0$ a $F(b) = 1$,
4. pro každá reálná čísla $x_1 \leq x_2$ platí
$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

!!! Pomocí distribuční funkce se popisují diskrétní i spojité n.v..

Vlastnosti distribuční funkce $F(x)$:

1. pro každé reálné číslo x platí $0 \leq F(x) \leq 1$,
2. $F(x)$ je neklesající, zprava spojitá funkce,
3. pro každou distribuční funkci platí

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1,$$

   pokud je $M = \{x; x \in (a, b\rangle\}$, potom $F(a) = 0$ a $F(b) = 1$,

4. pro každá reálná čísla $x_1 \leq x_2$ platí

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

!!! Pomocí distribuční funkce se popisují diskrétní i spojité n.v..

Pro popis diskrétní n. v. se používá (mimo $F(x)$) také pravděpodobnostní funkce.

Definice

Pravděpodobnostní funkce $p(x)$ každému reálnému číslu x přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude této hodnoty, tedy

$$p(x) = P(X = x).$$

Pravděpodobnostní funkce

Vlastnosti pravděpodobnostní funkce $p(x)$:

1. pro každé reálné číslo x platí $0 \leq p(x) \leq 1$,
2. součet pravděpodobností přes celý obor hodnot n.v. je roven 1, tedy
$$\sum_{x \in M} p(x) = 1.$$
3. pro každé reálné číslo x platí
$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i),$$
4. pro každá 2 reálná čísla x_1 a x_2 $(x_1 \leq x_2)$ platí
$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \sum_{x_i = x_1}^{x_2} p(x_i).$$

Vlastnosti pravděpodobnostní funkce $p(x)$:

1. pro každé reálné číslo x platí $0 \leq p(x) \leq 1$,
2. součet pravděpodobností přes celý obor hodnot n.v. je roven 1, tedy

$$\sum_{x \in M} p(x) = 1.$$

3. pro každé reálné číslo x platí

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i),$$

4. pro každá 2 reálná čísla x_1 a x_2 ($x_1 \leq x_2$) platí

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \sum_{x_i = x_1}^{x_2} p(x_i).$$

Pravděpodobnostní funkce

Vlastnosti pravděpodobnostní funkce $p(x)$:

1. pro každé reálné číslo x platí $0 \leq p(x) \leq 1$,
2. součet pravděpodobností přes celý obor hodnot n.v. je roven 1, tedy

$$\sum_{x \in M} p(x) = 1.$$

3. pro každé reálné číslo x platí

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i),$$

4. pro každá 2 reálná čísla x_1 a x_2 $(x_1 \leq x_2)$ platí

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \sum_{x_i = x_1}^{x_2} p(x_i).$$

Vlastnosti pravděpodobnostní funkce $p(x)$:

1. pro každé reálné číslo x platí $0 \leq p(x) \leq 1$,
2. součet pravděpodobností přes celý obor hodnot n.v. je roven 1, tedy

$$\sum_{x \in M} p(x) = 1.$$

3. pro každé reálné číslo x platí

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i),$$

4. pro každá 2 reálná čísla x_1 a x_2 $(x_1 \leq x_2)$ platí

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \sum_{x_i = x_1}^{x_2} p(x_i).$$

Pravděpodobnostní funkce

Vlastnosti pravděpodobnostní funkce $p(x)$:

1. pro každé reálné číslo x platí $0 \leq p(x) \leq 1$,
2. součet pravděpodobností přes celý obor hodnot n.v. je roven 1, tedy
$$\sum_{x \in M} p(x) = 1.$$
3. pro každé reálné číslo x platí
$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i),$$
4. pro každá 2 reálná čísla x_1 a x_2 $(x_1 \leq x_2)$ platí
$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \sum_{x_i = x_1}^{x_2} p(x_i).$$

Pravděpodobnostní funkci $p(x)$ můžeme vyjádřit:

- tabulkou,

x	x_1	x_2	...	x_i	...	$\sum$
$p(x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	...	$p(x_i)$	...	1

- matematickým vzorcem, např.

$$p(x) = \begin{cases} \pi(1-\pi)^x & \text{pro} \quad x = 0, 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases}$$

kde π je daná pravděpodobnost.

Pravděpodobnostní funkci $p(x)$ můžeme vyjádřit:

- tabulkou,

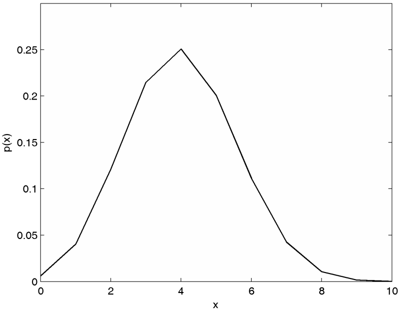
x	x_1	x_2	...	x_i	...	$\sum$
$p(x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	...	$p(x_i)$	...	1

- matematickým vzorcem, např.

$$p(x) = \begin{cases} \pi(1-\pi)^x & \text{pro} \quad x = 0, 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde π je daná pravděpodobnost.

- grafem $[x, p(x)]$,



Příklad

Střelec má celkem 3 náboje a střílí na cíl až do prvního zásahu nebo dokud nevystřílí všechny náboje. Pravděpodobnost zásahu cíle při jednom výstřelu je 0,6. Náhodná veličina X představuje počet vystřelených nábojů. Popište tuto náhodnou veličinu pomocí pravděpodobnostní a distribuční funkce. Jaká je pravděpodobnost, že počet vystřelených nábojů nebude větší než 2?

Jedná se o diskrétní náhodnou veličinu, která může nabývat pouze hodnot 1, 2 nebo 3. Obor hodnot této náhodné veličiny je tedy $M = \{1, 2, 3\}$. Určíme nyní hodnoty pravděpodobnostní funkce:

- $p(1) = P(X = 1) = 0{,}6$,
- $p(2) = P(X = 2) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$,
- $p(3) = P(X = 3) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$.

Hodnota pravděpodobnostní funkce v bodě 1 odpovídá tomu, že cíl je zasažen při 1. výstřelu, hodnota pravděpodobnostní funkce v bodě 2 odpovídá možnosti, že 1. výstřel je mimo, 2. výstřel zasáhne cíl, hodnota v bodě 3 (byly použity všechny 3 náboje) odpovídá tomu, že cíl byl buď zasažen až 3. výstřelem, nebo nebyl zasažen vůbec.

Příklad

Jedná se o diskrétní náhodnou veličinu, která může nabývat pouze hodnot 1, 2 nebo 3. Obor hodnot této náhodné veličiny je tedy $M = \{1, 2, 3\}$. Určíme nyní hodnoty pravděpodobnostní funkce:

- $p(1) = P(X = 1) = 0{,}6$,
- $p(2) = P(X = 2) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$,
- $p(3) = P(X = 3) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$.

Hodnota pravděpodobnostní funkce v bodě 1 odpovídá tomu, že cíl je zasažen při 1. výstřelu, hodnota pravděpodobnostní funkce v bodě 2 odpovídá možnosti, že 1. výstřel je mimo, 2. výstřel zasáhne cíl, hodnota v bodě 3 (byly použity všechny 3 náboje) odpovídá tomu, že cíl byl buď zasažen až 3. výstřelem, nebo nebyl zasažen vůbec.

Příklad

Jedná se o diskrétní náhodnou veličinu, která může nabývat pouze hodnot 1, 2 nebo 3. Obor hodnot této náhodné veličiny je tedy $M = \{1, 2, 3\}$. Určíme nyní hodnoty pravděpodobnostní funkce:

- $p(1) = P(X = 1) = 0{,}6$,
- $p(2) = P(X = 2) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$,
- $p(3) = P(X = 3) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$.

Hodnota pravděpodobnostní funkce v bodě 1 odpovídá tomu, že cíl je zasažen při 1. výstřelu, hodnota pravděpodobnostní funkce v bodě 2 odpovídá možnosti, že 1. výstřel je mimo, 2. výstřel zasáhne cíl, hodnota v bodě 3 (byly použity všechny 3 náboje) odpovídá tomu, že cíl byl buď zasažen až 3. výstřelem, nebo nebyl zasažen vůbec.

Příklad

Jedná se o diskrétní náhodnou veličinu, která může nabývat pouze hodnot 1, 2 nebo 3. Obor hodnot této náhodné veličiny je tedy $M = \{1, 2, 3\}$. Určíme nyní hodnoty pravděpodobnostní funkce:

- $p(1) = P(X = 1) = 0{,}6$,
- $p(2) = P(X = 2) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$,
- $p(3) = P(X = 3) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$.

Hodnota pravděpodobnostní funkce v bodě 1 odpovídá tomu, že cíl je zasažen při 1. výstřelu, hodnota pravděpodobnostní funkce v bodě 2 odpovídá možnosti, že 1. výstřel je mimo, 2. výstřel zasáhne cíl, hodnota v bodě 3 (byly použity všechny 3 náboje) odpovídá tomu, že cíl byl buď zasažen až 3. výstřelem, nebo nebyl zasažen vůbec.

Příklad

Výsledky shrneme do tabulky.

x	1	2	3	$\sum$
$p(x)$	0,6	0,24	0,16	1

Pravděpodobnostní funkci můžeme pomocí vzorce vyjádřit

$$p(x) = \begin{cases} 0{,}6 \cdot 0{,}4^{x-1} & x = 1, 2, \\ 0{,}4^2 & x = 3, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Příklad

Určíme nyní některé hodnoty funkce $F(x)$:

- $F(0) = P(X \leq 0) = 0,$
- $F(1) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6,$
- $F(1{,}5) = P(X \leq 1{,}5) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6,$
- $F(2) = P(X \leq 2) = p(1) + p(2) = 0{,}84,$
- $F(3) = P(X \leq 3) = p(1) + p(2) + p(3) = 1,$
- $F(4) = P(X \leq 4) = p(1) + p(2) + p(3) = 1.$

Příklad

Určíme nyní některé hodnoty funkce $F(x)$:

- $F(0) = P(X \leq 0) = 0$,
- $F(1) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6$,
- $F(1{,}5) = P(X \leq 1{,}5) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6$,
- $F(2) = P(X \leq 2) = p(1) + p(2) = 0{,}84$,
- $F(3) = P(X \leq 3) = p(1) + p(2) + p(3) = 1$,
- $F(4) = P(X \leq 4) = p(1) + p(2) + p(3) = 1$.

Příklad

Určíme nyní některé hodnoty funkce $F(x)$:

- $F(0) = P(X \leq 0) = 0$,
- $F(1) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6$,
- $F(1{,}5) = P(X \leq 1{,}5) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6$,
- $F(2) = P(X \leq 2) = p(1) + p(2) = 0{,}84$,
- $F(3) = P(X \leq 3) = p(1) + p(2) + p(3) = 1$,
- $F(4) = P(X \leq 4) = p(1) + p(2) + p(3) = 1$.

Příklad

Určíme nyní některé hodnoty funkce $F(x)$:

- $F(0) = P(X \leq 0) = 0$,
- $F(1) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6$,
- $F(1{,}5) = P(X \leq 1{,}5) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6$,
- $F(2) = P(X \leq 2) = p(1) + p(2) = 0{,}84$,
- $F(3) = P(X \leq 3) = p(1) + p(2) + p(3) = 1$,
- $F(4) = P(X \leq 4) = p(1) + p(2) + p(3) = 1$.

Určíme nyní některé hodnoty funkce $F(x)$:

- $F(0) = P(X \leq 0) = 0$,
- $F(1) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6$,
- $F(1{,}5) = P(X \leq 1{,}5) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6$,
- $F(2) = P(X \leq 2) = p(1) + p(2) = 0{,}84$,
- $F(3) = P(X \leq 3) = p(1) + p(2) + p(3) = 1$,
- $F(4) = P(X \leq 4) = p(1) + p(2) + p(3) = 1$.

Příklad

Určíme nyní některé hodnoty funkce $F(x)$:

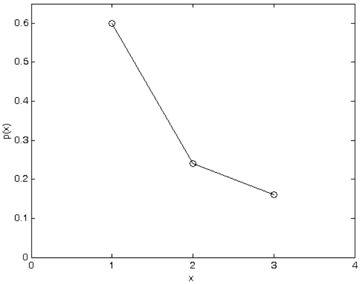
- $F(0) = P(X \leq 0) = 0$,
- $F(1) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6$,
- $F(1{,}5) = P(X \leq 1{,}5) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6$,
- $F(2) = P(X \leq 2) = p(1) + p(2) = 0{,}84$,
- $F(3) = P(X \leq 3) = p(1) + p(2) + p(3) = 1$,
- $F(4) = P(X \leq 4) = p(1) + p(2) + p(3) = 1$.

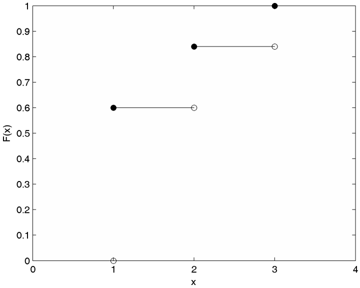
Příklad

Tyto výsledky můžeme shrnout do vzorce

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1, \\ 0{,}6 & 1 \leq x < 2, \\ 0{,}84 & 2 \leq x < 3, \\ 1 & x \geq 3. \end{cases}$$

Příklad





Obrázek: Pravděpodobnostní a distribuční funkce

Příklad

Vypočítáme nyní pravděpodobnost, že počet vystřelených nábojů nebude větší než 2.

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 2) &= P(X = 1) + P(X = 2) = p(1) + p(2) = F(2) = \\
&= 0{,}6 + 0{,}24 = 0{,}84.
\end{aligned}
$$

Pro popis spojité n. v. se používá mimo $F(X)$ také:

Definice

Hustota pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny X je nezáporná funkce $f(x)$ taková, že

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, x \in \mathbb{R}.$$

Funkce hustoty pravděpodobnosti

Vlastnosti funkce $f(x)$:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{M} f(x)dx = 1,$
2. $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$, pro všechna x, kde derivace existuje,
3. $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x^2} f(x)dx$

Odtud plyne, že pro spojitou náhodnou veličinu je vždy $P(X = x) = 0$.

Funkce hustoty pravděpodobnosti

Vlastnosti funkce $f(x)$:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{M} f(x)dx = 1,$
2. $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$, pro všechna x, kde derivace existuje,
3. $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x^2} f(x)dx$

Odtud plyne, že pro spojitou náhodnou veličinu je vždy $P(X = x) = 0$.

Vlastnosti funkce $f(x)$:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{M} f(x)dx = 1$,
2. $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$, pro všechna x, kde derivace existuje,
3. $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x^2} f(x)dx$

Odtud plyne, že pro spojitou náhodnou veličinu je vždy $P(X = x) = 0$.

Funkce hustoty pravděpodobnosti

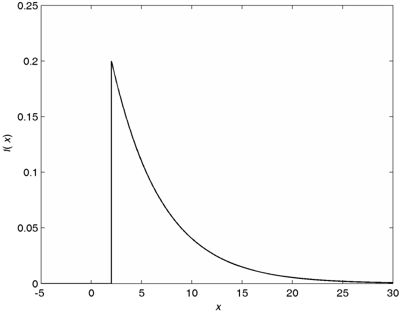
Vlastnosti funkce $f(x)$:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{M} f(x)dx = 1$,
2. $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$, pro všechna x, kde derivace existuje,
3. $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x^2} f(x)dx$

Odtud plyne, že pro spojitou náhodnou veličinu je vždy $P(X = x) = 0$.

Funkci $f(x)$ můžeme vyjádřit vzorcem a grafem, např.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-\frac{x-2}{5}} & \text{pro } x > 2, \\ 0 & \text{pro } x \leq 2. \end{cases}$$



Příklad

Náhodná veličina X má rozdělení popsané funkcí hustoty pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} cx^2(1-x) & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu c tak, aby funkce $f(x)$ byla funkcí hustoty pravděpodobnosti. Stanovte příslušnou distribuční funkci. Určete pravděpodobnost $P(0{,}2 < X < 0{,}8)$.

Příklad

Pro funkci hustoty musí platit, že $\int\limits_M f(x)dx = 1$. Určíme tedy integrál

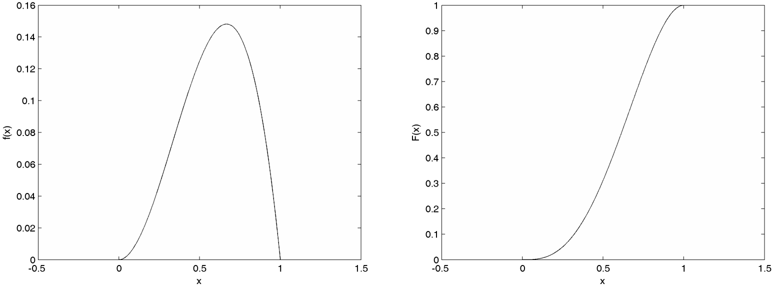
$$\int\limits_0^1 cx^2(1-x)dx = c\int\limits_0^1 (x^2 - x^3)dx = c\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \\ = c\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] = \frac{c}{12} = 1,$$

odkud dostáváme $c = 12$.

Distribuční funkci určíme pomocí vztahu v definici hustoty pravděpodobnosti
Pro $0 < x < 1$ platí

$$F(x) = \int_0^x 12t^2(1-t)dt = 12\int_0^x (t^2 - t^3)dt = 12\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}\right]_0^x =$$
$$= 12\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right] = 4x^3 - 3x^4.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ x^3(4-3x) & 0 < x < 1, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$



Obrázek: Funkce hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce

Příklad

Nejprve určíme pravděpodobnost $P(0{,}2 < X < 0{,}8)$ pomocí funkce hustoty pravděpodobnosti

$$P(0{,}2 < X < 0{,}8) = \int_{0{,}2}^{0{,}8} 12x^2(1-x)dx = \left[4x^3 - 3x^4\right]_{0{,}2}^{0{,}8} = 0{,}792.$$

Známe-li distribuční funkci, je výpočet snadnější

$$\begin{aligned} P(0{,}2 < X < 0{,}8) &= F(0{,}8) - F(0{,}2) = \\ &= 0{,}8^3(4 - 3\cdot 0{,}8) - 0{,}2^3(4 - 3\cdot 0{,}2) = 0{,}792. \end{aligned}$$

Nejprve určíme pravděpodobnost $P(0{,}2 < X < 0{,}8)$ pomocí funkce hustoty pravděpodobnosti

$$P(0{,}2 < X < 0{,}8) = \int_{0{,}2}^{0{,}8} 12x^2(1-x)dx = \left[4x^3 - 3x^4\right]_{0{,}2}^{0{,}8} = 0{,}792.$$

Známe-li distribuční funkci, je výpočet snadnější

$$\begin{aligned} P(0{,}2 < X < 0{,}8) &= F(0{,}8) - F(0{,}2) = \\ &= 0{,}8^3(4 - 3\cdot 0{,}8) - 0{,}2^3(4 - 3\cdot 0{,}2) = 0{,}792. \end{aligned}$$

Příklad

Náhodná veličina X má rozdělení popsané distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 - e^{-x} & x > 0. \end{cases}$$

Určete funkci hustoty pravděpodobnosti.

Příklad

Pro funkci hustoty pravděpodobnosti platí $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$. Pomocí derivací dostáváme $\left(\frac{d}{dx}(1 - e^{-x}) = e^{-x}\right)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ e^{-x} & x > 0. \end{cases}$$

Distribuční funkce $F(x)$ (resp. $p(x)$ nebo $f(x)$) podává o náhodné veličině úplnou informaci. V praxi je užitečné znát nějaké koncentovanější a přehlednější vyjádření této informace. K takovému popisu se používají číselné charakteristiky, které dělíme na charakteristiky polohy, variability a koncentrace.

Nejdůležitějšími *charakteristikami polohy* jsou:

- střední hodnota,
- kvantily (medián, horní a dolní kvartil, . . .),
- modus.

Distribuční funkce $F(x)$ (resp. $p(x)$ nebo $f(x)$) podává o náhodné veličině úplnou informaci. V praxi je užitečné znát nějaké koncentovanější a přehlednější vyjádření této informace. K takovému popisu se používají číselné charakteristiky, které dělíme na charakteristiky polohy, variability a koncentrace.

Nejdůležitějšími *charakteristikami polohy* jsou:

- střední hodnota,
- kvantily (medián, horní a dolní kvartil, ...),
- modus.

Definice

Střední hodnota $E(X)$ náhodné veličiny X (někdy označována jako μ) určuje hodnotu, kolem níž náhodná veličina kolísá. V případě diskrétní náhodné veličiny je definována vztahem

$$E(X) = \sum_{x \in M} x p(x),$$

pro spojitou náhodnou veličinu vztahem

$$E(X) = \int_M x f(x) dx$$

za předpokladu, že řada resp. integrál konverguje absolutně.

Uvedeme nyní stručně některé vlastnosti střední hodnoty:

1. $E(k) = k$, kde k je lib. konstanta
2. $E(kX) = kE(X)$,
3. $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$,
4. $E(X_1 X_2 \dots X_n) = E(X_1)E(X_2) \dots E(X_n)$, jsou-li $X_1, X_2, \dots, X_n$ nezávislé.

Střední hodnota

Uvedeme nyní stručně některé vlastnosti střední hodnoty:

1. $E(k) = k$, kde k je lib. konstanta
2. $E(kX) = kE(X)$,
3. $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$,
4. $E(X_1 X_2 \dots X_n) = E(X_1)E(X_2)\dots E(X_n)$, jsou-li $X_1, X_2, \dots, X_n$ nezávislé.

Střední hodnota

Uvedeme nyní stručně některé vlastnosti střední hodnoty:

1. $E(k) = k$, kde k je lib. konstanta
2. $E(kX) = kE(X)$,
3. $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$,
4. $E(X_1 X_2 \ldots X_n) = E(X_1)E(X_2) \ldots E(X_n)$, jsou-li $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezávislé.

Střední hodnota

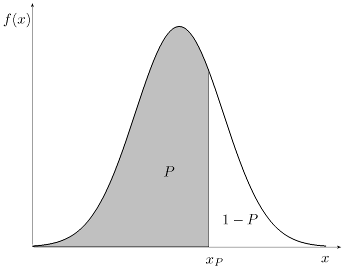
Uvedeme nyní stručně některé vlastnosti střední hodnoty:

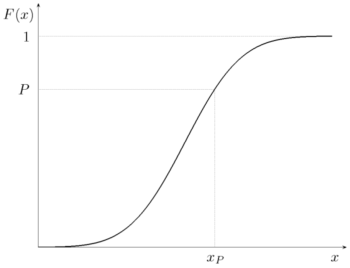
1. $E(k) = k$, kde k je lib. konstanta
2. $E(kX) = kE(X)$,
3. $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$,
4. $E(X_1 X_2 \dots X_n) = E(X_1)E(X_2)\dots E(X_n)$, jsou-li $X_1, X_2, \dots, X_n$ nezávislé.

Definice

100P% kvantil x_P náhodné veličiny s rostoucí distribuční funkcí je taková hodnota náhodné veličiny, pro kterou platí

$$P(X \leq x_P) = F(x_P) = P, \quad 0 < P < 1.$$





- Kvantil $x_{0,50}$ se nazývá *medián* $Me(X)$, platí tedy

$$P(X \leq Me(X)) = P(X \geq Me(X)) = 0{,}50,$$

- Kvantil $x_{0,25}$ se nazývá *dolní kvartil*,
- kvantil $x_{0,75}$ *je horní kvartil*.

Vybrané kvantily důležitých rozdělení jsou tabelovány.

- Kvantil $x_{0,50}$ se nazývá *medián* $Me(X)$, platí tedy

$$P(X \leq Me(X)) = P(X \geq Me(X)) = 0{,}50,$$

- Kvantil $x_{0,25}$ se nazývá *dolní kvartil*,
- kvantil $x_{0,75}$ *je horní kvartil.*

Vybrané kvantily důležitých rozdělení jsou tabelovány.

Kvantil

- Kvantil $x_{0,50}$ se nazývá *medián* $Me(X)$, platí tedy

$$P(X \leq Me(X)) = P(X \geq Me(X)) = 0{,}50,$$

- Kvantil $x_{0,25}$ se nazývá *dolní kvartil*,
- kvantil $x_{0,75}$ *je horní kvartil*.

Vybrané kvantily důležitých rozdělení jsou tabelovány.

Modus

Definice

Modus $Mo(X)$ je hodnota náhodné veličiny s největší pravděpodobností (pro diskrétní náh. veličinu), resp. hodnota, ve které má funkce $f(x)$ maximum (pro spojitou náh. veličinu).

Náhodná veličina může mít 2 i více modů.

Definice

Modus $Mo(X)$ je hodnota náhodné veličiny s největší pravděpodobností (pro diskrétní náh. veličinu), resp. hodnota, ve které má funkce $f(x)$ maximum (pro spojitou náh. veličinu).

Náhodná veličina může mít 2 i více modů.

Příklad

Určete střední hodnotu a modus náhodné veličiny udávající počet vystřelených nábojů při 3 výstřelech

$$p(x) = \begin{cases} 0{,}6 \cdot 0{,}4^{x-1} & x = 1, 2, \\ 0{,}4^2 & x = 3, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Příklad

Střední hodnotu určíme z definičního vztahu

$$E(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i p(x_i) = 1 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^0 + 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^1 + 3 \cdot 0{,}4^2 = 1{,}56.$$

Modus určuje hodnotu náhodné veličiny s největší pravděpodobností, což je v našem případě $Mo(X) = 1$, neboť hodnota pravděpodobnostní funkce je $p(1) = 0{,}6$.

Příklad

Střední hodnotu určíme z definičního vztahu

$$E(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i p(x_i) = 1 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^0 + 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^1 + 3 \cdot 0{,}4^2 = 1{,}56.$$

Modus určuje hodnotu náhodné veličiny s největší pravděpodobností, což je v našem případě $Mo(X) = 1$, neboť hodnota pravděpodobnostní funkce je $p(1) = 0{,}6$.

Příklad

Náhodná veličina X má rozdělení popsané funkcí hustoty pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete střední hodnotu a modus této náhodné veličiny.

Příklad

Střední hodnotu určíme z definičního vztahu

$$E(X) = \int\limits_0^1 xf(x)dx = \int\limits_0^1 x \cdot 12x^2(1-x) = 12\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Modus u spojité náhodné veličiny určuje maximum funkce hustoty pravděpodobnosti. Budeme hledat maximum funkce $f(x)$ na intervalu $0 < x < 1$, $\frac{d}{dx}\left[12x^2(1-x)\right] = 12(2x-3x^2) = 0$, odkud $x(2-3x) = 0$, tedy $x = 0$ nebo $x = 2/3$. Funkce hustoty pravděpodobnosti nabývá svého maxima v bodě $x = 2/3$, proto má modus hodnotu $Mo(X) = 2/3$.

Příklad

Střední hodnotu určíme z definičního vztahu

$$E(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x \cdot 12x^2(1-x) = 12\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Modus u spojité náhodné veličiny určuje maximum funkce hustoty pravděpodobnosti. Budeme hledat maximum funkce $f(x)$ na intervalu $0 < x < 1$, $\frac{d}{dx}\left[12x^2(1-x)\right] = 12(2x - 3x^2) = 0$, odkud $x(2-3x) = 0$, tedy $x = 0$ nebo $x = 2/3$. Funkce hustoty pravděpodobnosti nabývá svého maxima v bodě $x = 2/3$, proto má modus hodnotu $Mo(X) = 2/3$.

Příklad

Určete medián, horní a dolní kvartil náhodné veličiny X s distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^3} & x > 1, \\ 0 & x \leq 1. \end{cases}$$

Příklad

Pro kvantil náhodné veličiny platí $F(x_P) = P$. V našem případě

$$1 - \frac{1}{x_P^3} = P,$$

odkud dostáváme

$$x_P = \frac{1}{\sqrt[3]{1-P}}.$$

Dosazováním do daného vzorce získáme kvantily:

medián	$x_{0,50} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-0,50}} = 1,260,$
dolní kvartil	$x_{0,25} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-0,25}} = 1,101,$
horní kvartil	$x_{0,75} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-0,75}} = 1,587.$

Příklad

Pro kvantil náhodné veličiny platí $F(x_P) = P$. V našem případě

$$1 - \frac{1}{x_P^3} = P,$$

odkud dostáváme

$$x_P = \frac{1}{\sqrt[3]{1-P}}.$$

Dosazováním do daného vzorce získáme kvantily:

medián $x_{0,50} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-0{,}50}} = 1{,}260,$

dolní kvartil $x_{0,25} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-0{,}25}} = 1{,}101,$

horní kvartil $x_{0,75} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-0{,}75}} = 1{,}587.$

Základní a nejpoužívanější charakteristiky variability jsou:

- rozptyl,
- směrodatná odchylka.

Rozptyl je číslo, které charakterizuje proměnlivost hodnot náhodné veličiny kolem její střední hodnoty s přihlédnutí k jejich pstem.

Základní a nejpoužívanější charakteristiky variability jsou:

- rozptyl,
- směrodatná odchylka.

Rozptyl je číslo, které charakterizuje proměnlivost hodnot náhodné veličiny kolem její střední hodnoty s přihlédnutí k jejich pstem.

Definice

Rozptyl $D(X)$ náhodné veličiny X (někdy označovaný jako σ^2) je obecně definován vztahem

$$D(X) = E\left\{[X - E(X)]^2\right\}.$$

V případě disktrétní náhodné veličiny určíme rozptyl ze vztahu

$$D(X) = \sum_{x \in M} [x - E(X)]^2 p(x),$$

pro spojitou náhodnou veličinu

$$D(X) = \int_M [x - E(X)]^2 f(x) dx.$$

Rozptyl

Nejdůležitější vlastnosti rozptylu:

1. $D(k) = 0$, kde k je lib. konstanta
2. $D(kX) = k^2 D(X)$,
3. $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, jsou-li X a Y nezávislé
4. $D(X) \geq 0$ pro každou n. v.,
5. výpočetní tvar:

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2,$$

Nejdůležitější vlastnosti rozptylu:

1. $D(k) = 0$, kde k je lib. konstanta
2. $D(kX) = k^2 D(X)$,
3. $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, jsou-li X a Y nezávislé
4. $D(X) \geq 0$ pro každou n. v.,
5. výpočetní tvar:

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2,$$

Nejdůležitější vlastnosti rozptylu:

1. $D(k) = 0$, kde k je lib. konstanta
2. $D(kX) = k^2 D(X)$,
3. $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, jsou-li X a Y nezávislé
4. $D(X) \geq 0$ pro každou n. v.,
5. výpočetní tvar:

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2,$$

Nejdůležitější vlastnosti rozptylu:

1. $D(k) = 0$, kde k je lib. konstanta
2. $D(kX) = k^2 D(X)$,
3. $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, jsou-li X a Y nezávislé
4. $D(X) \geq 0$ pro každou n. v.,
5. výpočetní tvar:

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2,$$

Nejdůležitější vlastnosti rozptylu:

1. $D(k) = 0$, kde k je lib. konstanta
2. $D(kX) = k^2 D(X)$,
3. $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, jsou-li X a Y nezávislé
4. $D(X) \geq 0$ pro každou n. v.,
5. výpočetní tvar:

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2,$$

tzn. pro diskrétní n. v.

$$D(X) = \sum_M x^2 p(x) - E(X)^2,$$

a pro spojitou n. v.

$$D(X) = \int_M x^2 f(x) dx - E(X)^2.$$

Odvození 5. vlastnosti:

$D(X) = E[X - E(X)]^2 = E[X^2 - 2XE(X) + E(X)^2] =$
$E(X^2) - E[2XE(X)] + E[E(X)^2] = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$

tzn. pro diskrétní n. v.

$$D(X) = \sum_M x^2 p(x) - E(X)^2,$$

a pro spojitou n. v.

$$D(X) = \int_M x^2 f(x) dx - E(X)^2.$$

Odvození 5. vlastnosti:
$D(X) = E[X - E(X)]^2 = E[X^2 - 2XE(X) + E(X)^2] =$
$E(X^2) - E[2XE(X)] + E[E(X)^2] = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$

tzn. pro diskrétní n. v.

$$D(X) = \sum_M x^2 p(x) - E(X)^2,$$

a pro spojitou n. v.

$$D(X) = \int_M x^2 f(x) dx - E(X)^2.$$

Odvození 5. vlastnosti:
$D(X) = E[X - E(X)]^2 = E[X^2 - 2XE(X) + E(X)^2] =$
$E(X^2) - E[2XE(X)] + E[E(X)^2] = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$

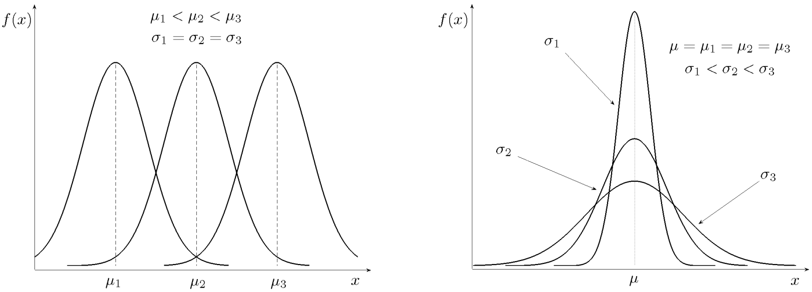
Směrodatná odchylka

Definice

Směrodatná odchylka $\sigma(X)$ náhodné veličiny X je definována jako odmocnina z rozptylu

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Směrodatná odchylka je vyjádřena je stejných jednotkách jako náhodná veličina X.



Obrázek: Vzájemný vztah mezi střední hodnotou a rozptylem

Příklad

Určete rozptyl a směrodatnou odchylku náhodné veličiny udávající počet vystřelených nábojů při 3 výstřelech

Příklad

Střední hodnotu této náhodné veličiny jsme spočítali, má hodnotu $E(X) = 1{,}56$. Pro výpočet rozptylu použije výpočetní tvar $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$, musíme určit hodnotu

$$E(X^2) = \sum_{x \in M} x^2 p(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p(x_i) = 1^2 \cdot 0{,}6 + 2^2 \cdot 0{,}24 + 3^2 \cdot 0{,}16 = 3,$$

potom

$$D(X) = 3 - 1{,}56^2 = 0{,}566.$$

Směrodatná odchylka je odmocnina z rozptylu

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0{,}753.$$

Střední hodnotu této náhodné veličiny jsme spočítali, má hodnotu $E(X) = 1{,}56$. Pro výpočet rozptylu použije výpočetní tvar $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$, musíme určit hodnotu

$$E(X^2) = \sum_{x \in M} x^2 p(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p(x_i) = 1^2 \cdot 0{,}6 + 2^2 \cdot 0{,}24 + 3^2 \cdot 0{,}16 = 3,$$

potom

$$D(X) = 3 - 1{,}56^2 = 0{,}566.$$

Směrodatná odchylka je odmocnina z rozptylu

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0{,}753.$$

Střední hodnotu této náhodné veličiny jsme spočítali, má hodnotu $E(X) = 1{,}56$. Pro výpočet rozptylu použije výpočetní tvar $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$, musíme určit hodnotu

$$E(X^2) = \sum_{x \in M} x^2 p(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p(x_i) = 1^2 \cdot 0{,}6 + 2^2 \cdot 0{,}24 + 3^2 \cdot 0{,}16 = 3,$$

potom

$$D(X) = 3 - 1{,}56^2 = 0{,}566.$$

Směrodatná odchylka je odmocnina z rozptylu

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0{,}753.$$

Příklad

Určete rozptyl a směrodatnou odchylku náhodné veličiny X posanou funkcí

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Střední hodnota této náhodné veličiny byla určena dříve, má hodnotu $E(X) = 3/5$. Podobně jako v předcházející příkladě použijeme výpočetní tvar rozptylu $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$, tedy

$$E(X^2) = \int_M x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot 12x^2(1-x)dx = 12\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{2}{5} = 0{,}4,$$

potom

$$D(X) = \frac{2}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} = 0{,}04.$$

Směrodatná odchylka je rovna

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Příklad

Střední hodnota této náhodné veličiny byla určena dříve, má hodnotu $E(X) = 3/5$. Podobně jako v předcházející příkladě použijeme výpočetní tvar rozptylu $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$, tedy

$$E(X^2) = \int_M x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot 12x^2(1-x)dx = 12\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{2}{5} = 0{,}4,$$

potom

$$D(X) = \frac{2}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} = 0{,}04.$$

Směrodatná odchylka je rovna

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Nyní se budeme zabývat charakteristikami popisujími tvar rozdělení, především symetrii a špičatost. Tyto charakteristiky jsou definovány pomocí momentů.

Definice

Obecný moment r-tého stupně μ'_r náhodné veličiny X je definován vztahem

$$\mu'_r(X) = E(X^r) \quad \text{pro } r = 1, 2, \ldots .$$

V případě disktrétní náhodné veličiny jej určíme ze vztahu

$$\mu'_r(X) = \sum_M x_i^r p(x_i),$$

pro spojitou náhodnou veličinu

$$\mu'_r(X) = \int_M x^r f(x) dx.$$

Definice

Centrální moment r-tého stupně μ_r náhodné veličiny X je definován vztahem

$$\mu_r(X) = E[X - E(X)]^r \quad \text{pro } r = 2, 3, \ldots .$$

V případě disktrétní náhodné veličiny jej určíme ze vztahu

$$\mu_r(X) = \sum_M [x_i - E(X)]^r p(x_i),$$

pro spojitou náhodnou veličinu

$$\mu_r(X) = \int_M [x - E(X)]^r f(x) dx.$$

Definice

Koeficient šikmosti $\alpha_3(X)$ je definován vztahem

$$\alpha_3(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma(X)^3}.$$

Podle hodnot koeficientu šikmosti můžeme poznat, zda je rozdělení symetrické nebo je zešikmené. Je-li

- $\alpha_3 = 0$, je rozdělení symetrické,
- $\alpha_3 < 0$, je rozdělení zešikmené doprava,
- $\alpha_3 > 0$, je rozdělení zešikmené doleva.

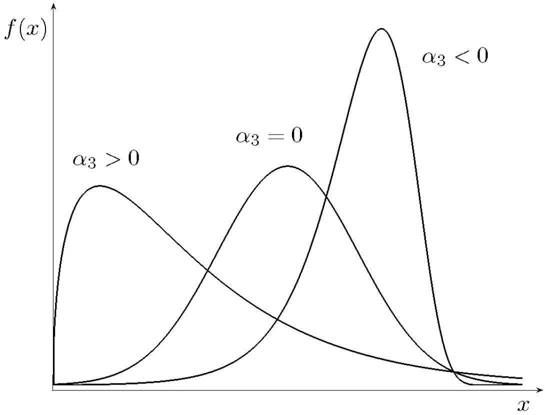
Definice

Koeficient šikmosti $\alpha_3(X)$ je definován vztahem

$$\alpha_3(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma(X)^3}.$$

Podle hodnot koeficientu šikmosti můžeme poznat, zda je rozdělení symetrické nebo je zešikmené. Je-li

- $\alpha_3 = 0$, je rozdělení symetrické,
- $\alpha_3 < 0$, je rozdělení zešikmené doprava,
- $\alpha_3 > 0$, je rozdělení zešikmené doleva.



Obrázek: Koeficient šikmosti

Definice

Koeficient špičatosti $\alpha_4(X)$ je definován vztahem

$$\alpha_4(X) = \frac{\mu_4(X)}{\sigma(X)^4} - 3.$$

Podle hodnot koeficientu špičatosti můžeme poznat, zda je rozdělení ploché nebo špičaté. Je-li

- $\alpha_4 = 0$, je rozdělení stejně špičaté jako normální,
- $\alpha_4 < 0$, je rozdělení plošší než normální,
- $\alpha_4 > 0$, je rozdělení špičatější než normální.

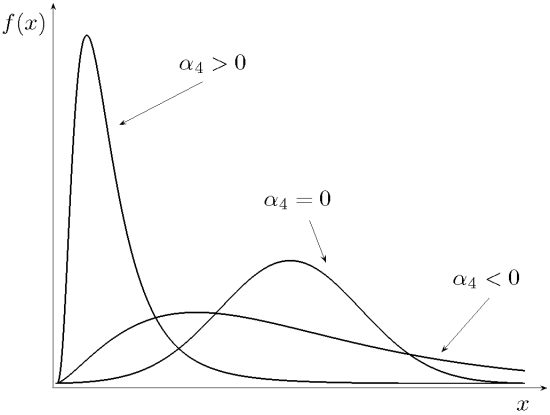
Definice

Koeficient špičatosti $\alpha_4(X)$ je definován vztahem

$$\alpha_4(X) = \frac{\mu_4(X)}{\sigma(X)^4} - 3.$$

Podle hodnot koeficientu špičatosti můžeme poznat, zda je rozdělení ploché nebo špičaté. Je-li

- $\alpha_4 = 0$, je rozdělení stejně špičaté jako normální,
- $\alpha_4 < 0$, je rozdělení plošší než normální,
- $\alpha_4 > 0$, je rozdělení špičatější než normální.



Obrázek: Koeficient špičatosti

Příklad

Vypočitejte koeficient šikmosti a špičatosti náhodné veličiny udávající počet vystřelených nábojů při 3 výstřelech (viz předchozí příklady)

K výpočtu koeficientu šikmosti a špičatosti je třeba nejprve určit 3.a 4. centrální moment. Střední hodnotu této náhodné veličiny má hodnotu $E(X) = 1{,}56$, směrodatná odchylka je $\sigma(X) = 0{,}753$.

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^{3} [x_i - E(X)]^3 p(x_i) = (1 - 1{,}56)^3 \cdot 0{,}6 + \\ +(2 - 1{,}56)^3 \cdot 0{,}24 + (3 - 1{,}56)^3 \cdot 0{,}16 = 0{,}393$$

$$\mu_4 = \sum_{i=1}^{3} [x_i - E(X)]^4 p(x_i) = (1 - 1{,}56)^4 \cdot 0{,}6 + \\ +(2 - 1{,}56)^4 \cdot 0{,}24 + (3 - 1{,}56)^4 \cdot 0{,}16 = 0{,}756$$

Příklad

K výpočtu koeficientu šikmosti a špičatosti je třeba nejprve určit 3.a 4. centrální moment. Střední hodnotu této náhodné veličiny má hodnotu $E(X) = 1{,}56$, směrodatná odchylka je $\sigma(X) = 0{,}753$.

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^{3} [x_i - E(X)]^3 p(x_i) = (1 - 1{,}56)^3 \cdot 0{,}6 + \\ +(2 - 1{,}56)^3 \cdot 0{,}24 + (3 - 1{,}56)^3 \cdot 0{,}16 = 0{,}393$$

$$\mu_4 = \sum_{i=1}^{3} [x_i - E(X)]^4 p(x_i) = (1 - 1{,}56)^4 \cdot 0{,}6 + \\ +(2 - 1{,}56)^4 \cdot 0{,}24 + (3 - 1{,}56)^4 \cdot 0{,}16 = 0{,}756$$

K výpočtu koeficientu šikmosti a špičatosti je třeba nejprve určit 3.a 4. centrální moment. Střední hodnotu této náhodné veličiny má hodnotu $E(X) = 1{,}56$, směrodatná odchylka je $\sigma(X) = 0{,}753$.

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^{3} [x_i - E(X)]^3 p(x_i) = (1 - 1{,}56)^3 \cdot 0{,}6 + \\ + (2 - 1{,}56)^3 \cdot 0{,}24 + (3 - 1{,}56)^3 \cdot 0{,}16 = 0{,}393$$

$$\mu_4 = \sum_{i=1}^{3} [x_i - E(X)]^4 p(x_i) = (1 - 1{,}56)^4 \cdot 0{,}6 + \\ + (2 - 1{,}56)^4 \cdot 0{,}24 + (3 - 1{,}56)^4 \cdot 0{,}16 = 0{,}756$$

Příklad

Koeficient šikmosti je potom roven

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0{,}922,$$

Koeficient špičatosti

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = -0{,}644.$$

Můžeme tedy říct, že rozdělení náhodné veličiny je zešikmeno (doleva) a je plošší než normální rozdělení.

Příklad

Koeficient šikmosti je potom roven

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0{,}922,$$

Koeficient špičatosti

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = -0{,}644.$$

Můžeme tedy říct, že rozdělení náhodné veličiny je zešikmeno (doleva) a je plošší než normální rozdělení.

Určete koeficient šikmosti a špičatosti náhodné veličiny X s funkcí hustoty pravděpodobnosti (viz předchozí příklady)

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Příklad

Střední hodnota této náhodné veličiny má hodnotu $E(X) = 3/5$. Směrodatná odchylku je rovna $1/5$. Určíme nejprve potřebné centrální momenty.

$$\mu_3 = \int_0^1 [x - 0{,}6]^3 12x^2(1-x)dx = \cdots = -\frac{2}{875} = -0{,}00229,$$

$$\mu_4 = \int_0^1 [x - 0{,}6]^4 12x^2(1-x)dx = \cdots = \frac{33}{8750} = 0{,}00377.$$

Příklad

Střední hodnota této náhodné veličiny má hodnotu $E(X) = 3/5$. Směrodatná odchylku je rovna $1/5$. Určíme nejprve potřebné centrální momenty.

$$\mu_3 = \int_0^1 [x - 0{,}6]^3 12x^2(1-x)dx = \cdots = -\frac{2}{875} = -0{,}00229,$$

$$\mu_4 = \int_0^1 [x - 0{,}6]^4 12x^2(1-x)dx = \cdots = \frac{33}{8750} = 0{,}00377.$$

Příklad

Střední hodnota této náhodné veličiny má hodnotu $E(X) = 3/5$. Směrodatná odchylku je rovna $1/5$. Určíme nejprve potřebné centrální momenty.

$$\mu_3 = \int_0^1 [x - 0{,}6]^3 12x^2(1-x)dx = \cdots = -\frac{2}{875} = -0{,}00229,$$

$$\mu_4 = \int_0^1 [x - 0{,}6]^4 12x^2(1-x)dx = \cdots = \frac{33}{8750} = 0{,}00377.$$

Příklad

Koeficient šikmosti je potom roven

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = -\frac{2}{7} = -0{,}286,$$

Koeficient špičatosti

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = -\frac{9}{14} = -0{,}643.$$

Rozdělení náhodné veličiny je zešikmeno (doprava) a je plošší než normální rozdělení.

Příklad

Koeficient šikmosti je potom roven

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = -\frac{2}{7} = -0{,}286,$$

Koeficient špičatosti

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = -\frac{9}{14} = -0{,}643.$$

Rozdělení náhodné veličiny je zešikmeno (doprava) a je plošší než normální rozdělení.