

PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

Modely spojité náhodné veličiny

Katedra kvantitativních metod FVL UO Brno

7. PŘEDNÁŠKA

Modely spojité náhodné veličiny

- Rovnoměrné rozdělení
- Exponenciální rozdělení
- Normální a normované normální rozdělení
- Log-normální rozdělení
- Rozdělení odvozená od normálního
 - ① Pearsonovo
 - ② Studentovo
 - ③ Fisherovo-Snedecorovo

Definice

Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení $R(\alpha, \beta)$ právě tehdy, když má funkce hustoty pravděpodobnosti tvar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \alpha < x < \beta, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$.

Distribuční funkci náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením dostaneme

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{\alpha}^x \frac{1}{\beta - \alpha} dt = \dots = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} \quad \text{pro } \alpha < x < \beta.$$

Celkový tvar distribuční funkce je

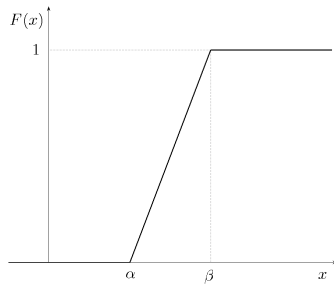
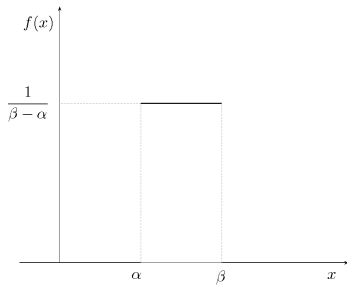
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \alpha, \\ \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} & \alpha < x < \beta, \\ 1 & x \geq \beta. \end{cases}$$

Distribuční funkci náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením dostaneme

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{\alpha}^x \frac{1}{\beta - \alpha} dt = \dots = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} \quad \text{pro } \alpha < x < \beta.$$

Celkový tvar distribuční funkce je

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \alpha, \\ \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} & \alpha < x < \beta, \\ 1 & x \geq \beta. \end{cases}$$



Obrázek: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $R(\alpha, \beta)$

Následující tabulka uvádí hodnoty některých číselných charakteristik rovnoměrného rozdělení.

$E(X)$	$D(X)$	$\alpha_3(X)$	$\alpha_4(X)$	kvantily x_p	$Me(X)$
$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2$	0	-1,2	$\alpha + P(\beta - \alpha)$	$\frac{\alpha+\beta}{2}$

Příklady: doba čekání na nastoupení jevu, který se v pravidelných intervalech opakuje (doba čekání na vlak metra, na dodávku zboží, pokud se pravidelně opakují), chyby při zaokrouhlování čísel, ...

Následující tabulka uvádí hodnoty některých číselných charakteristik rovnoměrného rozdělení.

$E(X)$	$D(X)$	$\alpha_3(X)$	$\alpha_4(X)$	kvantily x_p	$Me(X)$
$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2$	0	-1,2	$\alpha + P(\beta - \alpha)$	$\frac{\alpha+\beta}{2}$

Příklady: doba čekání na nastoupení jevu, který se v pravidelných intervalech opakuje (doba čekání na vlak metra, na dodávku zboží, pokud se pravidelně opakují), chyby při zaokrouhlování čísel, ...

Použití při výpočtech:

- $P(X \leq x_0) = F(x_0) = \frac{x_0 - \alpha}{\beta - \alpha}$
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \frac{x_2 - \alpha}{\beta - \alpha} - \frac{x_1 - \alpha}{\beta - \alpha}$

Použití při výpočtech:

- $P(X \leq x_0) = F(x_0) = \frac{x_0 - \alpha}{\beta - \alpha}$
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \frac{x_2 - \alpha}{\beta - \alpha} - \frac{x_1 - \alpha}{\beta - \alpha}$

Tramvaje jezdí v pravidelných intervalech po 10 minutách. Cestující přijde na zastávku v libovolném okamžiku. Náhodná veličina představuje dobu čekání na příjezd tramvaje.

- Určete typ rozdělení dané náhodné veličiny a popište ji pomocí funkce hustoty a distribuční funkce, funkce vyjádřete matematicky i graficky.
- Určete pravděpodobnost, že cestující bude čekat nejvýše 5 minut, alespoň 3 minuty, právě 7 minut.
- Určete střední hodnotu, medián, rozptyl, směrodatnou odchylku a 90 % kvantil.

Tramvaje jezdí v pravidelných intervalech po 10 minutách. Cestující přijde na zastávku v libovolném okamžiku. Náhodná veličina představuje dobu čekání na příjezd tramvaje.

- Určete typ rozdělení dané náhodné veličiny a popište ji pomocí funkce hustoty a distribuční funkce, funkce vyjádřete matematicky i graficky.
- Určete pravděpodobnost, že cestující bude čekat nejvýše 5 minut, alespoň 3 minuty, právě 7 minut.
- Určete střední hodnotu, medián, rozptyl, směrodatnou odchylku a 90 % kvantil.

Tramvaje jezdí v pravidelných intervalech po 10 minutách. Cestující přijde na zastávku v libovolném okamžiku. Náhodná veličina představuje dobu čekání na příjezd tramvaje.

- Určete typ rozdělení dané náhodné veličiny a popište ji pomocí funkce hustoty a distribuční funkce, funkce vyjádřete matematicky i graficky.
- Určete pravděpodobnost, že cestující bude čekat nejvýše 5 minut, alespoň 3 minuty, právě 7 minut.
- Určete střední hodnotu, medián, rozptyl, směrodatnou odchylku a 90 % kvantil.

Daná náhodná veličina má rovnoměrné rozdělení $X \sim R(0, 10)$.

Funkce hustoty pravděpodobnosti má tvar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 0 < x < 10, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

distribuční funkce je potom

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{x}{10} & 0 < x < 10, \\ 1 & x \geq 10. \end{cases}$$

Daná náhodná veličina má rovnoměrné rozdělení $X \sim R(0, 10)$.
Funkce hustoty pravděpodobnosti má tvar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 0 < x < 10, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

distribuční funkce je potom

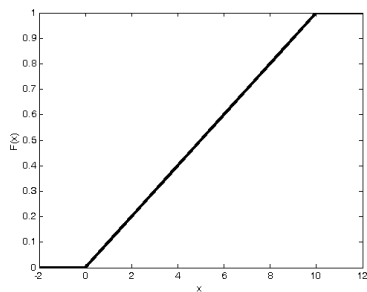
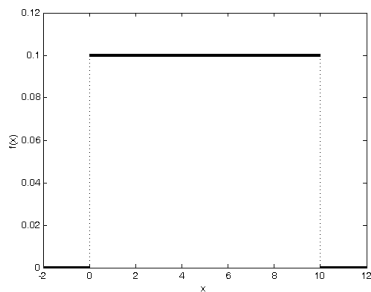
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{x}{10} & 0 < x < 10, \\ 1 & x \geq 10. \end{cases}$$

Daná náhodná veličina má rovnoměrné rozdělení $X \sim R(0, 10)$.
Funkce hustoty pravděpodobnosti má tvar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 0 < x < 10, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

distribuční funkce je potom

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{x}{10} & 0 < x < 10, \\ 1 & x \geq 10. \end{cases}$$



Obrázek: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $R(0, 10)$

Pravděpodobnost, že cestující bude čekat

- nejvýše 5 minut

$$P(X \leq 5) = \int_0^5 \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10} [x]_0^5 = 0,5$$

nebo pomocí distribuční funkce

$$P(X \leq 5) = F(5) = \frac{5}{10} = 0,5$$

- alespoň 3 minuty

$$P(X \geq 3) = \int_3^{10} \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10} [x]_3^{10} = 0,7$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = \\ &= 1 - \frac{3}{10} = 0,7 \end{aligned}$$

- právě 7 minut

$$P(X = 7) = 0$$

Pravděpodobnost, že cestující bude čekat

- nejvýše 5 minut

$$P(X \leq 5) = \int_0^5 \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10} [x]_0^5 = 0,5$$

nebo pomocí distribuční funkce

$$P(X \leq 5) = F(5) = \frac{5}{10} = 0,5$$

- alespoň 3 minuty

$$P(X \geq 3) = \int_3^{10} \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10} [x]_3^{10} = 0,7$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = \\ &= 1 - \frac{3}{10} = 0,7 \end{aligned}$$

- právě 7 minut

$$P(X = 7) = 0$$

Pravděpodobnost, že cestující bude čekat

- nejvýše 5 minut

$$P(X \leq 5) = \int_0^5 \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10} [x]_0^5 = 0,5$$

nebo pomocí distribuční funkce

$$P(X \leq 5) = F(5) = \frac{5}{10} = 0,5$$

- alespoň 3 minuty

$$P(X \geq 3) = \int_3^{10} \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10} [x]_3^{10} = 0,7$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = \\ &= 1 - \frac{3}{10} = 0,7 \end{aligned}$$

- právě 7 minut

$$P(X = 7) = 0$$

- střední hodnota $E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{10}{2} = 5$
- medián $Me(X) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{10}{2} = 5$
- rozptyl $D(X) = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2 = \frac{1}{12}(10 - 0)^2 = \frac{100}{12} = 8,333$
- směrodatná odchylka $\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{100}{12}} = 2,887$
- 90 % kvantil $x_{0,90} = \alpha + 0,90(\beta - \alpha) = 0,9 \cdot 10 = 9$

- střední hodnota $E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{10}{2} = 5$
- medián $Me(X) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{10}{2} = 5$
- rozptyl $D(X) = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2 = \frac{1}{12}(10 - 0)^2 = \frac{100}{12} = 8,333$
- směrodatná odchylka $\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{100}{12}} = 2,887$
- 90 % kvantil $x_{0,90} = \alpha + 0,90(\beta - \alpha) = 0,9 \cdot 10 = 9$

- střední hodnota $E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{10}{2} = 5$
- medián $Me(X) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{10}{2} = 5$
- rozptyl $D(X) = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2 = \frac{1}{12}(10 - 0)^2 = \frac{100}{12} = 8,333$
- směrodatná odchylka $\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{100}{12}} = 2,887$
- 90 % kvantil $x_{0,90} = \alpha + 0,90(\beta - \alpha) = 0,9 \cdot 10 = 9$

- střední hodnota $E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{10}{2} = 5$
- medián $Me(X) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{10}{2} = 5$
- rozptyl $D(X) = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2 = \frac{1}{12}(10 - 0)^2 = \frac{100}{12} = 8,333$
- směrodatná odchylka $\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{100}{12}} = 2,887$
- 90 % kvantil $x_{0,90} = \alpha + 0,90(\beta - \alpha) = 0,9 \cdot 10 = 9$

- střední hodnota $E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{10}{2} = 5$
- medián $Me(X) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{10}{2} = 5$
- rozptyl $D(X) = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2 = \frac{1}{12}(10 - 0)^2 = \frac{100}{12} = 8,333$
- směrodatná odchylka $\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{100}{12}} = 2,887$
- 90 % kvantil $x_{0,90} = \alpha + 0,90(\beta - \alpha) = 0,9 \cdot 10 = 9$

Definice

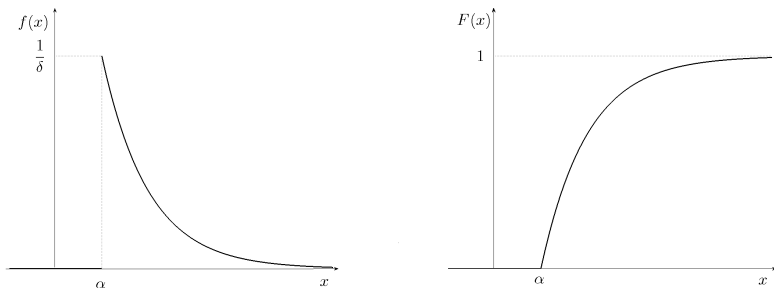
Náhodná veličina X má exponenciální rozdělení $Ex(\alpha, \delta)$ právě tehdy, když má funkce hustoty pravděpodobnosti tvar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} e^{-\frac{x-\alpha}{\delta}} & x > \alpha, \\ 0 & x \leq \alpha, \end{cases}$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}, \delta > 0$.

Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x-\alpha}{\delta}} & x > \alpha, \\ 0 & x \leq \alpha. \end{cases}$$



Obrázek: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $Ex(\alpha, \delta)$

Následující tabulka uvádí hodnoty některých číselných charakteristik exponenciálního rozdělení.

$E(X)$	$D(X)$	$\alpha_3(X)$	$\alpha_4(X)$	kvantily x_P	$Me(X)$
$\alpha + \delta$	δ^2	2	6	$\alpha - \delta \ln(1 - P)$	$\alpha + \delta \ln 2$

Příklady: teorie hromadné obsluhy, teorie spolehlivosti, teorie obnovy, doba čekání na obsluhu, životnost zařízení, ...

Následující tabulka uvádí hodnoty některých číselných charakteristik exponenciálního rozdělení.

$E(X)$	$D(X)$	$\alpha_3(X)$	$\alpha_4(X)$	kvantily x_P	$Me(X)$
$\alpha + \delta$	δ^2	2	6	$\alpha - \delta \ln(1 - P)$	$\alpha + \delta \ln 2$

Příklady: teorie hromadné obsluhy, teorie spolehlivosti, teorie obnovy, doba čekání na obsluhu, životnost zařízení, ...

Použití při výpočtech:

- $P(X \leq x_0) = F(x_0) = 1 - e^{-\frac{x_0 - \alpha}{\delta}}$
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = e^{-\frac{x_1 - \alpha}{\delta}} - e^{-\frac{x_2 - \alpha}{\delta}}$

Použití při výpočtech:

- $P(X \leq x_0) = F(x_0) = 1 - e^{-\frac{x_0 - \alpha}{\delta}}$
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = e^{-\frac{x_1 - \alpha}{\delta}} - e^{-\frac{x_2 - \alpha}{\delta}}$

Bylo zjištěno, že doba čekání na číšníka v restauracích určitého typu je náhodná veličina, která má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 5 minut a směrodatnou odchylkou 2 minuty. Nakreslete graf funkce hustoty a distribuční funkce. Určete pravděpodobnost, že doba čekání nebude větší než 5 minut.

Pro exponenciální rozdělení platí $E(X) = \alpha + \delta$ a $D(X) = \delta^2$, dostáváme tedy

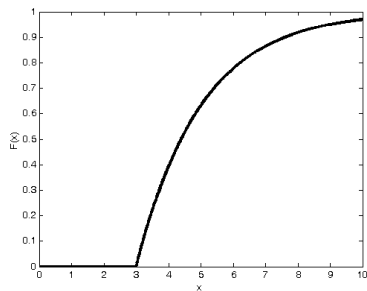
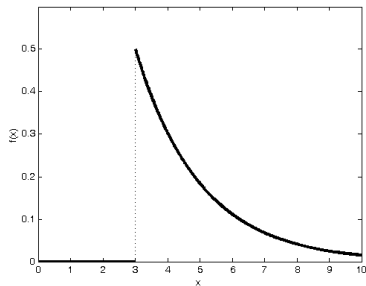
$$\begin{array}{l} \alpha + \delta = 5 \\ \delta = 2 \end{array} \Rightarrow \alpha = 3, \delta = 2$$

$$X \sim \text{Ex}(3, 2)$$

Pro exponenciální rozdělení platí $E(X) = \alpha + \delta$ a $D(X) = \delta^2$, dostáváme tedy

$$\begin{array}{l} \alpha + \delta = 5 \\ \delta = 2 \end{array} \Rightarrow \alpha = 3, \delta = 2$$

$$X \sim \text{Ex}(3, 2)$$



Obrázek: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $Ex(\alpha, \delta)$

Pravděpodobnost, že doba čekání nebude větší než 5 minut je rovna

$$P(X \leq 5) = F(5) = 1 - e^{-\frac{5-3}{2}} = 1 - e^{-1} = 0,632.$$

Definice

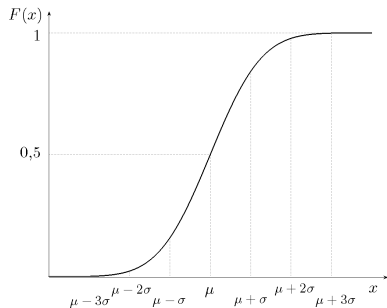
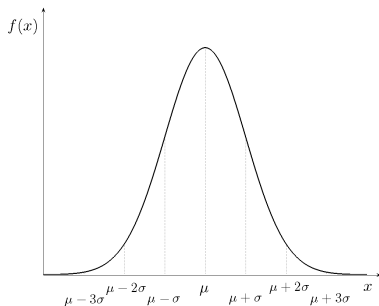
Náhodná veličina X má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ právě tehdy, když má funkce hustoty pravděpodobnosti tvar

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}$$

kde $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$.

Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}$$



Obrázek: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

Následující tabulka uvádí hodnoty některých číselných charakteristik normálního rozdělení.

$E(X)$	$D(X)$	$\alpha_3(X)$	$\alpha_4(X)$	kvantily x_p	$Me(X)$	$Mo(X)$
μ	σ^2	0	0	$\mu + \sigma u_p$	μ	μ

u_p ... kvantil rozdělení $N(0, 1)$.

Pro náhodnou veličinu s normálním rozdělením platí:

- $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0,683$
- $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0,954$
- $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0,997$

Pro náhodnou veličinu s normálním rozdělením platí:

- $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0,683$
- $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0,954$
- $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0,997$

Pro náhodnou veličinu s normálním rozdělením platí:

- $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0,683$
- $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0,954$
- $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0,997$

Mějme náhodnou veličinu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. **Normovaná náhodná veličina** U vzniklá transformací

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

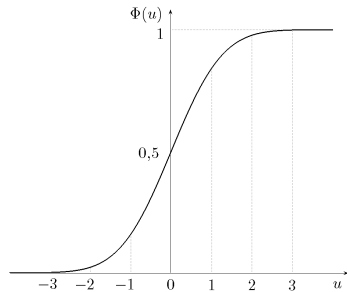
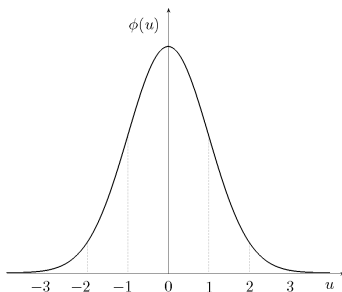
má normální rozdělení se střední hodnotou 0 rozptylem 1, píšeme $U \sim N(0, 1)$.

Funkce hustoty má tvar

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \quad \text{pro } u \in \mathbb{R},$$

distribuční funkce

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^u \phi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{pro } u \in \mathbb{R}$$



Obrázek: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $N(0, 1)$

Následující tabulka uvádí hodnoty některých číselných charakteristik normovaného normálního rozdělení.

$E(X)$	$D(X)$	$\alpha_3(X)$	$\alpha_4(X)$	kvantily x_P	$Me(X)$	$Mo(X)$
0	1	0	0	u_P	0	0

Hodnoty u_P jsou tabelovány, pro $P < 0,5$ platí $u_P = -u_{1-P}$.

Hodnoty distribuční funkce jsou pro kladné hodnoty tabelovány, pro záporné hodnoty platí

$$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u).$$

Jestliže $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $U \sim N(0, 1)$, pak distribuční funkci náhodné veličiny X určíme pomocí distribuční funkce náhodné veličiny U .

$$\begin{aligned} F(x_0) &= P(X \leq x_0) = P(X - \mu \leq x_0 - \mu) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right) = \\ &= P\left(U \leq \frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Hodnoty distribuční funkce jsou pro kladné hodnoty tabelovány, pro záporné hodnoty platí

$$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u).$$

Jestliže $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $U \sim N(0, 1)$, pak distribuční funkci náhodné veličiny X určíme pomocí distribuční funkce náhodné veličiny U .

$$\begin{aligned} F(x_0) &= P(X \leq x_0) = P(X - \mu \leq x_0 - \mu) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right) = \\ &= P\left(U \leq \frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Kvantily náhodné veličiny X se určují pomocí kvantilů náhodné veličiny U , které jsou v tabulkách (u_p), platí

$$F(x_p) = \Phi\left(\frac{x_p - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(u_p),$$

odkud

$$u_p = \frac{x_p - \mu}{\sigma} \Rightarrow x_p = \mu + \sigma u_p.$$

Použití při výpočtech:

- $P(X \leq x_0) = F(x_0) = \Phi\left(\frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right)$
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$

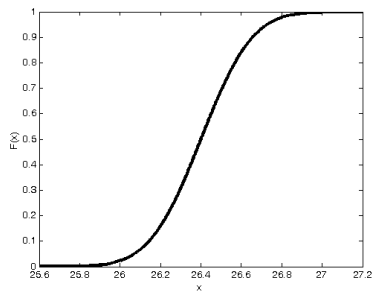
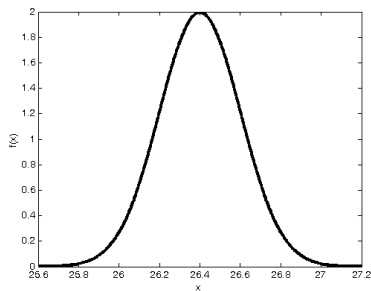
Použití při výpočtech:

- $P(X \leq x_0) = F(x_0) = \Phi\left(\frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right)$
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$

Při kontrole jakosti přebíráme součástku tehdy, jestliže se její rozměr pohybuje v mezích 26–27 mm. Rozměry součástek mají normální rozdělení se střední hodnotou $\mu = 26,4$ mm a směrodatnou odchylkou $\sigma = 0,2$ mm. Jaká je pravděpodobnost, že rozměr součástky náhodně vybrané ke kontrole bude v požadovaných mezích?

Náhodná veličina X udávající rozměr součástky má rozdělení $X \sim N(26,4; 0,2^2)$. Máme určit pravděpodobnost, že se tento rozměr bude nacházet v rozmezí 26–27 mm, tedy

$$\begin{aligned} P(26 \leq X \leq 27) &= F(27) - F(26) = \Phi\left(\frac{27-26,4}{0,2}\right) - \Phi\left(\frac{26-26,4}{0,2}\right) = \\ &= \Phi(3) - \Phi(-2) = \Phi(3) - (1 - \Phi(2)) = \\ &= 0,99865 - (1 - 0,97725) = 0,9759 \end{aligned}$$



Obrázek: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $N(26,4; 0,04)$

Nechť X je nezáporná náhodná veličina. Má-li náhodná veličina $\ln X$ normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, potom náhodná veličina X má logaritmicko-normální rozdělení $LN(\mu, \sigma^2)$.

Definice

Náhodná veličina X má logaritmicko-normální rozdělení $LN(\mu, \sigma^2)$ právě tehdy, když má funkce hustoty pravděpodobnosti tvar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0, \end{cases}$$

kde $\mu \geq 0$, $\sigma > 0$.

Následující tabulka uvádí hodnoty některých číselných charakteristik log-normálního rozdělení.

$E(X)$	$D(X)$	$\alpha_3(X)$	$\alpha_4(X)$	kvantily x_p	$Mo(X)$
$e^{\mu+\sigma^2/2}$	$e^{2\mu}\omega(\omega-1)$	$\sqrt{\omega-1}(\omega+2)$	$\omega^4+2\omega^3+3\omega^2-6$	$e^{\mu+\sigma u_p}$	$e^{\mu-\sigma^2}$

kde $\omega = e^{\sigma^2}$

Použití: logaritmicko-normální rozdělení se uplatňuje jako model příjmových a mzdových rozdělení, doby obnovy, opravy, výměny zařízení, velikosti částic sypkých materiálů, v teorii spolehlivosti, ...

Následující tabulka uvádí hodnoty některých číselných charakteristik log-normálního rozdělení.

$E(X)$	$D(X)$	$\alpha_3(X)$	$\alpha_4(X)$	kvantily x_p	$Mo(X)$
$e^{\mu+\sigma^2/2}$	$e^{2\mu}\omega(\omega-1)$	$\sqrt{\omega-1}(\omega+2)$	$\omega^4+2\omega^3+3\omega^2-6$	$e^{\mu+\sigma u_p}$	$e^{\mu-\sigma^2}$

kde $\omega = e^{\sigma^2}$

Použití: logaritmicko-normální rozdělení se uplatňuje jako model příjmových a mzdových rozdělení, doby obnovy, opravy, výměny zařízení, velikosti částic sypkých materiálů, v teorii spolehlivosti, ...

Má-li náhodná veličina X log-normální rozdělení $X \sim LN(\mu, \sigma)$, pak transformovaná náhodná veličina

$$U = \frac{\ln X - \mu}{\sigma}$$

má normované normální rozdělení $U \sim N(0, 1)$.

Potom platí

$$F(x_0) = \Phi\left(\frac{\ln x_0 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(u),$$

kde $\Phi(u)$ je distribuční funkce $N(0, 1)$.

Má-li náhodná veličina X log-normální rozdělení $X \sim LN(\mu, \sigma)$, pak transformovaná náhodná veličina

$$U = \frac{\ln X - \mu}{\sigma}$$

má normované normální rozdělení $U \sim N(0, 1)$.
Potom platí

$$F(x_0) = \Phi\left(\frac{\ln x_0 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(u),$$

kde $\Phi(u)$ je distribuční funkce $N(0, 1)$.

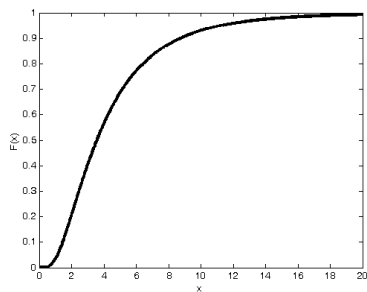
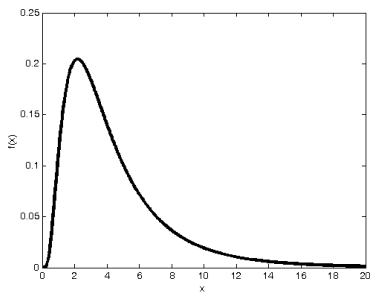
Použití při výpočtech:

- $P(X \leq x_0) = F(x_0) = \Phi\left(\frac{\ln x_0 - \mu}{\sigma}\right)$
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \Phi\left(\frac{\ln x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma}\right)$

Použití při výpočtech:

- $P(X \leq x_0) = F(x_0) = \Phi\left(\frac{\ln x_0 - \mu}{\sigma}\right)$
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \Phi\left(\frac{\ln x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma}\right)$

Předpokládejme, že odstupy mezi jedoucými vozidly na dálnici (v sekundách) představují náhodnou veličinu, která má log-normální rozdělení s parametry $\mu = 1,27$ a $\sigma^2 = 0,49$. Určete podíl vozidel, jejichž odstupy budou 4 až 5 sekund.



Obrázek: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $LN(1,27; 0,7)$

Pravděpodobnost, že odstupy budou 4 až 5 sekund je

$$\begin{aligned}P(4 \leq X \leq 5) &= F(5) - F(4) = \Phi\left(\frac{\ln 5 - 1,27}{0,7}\right) - \Phi\left(\frac{\ln 4 - 1,27}{0,7}\right) = \\&= 0,68613 - 0,56597 = 0,12016\end{aligned}$$

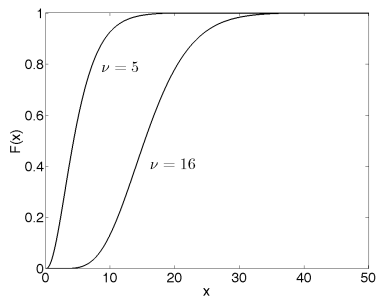
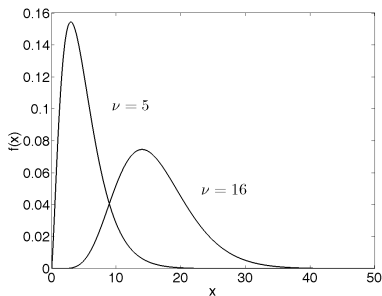
Definice

Pearsonovo rozdělení náhodné veličiny χ^2 s ν stupni volnosti, píšeme $\chi^2 \sim \chi^2(\nu)$ představuje rozdělení náhodné veličiny

$$\chi^2 = U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_\nu^2,$$

kde $U_1, U_2, \dots, U_\nu$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $N(0, 1)$.

Parametr ν (počet stupňů volnosti) zpravidla vyjadřuje počet nezávislých pozorování zmenšený o počet lineárních podmínek na pozorování kladených.



Obrázek: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $\chi^2(5)$ a $\chi^2(16)$

V matematické statistice se často používají kvantily χ_P^2 tohoto rozdělení. Jsou zpravidla tabelované pro různé hodnoty P a stupně volnosti $\nu \leq 30$. Jestliže $\nu > 30$, lze použít ke stanovení přibližné hodnoty kvantilu vztah

$$\chi_P^2(\nu) \approx \frac{1}{2} \left(\sqrt{2\nu - 1} + u_P \right)^2,$$

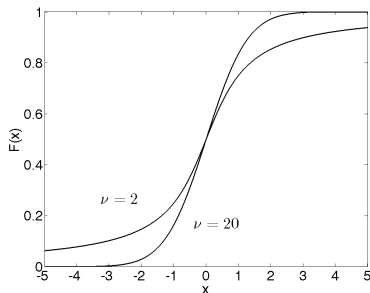
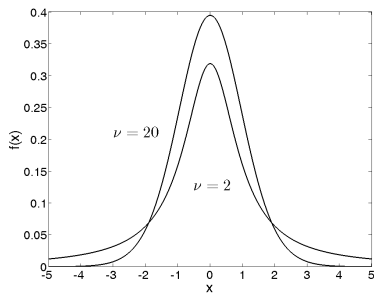
kde u_P je kvantil rozdělení $N(0, 1)$.

Definice

Má-li náhodná veličina U normované normální rozdělení $U \sim N(0, 1)$, náhodná veličina χ^2 Pearsonovo rozdělení $\chi^2 \sim \chi^2(\nu)$ a jsou-li U a χ^2 nezávislé, pak náhodná veličina

$$t = \frac{U}{\sqrt{\frac{\chi^2}{\nu}}}$$

má Studentovo rozdělení s ν stupni volnosti, píšeme $t \sim t(\nu)$.



Obrázek: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $t(2)$ a $t(20)$

Funkce hustoty pravděpodobnosti je symetrická kolem střední hodnoty $E(t) = 0$.

Kvantily Studentova rozdělení jsou pro $\nu \leq 30$ a $P > 0,5$ tabelovány, pro $P < 0,5$ platí vztah

$$t_P = -t_{1-P}.$$

Je-li $\nu > 30$, lze kvantily Studentova rozdělení nahradit kvantily normovaného normálního rozdělení $N(0, 1)$

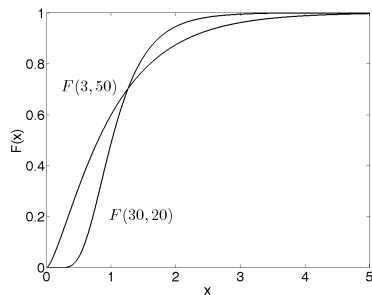
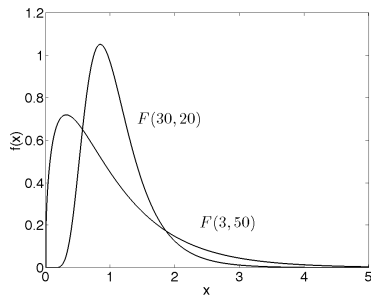
$$t_P \approx u_P.$$

Definice

Má-li náhodná veličina χ_1^2 rozdělení $\chi_1^2 \sim \chi^2(\nu_1)$ s ν_1 stupni volnosti a náhodná veličina χ_2^2 rozdělení $\chi_2^2 \sim \chi^2(\nu_2)$ s ν_2 stupni volnosti a jsou-li χ_1^2 a χ_2^2 nezávislé, pak náhodná veličina

$$F = \frac{\chi_1^2}{\nu_1} : \frac{\chi_2^2}{\nu_2}$$

má Fisherovo-Snedecorovo rozdělení s ν_1 a ν_2 stupni volnosti a píšeme $F \sim F(\nu_1, \nu_2)$.



Obrázek: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $F(30, 20)$ a $F(3, 50)$

Fisherovo-Snedecorovo rozdělení je asymetrické.

Kvantily F rozdělení jsou pro $P > 0,5$ tabelovány, pro $P < 0,5$ se určí ze vztahu

$$F_P(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{F_{1-P}(\nu_2, \nu_1)}.$$

- MANN, P.S. Introductory Statistics. 6th edition. Hoboken: Wiley, 2007. ISBN 978-0-471-75530-2.
- MOUČKA, J., RÁDL, P. Matematika pro studenty ekonomie. 1. vyd. Grada 2010. ISBN 978-80-247-3260-2.
- NEUBAUER, J., SEDLAČÍK, M., KŘÍŽ, O. Základy statistiky – Aplikace v technických a ekonomických oborech. Grada 2012. ISBN: 978-80-247-4273-1.
- ŘEZANKOVÁ, H. Analýza dat z dotazníkových šetření. 2. vydání, Professional Publishing, 2010. ISBN: 9788074310195.

- AGRESTI, A. Categorical Data Analysis. Second Edition. Wiley 2002. ISBN: 0-471-36093-7.
- ANDĚL, J. Statistické metody. 3. vydání. Praha: Matfyzpress, 2003. ISBN 80-86732-08-8.
- ANDĚL, J. Základy matematické statistiky. 2. vyd. Praha: Matfyzpress, 2007, 358 s. ISBN 978-80-7378-001-2.
- VÁGNER, M. Integrální počet funkcí jedné proměnné. 1. vydání. Brno: UO, 2005, 126 s. ISBN 80-7231-025-9.
- VÁGNER, M., KAŠTÁNKOVÁ, V. Posloupnosti a řady. 1. vydání. Brno: UO, 2006. ISBN 80-7231-131-X.