Studijní text

Název předmětu: PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

Garant předmětu: RNDr. Marek Sedlačík, Ph.D.

Téma: Náhodná veličina

Obsah

1 Náhodná veličina

Výsledky některých náhodných pokusů jsou přímo vyjádřeny číselně (např. při hodu kostkou padne 6). Náhodnou veličinou budeme rozumět číselné ohodnocení výsledku náhodného pokusu.

Definice 1.1 Náhodná veličina je reálná *funkce* $X(\omega)$ definovaná na množině elementárních jevů Ω. Každému elementárnímu jevu ω z množiny Ω přiřazuje právě jedno reálné číslo $X(\omega) = x$. Obor hodnot veličiny X je množina $M = \{x; X(\omega) = x\}$, tj. $X : \Omega \to M$.

Náhodné veličiny značíme velkými písmeny z konce abecedy $X, Y, \ldots$ (příp. $X_1, X_2, \ldots$) a jejich konkrétní realizace malými písmeny $x, y, \ldots$. Pomocí náhodných veličin můžeme zavést náhodné jevy např. $X = x, X \leq x, x_1 < X < x_2$ a podobně.

1.1 Diskrétní a spojitá náhodná veličina

Náhodnou veličinou je např. životnost výrobku, která může teoreticky nabýt jakékoli nezáporné hodnoty, doba čekání na obsluhu, u níž je rovněž $M = \{x; x \geq 0\}$, počet poruch na zařízení během 100 hodin provozu, kde $M = \{x; x = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Podle oboru hodnot M rozdělujeme náhodné veličiny na

- *diskrétní (nespojité)* … M je konečná nebo spočetná množina,
- *spojité* … M je uzavřený nebo otevřený interval.

Příklady náhodných veličin

- *Diskrétní náhodná veličina:* počet členů domácnosti ($M = \{1, 2, \ldots\}$), počet poruch stroje během jedné pracovní směny ($M = \{0, 1, 2, \ldots\}$), počet rozbitých lahví v zásilce 1000 lahví ($M = \{0, 1, 2, \ldots, 1000\}$), počet narozených chlapců mezi 500 novorozeňaty ($M = \{0, 1, 2, \ldots, 500\}$), apod.
- *Spojitá náhodná veličina:* hmotnost rohlíku ($M = (0, \infty)$), množství alkoholu v destilátu měřené v procentech ($M = (0, 100)$), hodnota elektrického napětí v rozvodné síti ($M = \langle 0, \infty)$), doba čekání na vlak metra, který jezdí v pravidelných 10-ti minutových intervalech ($M = \langle 0, 10)$) apod.

1.2 Zákon rozdělení pravděpodobností

Pro úplný popis náhodné veličiny je nutné znát nejen množinu hodnot M, ale i pravděpodobnosti výskytu těchto hodnot (zákon rozdělení náhodné veličiny).

Definice 1.2 Zákon rozdělení pravděpodobností – pravidlo, které každé množině B hodnot náhodné veličiny přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty z množiny B.

Popis náhodné veličiny provádíme nejčastěji pomocí funkcí a pomocí charakteristik. Budeme definovat

- distribuční funkci $F(x)$,
- pravděpodobnostní funkci $p(x)$,

- funkci hustoty pravděpodobnosti $f(x)$.

Dále zavedeme

- charakteristiky polohy,
- charakteristiky variability,
- charakteristiky koncentrace.

2 Pravděpodobnostní chování náhodné veličiny

2.1 Distribuční funkce

Definice 2.1 Distribuční funkce $F(x)$ náhodné veličiny X přiřazuje každému reálnému číslu x pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude hodnoty menší nebo rovné číslu x, tedy

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Základní vlastnosti distribuční funkce $F(x)$ jsou:

1. pro každé reálné číslo x platí $0 \leq F(x) \leq 1$,
2. $F(x)$ je neklesající, zprava spojitá funkce,
3. pro každou distribuční funkci platí

   $$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1,$$

   pokud je $M = \{x; x \in (a, b\rangle\}$, potom $F(a) = 0$ a $F(b) = 1$,
4. pro každá reálná čísla $x_1 \leq x_2$ platí

   $$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Pomocí distribuční funkce se popisují diskrétní i spojité náhodné veličiny!

2.2 Pravděpodobnostní funkce

Pro popis diskrétní náhodné veličiny se používá mimo distribuční funkce $F(x)$ také pravděpodobnostní funkce.

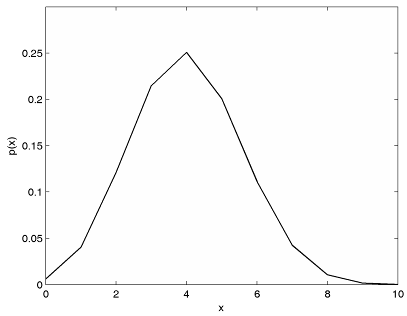
Definice 2.2 Pravděpodobnostní funkce $p(x)$ každému reálnému číslu x přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude této hodnoty, tedy

$$p(x) = P(X = x).$$

Základní vlastnosti pravděpodobnostní funkce $p(x)$ jsou:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	$\sum$
$p(x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\dots$	$p(x_i)$	$\dots$	1

Tabulka 1: Tabulka pravděpodobnostní funkce



Obrázek 1: Graf pravděpodobnostní funkce

1. pro každé reálné číslo x platí $0 \leq p(x) \leq 1$,
2. součet pravděpodobností přes celý obor hodnot náhodné veličiny je roven 1, tedy $\sum\limits_{x \in M} p(x) = 1$,
3. pro každé reálné číslo x platí $F(x) = P(X \leq x) = \sum\limits_{x_i \leq x} p(x_i)$,
4. pro každá 2 reálná čísla x_1 a x_2 ($x_1 \leq x_2$) platí $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \sum\limits_{x_i = x_1}^{x_2} p(x_i)$.

Pravděpodobnostní funkci $p(x)$ můžeme vyjádřit:

- tabulkou (např. tabulka 1),
- matematickým vzorcem, např.

$$p(x) = \begin{cases} \pi(1-\pi)^x & \text{pro} \quad x = 0, 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases}$$

  kde π je daná pravděpodobnost,
- grafem $[x, p(x)]$ (např. obrázek 1).

Příklad 2.1 Střelec má celkem 3 náboje a střílí na cíl až do prvního zásahu nebo dokud nevystřílí všechny náboje. Pravděpodobnost zásahu cíle při jednom výstřelu je 0,6. Náhodná veličina X představuje počet vystřelených nábojů. Popište tuto náhodnou veličinu pomocí pravděpodobnostní a distribuční funkce. Jaká je pravděpodobnost, že počet vystřelených nábojů nebude větší než 2?

Řešení: Jedná se o diskrétní náhodnou veličinu, která může nabývat pouze hodnot 1, 2 nebo 3. Obor hodnot této náhodné veličiny je tedy $M = \{1, 2, 3\}$. Určíme nyní hodnoty pravděpodobnostní funkce:

- $p(1) = P(X = 1) = 0{,}6$,

x	1	2	3	$\sum$
$p(x)$	0,6	0,24	0,16	1

Tabulka 2: Pravděpodobnostní funkce

- $p(2) = P(X = 2) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24,$
- $p(3) = P(X = 3) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16.$

Hodnota pravděpodobnostní funkce v bodě 1 odpovídá tomu, že cíl je zašažen při 1. výstřelu, hodnota pravděpodobnostní funkce v bodě 2 odpovídá možnosti, že 1. výstřel je mimo, 2. výstřel zásáhne cíl, hodnota v bodě 3 (byly použity všechny 3 náboje) odpovídá tomu, že cíl byl buď zasažen až 3. výstřelem, nebo nebyl zasažen vůbec. Výsledky shrneme do tabulky 2. Pravděpodobnostní funkci můžeme pomocí vzorce vyjádřit

$$p(x) = \begin{cases} 0{,}6 \cdot 0{,}4^{x-1} & x = 1, 2, \\ 0{,}4^2 & x = 3, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

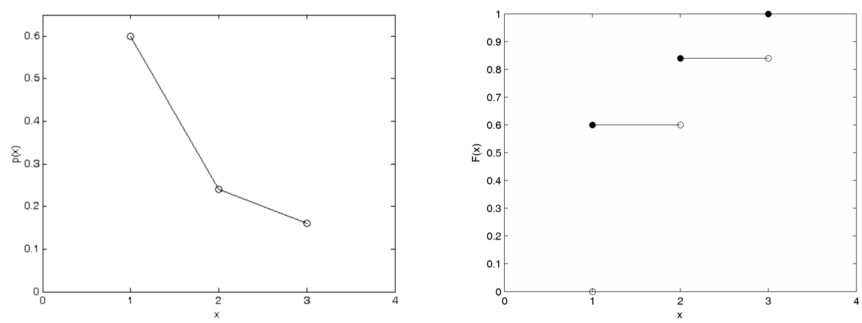
Nyní určíme některé hodnoty funkce $F(x)$:

- $F(0) = P(X \leq 0) = 0,$
- $F(1) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6,$
- $F(1{,}5) = P(X \leq 1{,}5) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6,$
- $F(2) = P(X \leq 2) = p(1) + p(2) = 0{,}84,$
- $F(3) = P(X \leq 3) = p(1) + p(2) + p(3) = 1,$
- $F(4) = P(X \leq 4) = p(1) + p(2) + p(3) = 1.$

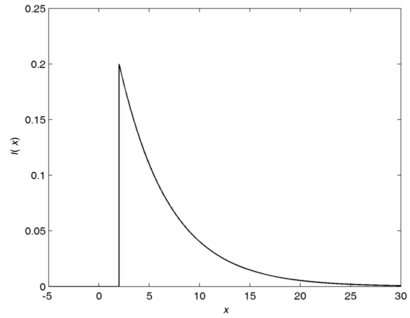
Tyto výsledky můžeme shrnout do vzorce

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1, \\ 0{,}6 & 1 \leq x < 2, \\ 0{,}84 & 2 \leq x < 3, \\ 1 & x \geq 3. \end{cases}$$

Odpovídající grafy jsou na obrázku 2. Vypočítáme nyní pravděpodobnost, že počet vystřelených



Obrázek 2: Pravděpodobnostní a distribuční funkce



Obrázek 3: Graf funkce $f(x)$

nábojů nebude větší než 2.

$$P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = p(1) + p(2) = F(2) = 0{,}6 + 0{,}24 = 0{,}84.$$

2.3 Funkce hustoty pravděpodobnosti

Pro popis spojité náhodné veličiny X se používá mimo $F(X)$ také hustota pravděpodobnosti $f(x)$:

Definice 2.3 Hustota pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny X je nezáporná funkce $f(x)$ taková, že

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt, x \in .$$

Základní vlastnosti funkce $f(x)$ jsou:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{M} f(x)dx = 1,$
2. $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$, pro všechna x, kde derivace existuje,
3. $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) =$
   $= F(x_2) - F(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x^2} f(x)dx$

Odtud plyne, že pro spojitou náhodnou veličinu je vždy $P(X = x) = 0$. Funkci $f(x)$ můžeme vyjádřit vzorcem a grafem, např. funkci hustoty pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-\frac{x-2}{5}} & \text{pro } x > 2, \\ 0 & \text{pro } x \leq 2 \end{cases}$$

odpovídá graf na obrázku 3.

Příklad 2.2 Náhodná veličina X má rozdělení popsané funkcí hustoty pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} cx^2(1-x) & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu c tak, aby funkce $f(x)$ byla funkcí hustoty pravděpodobnosti. Stanovte příslušnou distribuční funkci. Určete pravděpodobnost $P(0{,}2 < X < 0{,}8)$.

Řešení: Pro funkci hustoty musí platit, že $\int\limits_M f(x)dx = 1$. Určíme tedy integrál

$$\int\limits_0^1 cx^2(1-x)dx = c\int\limits_0^1 (x^2 - x^3)dx = c\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = c\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] = \frac{c}{12} = 1,$$

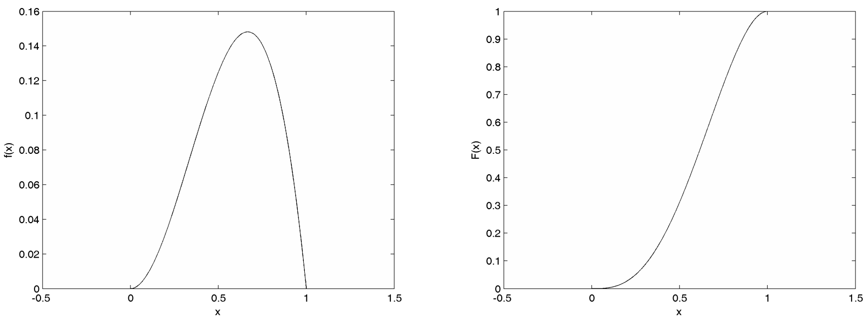
odkud dostáváme $c = 12$. Distribuční funkci určíme pomocí vztahu v definici hustoty pravděpodobnosti. Pro $0 < x < 1$ platí

$$F(x) = \int\limits_0^x 12t^2(1-t)dt = 12\int\limits_0^x (t^2 - t^3)dt = 12\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}\right]_0^x = 12\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right] = 4x^3 - 3x^4,$$

zapsáno přesněji

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0, \\ x^3(4-3x) & 0 < x < 1, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Graf funkce hustoty pravděpodobnosti a příslušné distribuční funkce jsou na obrázku 4. Dále určíme



Obrázek 4: Funkce hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce

pravděpodobnost $P(0{,}2 < X < 0{,}8)$ pomocí funkce hustoty pravděpodobnosti

$$P(0{,}2 < X < 0{,}8) = \int\limits_{0{,}2}^{0{,}8} 12x^2(1-x)dx = \left[4x^3 - 3x^4\right]_{0{,}2}^{0{,}8} = 0{,}792.$$

Známe-li distribuční funkci, je výpočet snadnější

$$P(0{,}2 < X < 0{,}8) = F(0{,}8) - F(0{,}2) = 0{,}8^3(4 - 3\cdot 0{,}8) - 0{,}2^3(4 - 3\cdot 0{,}2) = 0{,}792.$$

Příklad 2.3 Náhodná veličina X má rozdělení popsané distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 - e^{-x} & x > 0. \end{cases}$$

Určete funkci hustoty pravděpodobnosti.

Řešení: Pro funkci hustoty pravděpodobnosti platí $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$. Derivací $\left(\frac{d}{dx}(1 - e^{-x}) = e^{-x}\right)$ dostáváme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ e^{-x} & x > 0. \end{cases}$$

3 Číselné charakteristiky

3.1 Charakteristiky polohy

Distribuční funkce $F(x)$ (resp. $p(x)$ nebo $f(x)$) podává o náhodné veličině úplnou informaci. V praxi je užitečné znát nějaké koncentrovanější a přehlednější vyjádření této informace. K takovému popisu se používají číselné charakteristiky, které dělíme na charakteristiky polohy, variability a koncentrace. Nejdůležitějšími charakteristikami polohy jsou:

- střední hodnota,
- kvantily (medián, horní a dolní kvartil, ...),
- modus.

Definice 3.1 **Střední hodnota** $E(X)$ náhodné veličiny X (někdy označována jako μ) určuje hodnotu, kolem níž náhodná veličina kolísá. V případě diskrétní resp. spojité náhodné veličiny je definována vztahem

$$E(X) = \sum_{x \in M} xp(x), \quad \text{resp.} \quad E(X) = \int\limits_M xf(x)dx$$

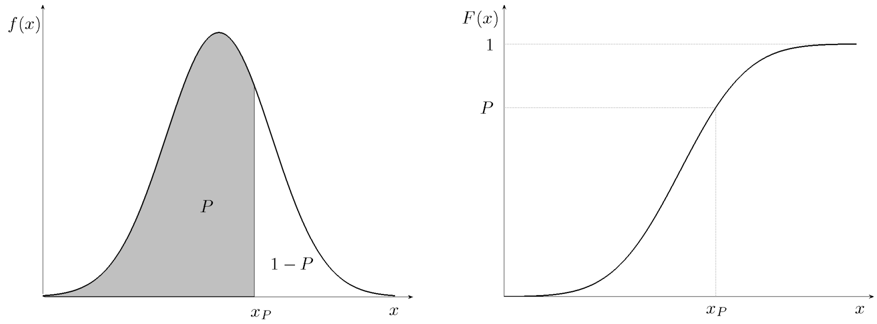
za předpokladu, že řada resp. integrál konverguje absolutně.

Uvedeme nyní stručně některé vlastnosti střední hodnoty:

1. $E(k) = k$, kde k je lib. konstanta,
2. $E(kX) = kE(X)$,
3. $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$,
4. $E(X_1 X_2 \dots X_n) = E(X_1)E(X_2) \dots E(X_n)$, jsou-li $X_1, X_2, \dots, X_n$ nezávislé.

Definice 3.2 **100P% kvantil** x_P náhodné veličiny (obrázek 5) s rostoucí distribuční funkcí je taková hodnota náhodné veličiny, pro kterou platí

$$P(X \leq x_P) = F(x_P) = P, \quad 0 < P < 1.$$



Obrázek 5: Kvantil náhodné veličiny

- Kvantil $x_{0,50}$ se nazývá **medián** $Me(X)$, platí tedy $P(X \leq Me(X)) = P(X \geq Me(X)) = 0{,}50$,
- Kvantil $x_{0,25}$ se nazývá **dolní kvartil**,
- kvantil $x_{0,75}$ je **horní kvartil**.

Vybrané kvantily důležitých rozdělení jsou tabelovány.

Definice 3.3 **Modus** $Mo(X)$ je hodnota náhodné veličiny s největší pravděpodobností (pro diskrétní náh. veličinu), resp. hodnota, ve které má funkce $f(x)$ maximum (pro spojitou náh. veličinu).

Z uvedené definice je vidět, že náhodná veličina může mít 2 i více modů.

Příklad 3.1 Určete střední hodnotu a modus náhodné veličiny udávající počet vystřelených nábojů při 3 výstřelech

$$p(x) = \begin{cases} 0{,}6 \cdot 0{,}4^{x-1} & x = 1, 2, \\ 0{,}4^2 & x = 3, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Řešení: Střední hodnotu určíme z definičního vztahu

$$E(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i p(x_i) = 1 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^0 + 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^1 + 3 \cdot 0{,}4^2 = 1{,}56.$$

Modus určuje hodnotu náhodné veličiny s největší pravděpodobností, což je v našem případě $Mo(X) = 1$, neboť hodnota pravděpodobnostní funkce je $p(1) = 0{,}6$.

Příklad 3.2 Náhodná veličina X má rozdělení popsané funkcí hustoty pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete střední hodnotu a modus této náhodné veličiny.

Řešení: Střední hodnotu určíme z definičního vztahu

$$E(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x \cdot 12x^2(1-x) = 12\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Modus u spojité náhodné veličiny určuje maximum funkce hustoty pravděpodobnosti. Budeme hledat maximum funkce $f(x)$ na intervalu $0 < x < 1$, $\frac{d}{dx}\left[12x^2(1-x)\right] = 12(2x - 3x^2) = 0$, odkud $x(2-3x) = 0$, tedy $x = 0$ nebo $x = 2/3$. Funkce hustoty pravděpodobnosti nabývá svého maxima v bodě $x = 2/3$, proto má modus hodnotu $Mo(X) = 2/3$.

Příklad 3.3 Určete medián, horní a dolní kvartil náhodné veličiny X s distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^3} & x > 1, \\ 0 & x \leq 1. \end{cases}$$

Řešení: Pro kvantil náhodné veličiny platí $F(x_P) = P$. V našem případě $1 - \frac{1}{x_P^3} = P$, odkud dostáváme

$$x_P = \frac{1}{\sqrt[3]{1-P}}.$$

Dosazováním do daného vzorce získáme kvantily:

medián	$x_{0,50} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-0{,}50}} = 1{,}260,$
dolní kvartil	$x_{0,25} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-0{,}25}} = 1{,}101,$
horní kvartil	$x_{0,75} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-0{,}75}} = 1{,}587.$

3.2 Charakteristiky variability

Základní a nejpoužívanější charakteristiky variability jsou:

- rozptyl,
- směrodatná odchylka.

Rozptyl je číslo, které charakterizuje proměnlivost hodnot náhodné veličiny kolem její střední hodnoty s přihlédnutí k jejich pstem.

Definice 3.4 **Rozptyl** $D(X)$ náhodné veličiny X (někdy označovaný jako σ^2) je obecně definován vztahem

$$D(X) = E\left\{[X - E(X)]^2\right\}.$$

V případě disktrétní resp. spojité náhodné veličiny určíme rozptyl ze vztahu

$$D(X) = \sum_{x \in M} [x - E(X)]^2 p(x), \quad \text{resp.} \quad D(X) = \int_M [x - E(X)]^2 f(x)dx.$$

Nejdůležitější vlastnosti rozptylu jsou:

1. $D(k) = 0$, kde k je lib. konstanta,
2. $D(kX) = k^2 D(X)$,
3. $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$, jsou-li X a Y nezávislé,
4. $D(X) \geq 0$ pro každou náhodnou veličinu,
5. výpočetní tvar $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Pro diskrétní resp. spojitou náhodnou veličinu tedy platí:

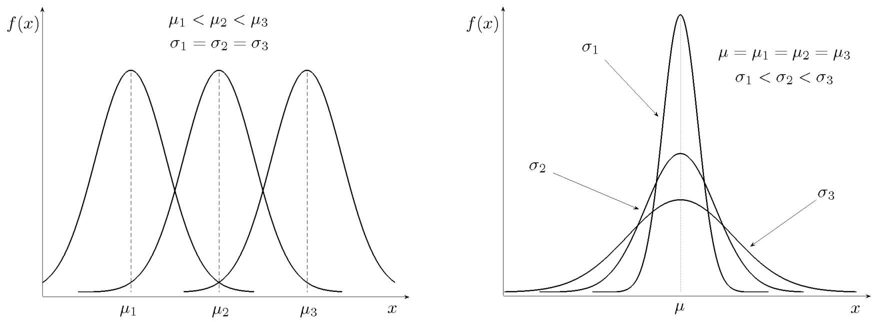
$$D(X) = \sum_M x^2 p(x) - E(X)^2, \quad \text{resp.} \quad D(X) = \int_M x^2 f(x) dx - E(X)^2.$$

Odvození 5. vlastnosti:
$D(X) = E[X - E(X)]^2 = E[X^2 - 2XE(X) + E(X)^2] = E(X^2) - E[2XE(X)] + E[E(X)^2] = E(X^2) - - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2.$

Definice 3.5 **Směrodatná odchylka** $\sigma(X)$ náhodné veličiny X je definována jako odmocnina z rozptylu

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Směrodatná odchylka je vyjádřena ve stejných jednotkách jako náhodná veličina X. Vzájemný vztah mezi střední hodnotou $E(X)$ a rozptylem $D(X)$ je pak na obrázku 6.



Obrázek 6: Vzájemný vztah mezi střední hodnotou a rozptylem

Příklad 3.4 Určete rozptyl a směrodatnou odchylku náhodné veličiny udávající počet vystřelených nábojů při 3 výstřelech.

Řešení: Střední hodnotu této náhodné veličiny jsme již spočítali, má hodnotu $E(X) = 1{,}56$. Pro výpočet rozptylu použije výpočetní tvar $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$, musíme určit hodnotu

$$E(X^2) = \sum_{x \in M} x^2 p(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p(x_i) = 1^2 \cdot 0{,}6 + 2^2 \cdot 0{,}24 + 3^2 \cdot 0{,}16 = 3,$$

potom $D(X) = 3 - 1{,}56^2 = 0{,}566$. Směrodatná odchylka je odmocnina z rozptylu $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0{,}753$.

Příklad 3.5 Určete rozptyl a směrodatnou odchylku náhodné veličiny X posanou funkcí

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) \, 0 < x < 1, \\ 0 \qquad \text{jinak.} \end{cases}$$

Řešení: Střední hodnota této náhodné veličiny byla určena dříve, má hodnotu $E(X) = 3/5$. Podobně jako v předcházející příkladě použijeme výpočetní tvar rozptylu $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$, tedy

$$E(X^2) = \int\limits_M x^2 f(x)dx = \int\limits_0^1 x^2 \cdot 12x^2(1-x)dx = 12\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{2}{5} = 0{,}4,$$

potom $D(X) = \frac{2}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} = 0{,}04$. Směrodatná odchylka je rovna $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

3.3 Charakteristiky koncentrace

Nyní se budeme zabývat charakteristikami popisujími tvar rozdělení, především symetrii a špičatost. Tyto charakteristiky jsou definovány pomocí momentů.

Definice 3.6 Obecný moment r-tého stupně μ'_r náhodné veličiny X je definován vztahem

$$\mu'_r(X) = E(X^r) \quad \text{pro } r = 1, 2, \ldots.$$

V případě disktrétní resp. spojité náhodné veličiny jej určíme ze vztahu

$$\mu'_r(X) = \sum_M x_i^r p(x_i), \quad \text{resp.} \quad \mu'_r(X) = \int_M x^r f(x)dx.$$

Definice 3.7 Centrální moment r-tého stupně μ_r náhodné veličiny X je definován vztahem

$$\mu_r(X) = E[X - E(X)]^r \quad \text{pro } r = 2, 3, \ldots.$$

V případě disktrétní resp. spojité náhodné veličiny jej určíme ze vztahu

$$\mu_r(X) = \sum_M [x_i - E(X)]^r p(x_i), \mu_r(X) = \int_M [x - E(X)]^r f(x)dx.$$

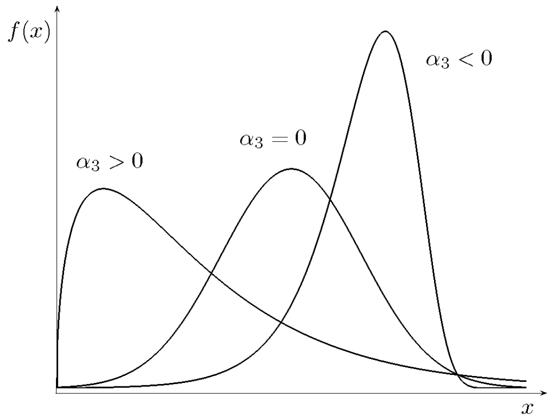
Z daných definic je zřejmé, že průměr je 1. obecný moment, rozptyl je 2. centrální moment.

Definice 3.8 Koeficient šikmosti $\alpha_3(X)$ je definován vztahem

$$\alpha_3(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma(X)^3}.$$

Podle hodnot koeficientu šikmosti můžeme poznat, zda je rozdělení symetrické nebo je zešikmené (obrrázek 7). Je-li

- $\alpha_3 = 0$, je rozdělení symetrické,



Obrázek 7: Koeficient šikmosti

- $\alpha_3 < 0$, je rozdělení zešikmené doprava,
- $\alpha_3 > 0$, je rozdělení zešikmené doleva.

Definice 3.9 Koeficient špičatosti $\alpha_4(X)$ je definován vztahem

$$\alpha_4(X) = \frac{\mu_4(X)}{\sigma(X)^4} - 3.$$

Podle hodnot koeficientu špičatosti můžeme poznat, zda je rozdělení ploché nebo špičaté (obrázek 8). Je-li

- $\alpha_4 = 0$, je rozdělení stejně špičaté jako normální,
- $\alpha_4 < 0$, je rozdělení plošší než normální,
- $\alpha_4 > 0$, je rozdělení špičatější než normální.

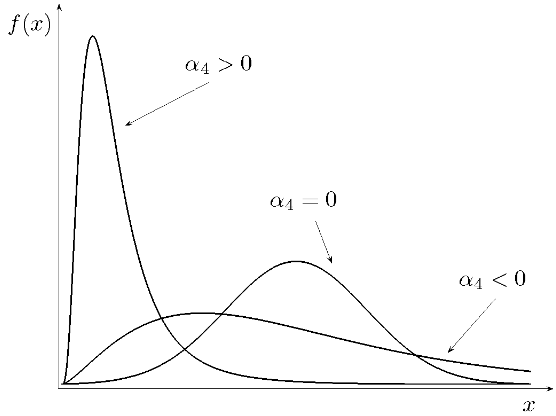
Příklad 3.6 Vypočitejte koeficient šikmosti a špičatosti náhodné veličiny udávající počet vystřelených nábojů při 3 výstřelech (viz předchozí příklady).

Řešení: K výpočtu koeficientu šikmosti a špičatosti je třeba nejprve určit 3. a 4. centrální moment. Střední hodnotu této náhodné veličiny má hodnotu $E(X) = 1{,}56$, směrodatná odchylka je $\sigma(X) = \\ = 0{,}753$.

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^{3} [x_i - E(X)]^3 p(x_i) = (1 - 1{,}56)^3 \cdot 0{,}6 + (2 - 1{,}56)^3 \cdot 0{,}24 + (3 - 1{,}56)^3 \cdot 0{,}16 = 0{,}393,$$

$$\mu_4 = \sum_{i=1}^{3} [x_i - E(X)]^4 p(x_i) = (1 - 1{,}56)^4 \cdot 0{,}6 + (2 - 1{,}56)^4 \cdot 0{,}24 + (3 - 1{,}56)^4 \cdot 0{,}16 = 0{,}756.$$

Koeficient šikmosti je potom roven $\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0{,}922$, koeficient špičatosti $\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = -0{,}644$. Můžeme tedy říct, že rozdělení náhodné veličiny je zešikmeno (doleva) a je plošší než normální rozdělení.



Obrázek 8: Koeficient špičatosti

Příklad 3.7 Určete koeficient šikmosti a špičatosti náhodné veličiny X s funkcí hustoty pravděpodobnosti (viz předchozí příklady)

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Řešení: Střední hodnota této náhodné veličiny má hodnotu $E(X) = 3/5$. Směrodatná odchylku je rovna 1/5. Určíme nejprve potřebné centrální momenty.

$$\mu_3 = \int_0^1 [x - 0{,}6]^3 12x^2(1-x)dx = \cdots = -\frac{2}{875} = -0{,}00229,$$

$$\mu_4 = \int_0^1 [x - 0{,}6]^4 12x^2(1-x)dx = \cdots = \frac{33}{8750} = 0{,}00377.$$

Koeficient šikmosti je potom roven $\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = -\frac{2}{7} = -0{,}286$, koeficient špičatosti $\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 =$ $= -\frac{9}{14} = -0{,}643$. Rozdělení náhodné veličiny je zešikmeno (doprava) a je plošší než normální rozdělení.