Studijní text

Název předmětu: PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

Garant předmětu: RNDr. Marek Sedlačík, Ph.D.

Téma: Modely spojité náhodné veličiny

Obsah

$E(X)$	$D(X)$	$\alpha_3(X)$	$\alpha_4(X)$	kvantily x_P	$Me(X)$
$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^2$	0	$-1{,}2$	$\alpha + P(\beta-\alpha)$	$\frac{\alpha+\beta}{2}$

Tabulka 1: Číselné charakteristiky – rovnoměrné rozdělení

1 Rovnoměrné rozdělení

Definice 1.1 Náhodná veličina X má **rovnoměrné rozdělení** $R(\alpha,\beta)$ právě tehdy, když má funkce hustoty pravděpodobnosti tvar

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\alpha} & \alpha < x < \beta, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

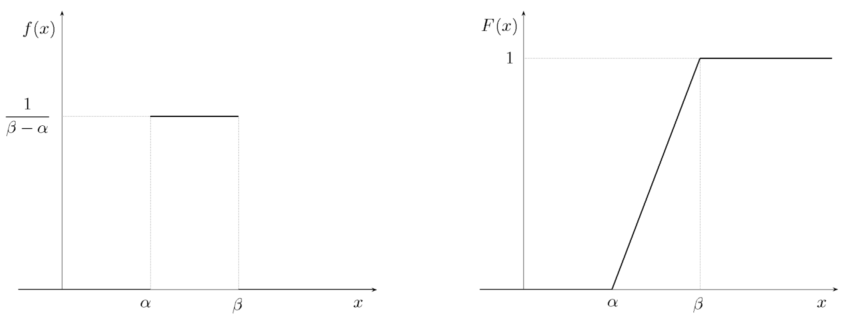
kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$.

Příslušnou distribuční funkci náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením (obrázek 1) dostaneme výpočtem

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{\alpha}^{x} \frac{1}{\beta-\alpha}dt = \cdots = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} \quad \text{pro} \quad \alpha < x < \beta.$$

Celkový tvar distribuční funkce je

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le \alpha, \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \alpha < x < \beta, \\ 1 & x \ge \beta. \end{cases}$$



Obrázek 1: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $R(\alpha,\beta)$

Tabulka 1 uvádí hodnoty některých číselných charakteristik rovnoměrného rozdělení. Příkladem náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením je např. doba čekání na nastoupení jevu, který se v pravidelných intervalech opakuje (doba čekání na vlak metra, na dodávku zboží, pokud se pravidelně opakují), chyby při zaokrouhlování čísel, apod.

Při výpočtech používáme zejména

- $P(X \leq x_0) = F(x_0) = \frac{x_0-\alpha}{\beta-\alpha}$,
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \frac{x_2-\alpha}{\beta-\alpha} - \frac{x_1-\alpha}{\beta-\alpha}$.

Příklad 1.1 Tramvaje jezdí v pravidelných intervalech po 10 minutách. Cestující přijde na zastávku v libovolném okamžiku. Náhodná veličina představuje dobu čekání na příjezd tramvaje.

- Určete typ rozdělení dané náhodné veličiny a popište ji pomocí funkce hustoty a distribuční funkce, funkce vyjádřete matematicky i graficky.
- Určete pravděpodobnost, že cestující bude čekat nejvýše 5 minut, alespoň 3 minuty, právě 7 minut.
- Určete střední hodnotu, medián, rozptyl, směrodatnou odchylku a 90 % kvantil.

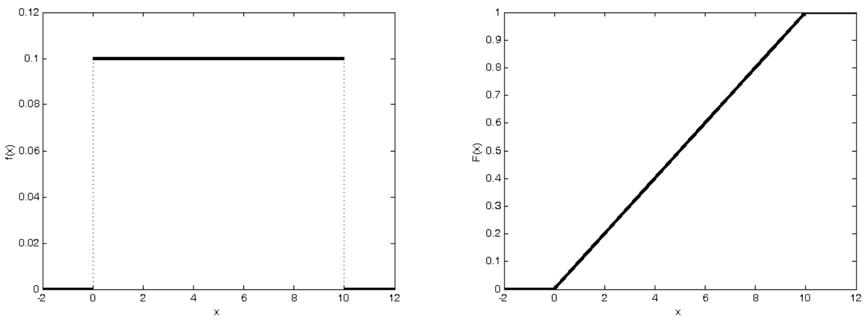
Řešení: Daná náhodná veličina má rovnoměrné rozdělení $X \sim R(0, 10)$. Funkce hustoty pravděpodobnosti má tedy tvar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 0 < x < 10, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

a odpovídající distribuční funkce (obrázek 2) je potom

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{x}{10} & 0 < x < 10, \\ 1 & x \geq 10. \end{cases}$$

Pravděpodobnost, že cestující bude čekat



Obrázek 2: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $R(0, 10)$

- nejvýše 5 minut $P(X \leq 5) = \int\limits_0^5 \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10}[x]_0^5 = 0{,}5$ nebo pomocí distribuční funkce $P(X \leq 5) = F(5) = \frac{5}{10} = 0{,}5$,
- alespoň 3 minuty $P(X \geq 3) = \int\limits_3^{10} \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10}[x]_3^{10} = 0{,}7$ nebo $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - \frac{3}{10} = 0{,}7$,
- právě 7 minut $P(X = 7) = 0$.

Dále určíme číselné charakteristiky

- střední hodnota $E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{10}{2} = 5$,

$E(X)$	$D(X)$	$\alpha_3(X)$	$\alpha_4(X)$	kvantily x_P	$Me(X)$
$\alpha+\delta$	δ^2	2	6	$\alpha-\delta\ln(1-P)$	$\alpha+\delta\ln 2$

Tabulka 2: Číselné charakteristiky – exponenciální rozdělení

- medián $Me(X) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{10}{2} = 5$,
- rozptyl $D(X) = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^2 = \frac{1}{12}(10-0)^2 = \frac{100}{12} = 8{,}333$,
- směrodatná odchylka $\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{100}{12}} = 2{,}887$,
- 90 % kvantil $x_{0,90} = \alpha + 0{,}90(\beta-\alpha) = 0{,}9\cdot 10 = 9$.

2 Exponenciální rozdělení

Definice 2.1 Náhodná veličina X má **exponenciální rozdělení** $Ex(\alpha,\delta)$ právě tehdy, když má funkce hustoty pravděpodobnosti tvar

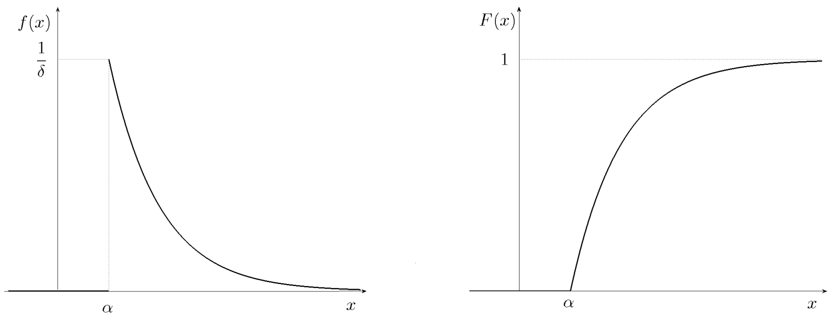
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\delta}e^{-\frac{x-\alpha}{\delta}} & x > \alpha, \\ 0 & x \le \alpha, \end{cases}$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}, \delta > 0$.

Distribuční funkce (obrázek 3) má tvar

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x-\alpha}{\delta}} & x > \alpha, \\ 0 & x \le \alpha. \end{cases}$$

Tabulka 2 uvádí hodnoty některých číselných charakteristik exponenciálního rozdělení. Příkladem



Obrázek 3: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $Ex(\alpha,\delta)$

náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením je např. doba čekání na obsluhu, životnost zařízení, apod. Nachází uplatnění v teorii hromadné obsluhy, teorii spolehlivosti, teorii obnovy, při modelování rizikových jevů apod.

Při výpočtech používáme zejména

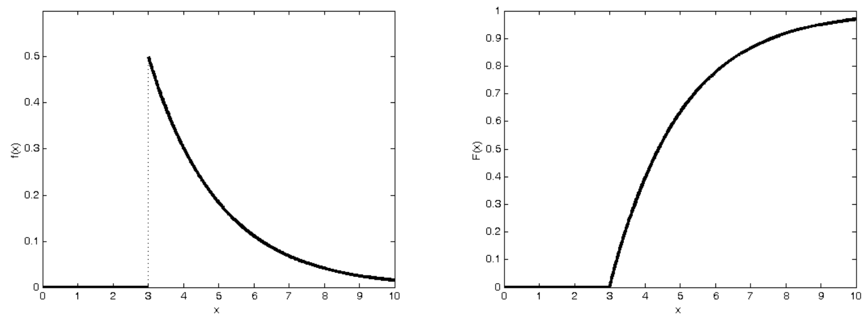
- $P(X \leq x_0) = F(x_0) = 1 - e^{-\frac{x_0-\alpha}{\delta}}$,
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = e^{-\frac{x_1-\alpha}{\delta}} - e^{-\frac{x_2-\alpha}{\delta}}$.

Příklad 2.1 Bylo zjištěno, že doba čekání na číšníka v restauracích určitého typu je náhodná veličina, která má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 5 minut a směrodatnou odchylkou 2 minuty. Nakreslete graf funkce hustoty a distribuční funkce. Určete pravděpodobnost, že doba čekání nebude větší než 5 minut.

Řešení: Pro exponenciální rozdělení platí $E(X) = \alpha + \delta$ a $D(X) = \delta^2$, dostáváme tedy $X \sim Ex(3, 2)$.

$$\begin{aligned} \alpha + \delta &= 5 \\ \delta &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \alpha = 3, \delta = 2.$$

Graf funkce hustoty a distribuční funkce je na obrázku 4. Pravděpodobnost, že doba čekání nebude



Obrázek 4: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $Ex(3, 2)$

větší než 5 minut je rovna $P(X \leq 5) = F(5) = 1 - e^{-\frac{5-3}{2}} = 1 - e^{-1} = 0{,}632$.

3 Normální rozdělení, normované normální rozdělení

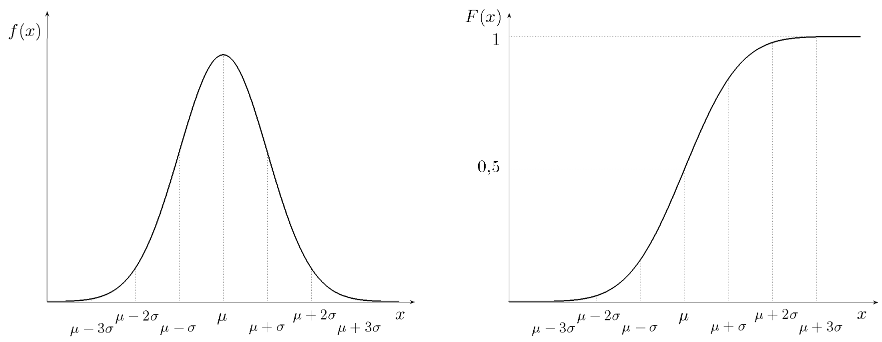
Definice 3.1 Náhodná veličina X má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ právě tehdy, když má funkce hustoty pravděpodobnosti tvar

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{pro} \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$.

Distribuční funkce (obrázek 5) má tvar

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad \text{pro} \quad x \in \mathbb{R}.$$



Obrázek 5: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

$E(X)$	$D(X)$	$\alpha_3(X)$	$\alpha_4(X)$	kvantily x_P	$Me(X)$	$Mo(X)$
μ	σ^2	0	0	$\mu + \sigma u_P$	μ	μ

Tabulka 3: Číselné charakteristiky – normální rozdělení

Tabulka 3 uvádí hodnoty některých číselných charakteristik[1] normálního rozdělení.

Pro náhodnou veličinu s normálním rozdělením platí:

- $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0{,}683$,
- $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}954$,
- $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0{,}997$.

Definice 3.2 Mějme náhodnou veličinu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. **Normovaná náhodná veličina** U vzniklá transformací

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

má normální rozdělení se střední hodnotou 0 rozptylem 1, píšeme $U \sim N(0, 1)$.

Funkce hustoty má tvar

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \quad \text{pro} \quad u \in \mathbb{R},$$

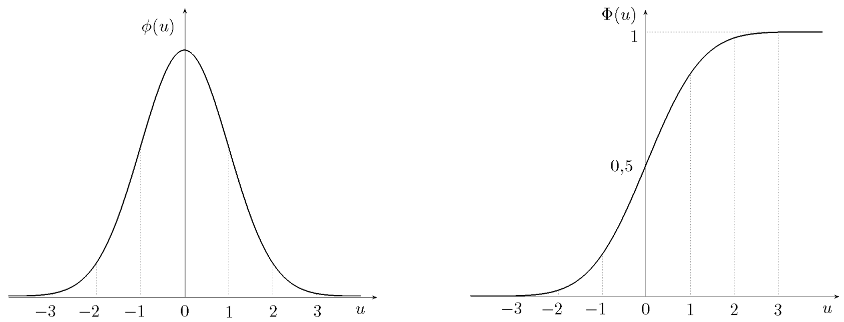
distribuční funkce (obrázek 6)

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} \phi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{pro} \quad u \in \mathbb{R}.$$

Tabulka 4 uvádí hodnoty některých číselných charakteristik[2] normovaného normálního rozdělení. Hodnoty distribuční funkce jsou pro kladné hodnoty tabelovány, pro záporné hodnoty platí

[1] $u_P \ldots$ kvantil rozdělení $N(0, 1)$

[2] Hodnoty u_P jsou tabelovány, pro $P < 0{,}5$ platí $u_P = -u_{1-P}$.



Obrázek 6: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $N(0,1)$

$E(X)$	$D(X)$	$\alpha_3(X)$	$\alpha_4(X)$	kvantily x_P	$Me(X)$	$Mo(X)$
0	1	0	0	u_P	0	0

Tabulka 4: Číselné charakteristiky – normované normální rozdělení

$$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u).$$

Jestliže $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $U \sim N(0,1)$, pak distribuční funkci náhodné veličiny X určíme pomocí distribuční funkce náhodné veličiny U.

$$\begin{aligned} F(x_0) &= P(X \leq x_0) = P(X - \mu \leq x_0 - \mu) = P\left(\tfrac{X-\mu}{\sigma} \leq \tfrac{x_0-\mu}{\sigma}\right) = \\ &= P\left(U \leq \tfrac{x_0-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\tfrac{x_0-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

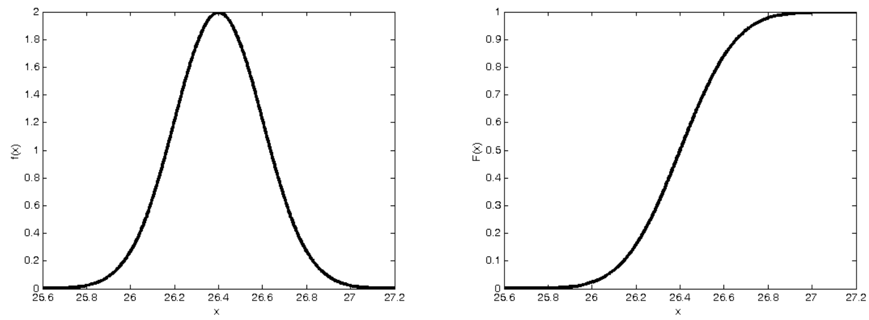
Kvantily náhodné veličiny X se určují pomocí kvantilů náhodné veličiny U, které jsou v tabulkách (u_p), platí $F(x_P) = \Phi\left(\frac{x_P-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(u_P)$, odkud $u_P = \frac{x_P-\mu}{\sigma} \Rightarrow x_P = \mu + \sigma u_P$. Použití při výpočtech:

- $P(X \leq x_0) = F(x_0) = \Phi\left(\frac{x_0-\mu}{\sigma}\right)$,
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$.

Příklad 3.1 Při kontrole jakosti přebíráme součástku tehdy, jestliže se její rozměr pohybuje v mezích 26–27 mm. Rozměry součástek mají normální rozdělení se střední hodnotou $\mu = 26{,}4$ mm a směrodatnou odchylkou $\sigma = 0{,}2$ mm. Jaká je pravděpodobnost, že rozměr součástky náhodně vybrané ke kontrole bude v požadovaných mezích?

Řešení: Náhodná veličina X udávající rozměr součástky má rozdělení $X \sim N(26{,}4; 0{,}2^2)$ (obrázek 7). Máme určit pravděpodobnost, že se tento rozměr bude nacházet v rozmezí 26–27 mm, tedy

$$\begin{aligned} P(26 \leq X \leq 27) &= F(27) - F(26) = \Phi\left(\tfrac{27-26{,}4}{0{,}2}\right) - \Phi\left(\tfrac{26-26{,}4}{0{,}2}\right) = \\ &= \Phi(3) - \Phi(-2) = \Phi(3) - (1 - \Phi(2)) = \\ &= 0{,}99865 - (1 - 0{,}97725) = 0{,}9759. \end{aligned}$$



Obrázek 7: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $N(26{,}4; 0{,}04)$

$E(X)$	$D(X)$	$\alpha_3(X)$	$\alpha_4(X)$	kvantily x_P	$Mo(X)$
$e^{\mu+\sigma^2/2}$	$e^{2\mu}\omega(\omega-1)$	$\sqrt{\omega-1}(\omega+2)$	$\omega^4+2\omega^3+3\omega^2-6$	$e^{\mu+\sigma u_P}$	$e^{\mu-\sigma^2}$

Tabulka 5: Číselné charakteristiky – log-normální rozdělení

4 Log-normální rozdělení

Nechť X je nezáporná náhodná veličina. Má-li náhodná veličina $\ln X$ normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, potom náhodná veličina X má **logaritmicko-normální rozdělení** $LN(\mu, \sigma^2)$.

Definice 4.1 Náhodná veličina X má logaritmicko-normální rozdělení $LN(\mu, \sigma^2)$ právě tehdy, když má funkce hustoty pravděpodobnosti tvar

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0, \end{cases}$$

kde $\mu \geq 0$, $\sigma > 0$.

Tabulka 5 uvádí hodnoty některých číselných charakteristik[3] log-normálního rozdělení. Logaritmicko-normální rozdělení se uplatňuje jako model příjmových a mzdových rozdělení, doby obnovy, opravy, výměny zařízení, velikosti částic sypkých materiálů, v teorii spolehlivosti, apod. Má-li náhodná veličina X log-normální rozdělení $X \sim LN(\mu, \sigma)$, pak transformovaná náhodná veličina

$$U = \frac{\ln X - \mu}{\sigma}$$

má normované normální rozdělení $U \sim N(0, 1)$. Potom platí

$$F(x_0) = \Phi\left(\frac{\ln x_0 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(u),$$

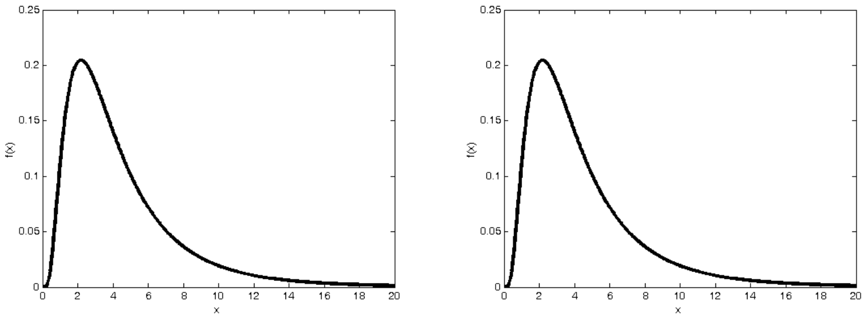
kde $\Phi(u)$ je distribuční funkce $N(0, 1)$. Použití při výpočtech:

[3] $\omega = e^{\sigma^2}$

- $P(X \leq x_0) = F(x_0) = \Phi\left(\frac{\ln x_0 - \mu}{\sigma}\right)$,
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \Phi\left(\frac{\ln x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma}\right)$.

Příklad 4.1 Předpokládejme, že odstupy mezi jedoucími vozidly na dálnici (v sekundách) představují náhodnou veličinu, která má log-normální rozdělení s parametry $\mu = 1{,}27$ a $\sigma^2 = 0{,}49$ (obrázek 8). Určete podíl vozidel, jejichž odstupy budou 4 až 5 sekund.

Řešení: Pravděpodobnost, že odstupy budou 4 až 5 sekund je



Obrázek 8: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $LN(1{,}27; 0{,}7)$

$$P(4 \leq X \leq 5) = F(5) - F(4) = \Phi\left(\frac{\ln 5 - 1{,}27}{0{,}7}\right) - \Phi\left(\frac{\ln 4 - 1{,}27}{0{,}7}\right) = \\ = 0{,}68613 - 0{,}56597 = 0{,}12016.$$

5 Rozdělení odvozená od normálního rozdělení

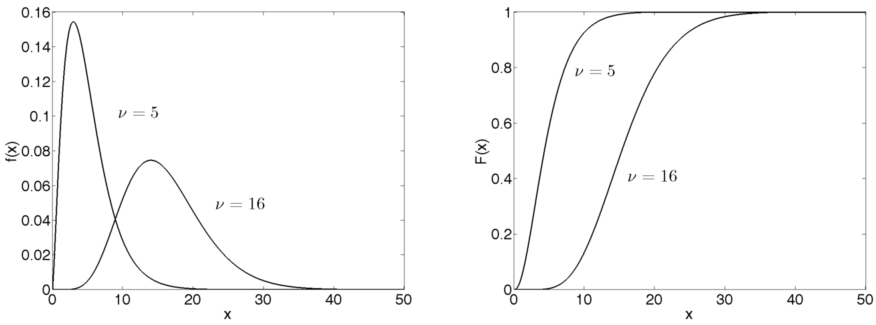
Pro řešení řady praktických statistických úloh mají zvláštní význam rozdělení určitých funkcí normálně rozdělených náhodných veličin. Jedná se o rozdělení χ^2 (Pearsonovo[4]), t (Studentovo) a F (Fisherovo-Snedecorovo[5]). U všech těchto rozdělení budeme značit náhodné veličiny i jejich hodnoty stejně, a to symboly používanými právě pro jednotlivá rozdělení, tj. χ^2, t a F.

5.1 Pearsovo rozdělení

Definice 5.1 Pearsonovo rozdělení náhodné veličiny χ^2 s ν stupni volnosti (např. obrázek 9), píšeme $\chi^2 \sim \chi^2(\nu)$ představuje rozdělení náhodné veličiny

$$\chi^2 = U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_\nu^2,$$

kde $U_1, U_2, \ldots, U_\nu$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $N(0, 1)$.



Obrázek 9: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $\chi^2(5)$ a $\chi^2(16)$

Parametr ν (počet stupňů volnosti) zpravidla vyjadřuje počet nezávislých pozorování zmenšený o počet lineárních podmínek na pozorování kladených. V matematické statistice se často používají kvantily χ^2_P tohoto rozdělení. Jsou zpravidla tabelované pro různé hodnoty P a stupně volnosti $\nu \leq 30$. Jestliže $\nu > 30$, lze použít ke stanovení přibližné hodnoty kvantilu vztah

$$\chi^2_P(\nu) \approx \frac{1}{2}\left(\sqrt{2\nu - 1} + u_P\right)^2,$$

kde u_P je kvantil rozdělení $N(0, 1)$.

5.2 Studentovo rozdělení

Definice 5.2 Má-li náhodná veličina U normované normální rozdělení $U \sim N(0, 1)$, náhodná veličina χ^2 Pearsonovo rozdělení $\chi^2 \sim \chi^2(\nu)$ a jsou-li U a χ^2 nezávislé, pak náhodná veličina

$$t = \frac{U}{\sqrt{\frac{\chi^2}{\nu}}}$$

má **Studentovo rozdělení** s ν stupni volnosti (např. obrázek 10), píšeme $t \sim t(\nu)$.

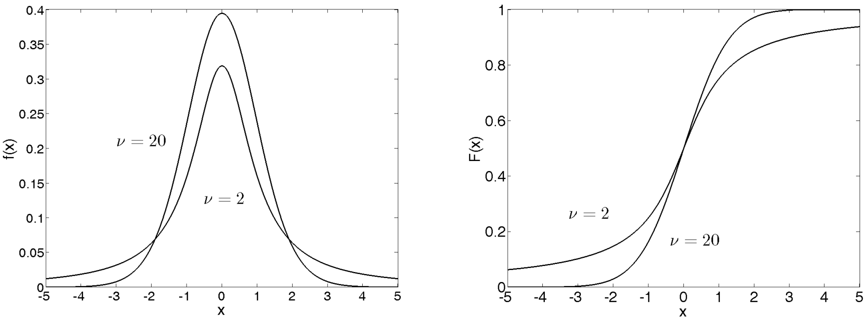
Funkce hustoty pravděpodobnosti je symetrická kolem střední hodnoty $E(t) = 0$. Kvantily Studentova rozdělení jsou pro $\nu \leq 30$ a $P > 0{,}5$ tabelovány, pro $P < 0{,}5$ platí vztah

$$t_P = -t_{1-P}.$$

Je-li $\nu > 30$, lze kvantily Studentova rozdělení nahradit kvantily normovaného normálního rozdělení $N(0, 1)$, tj. $t_p \approx u_P$.

[4] čti „chí kvadrát“ rozdělení, resp. „Pírsnovo“ rozdělení

[5] čti „Fišerovo-Snedekorovo“ rozdělení



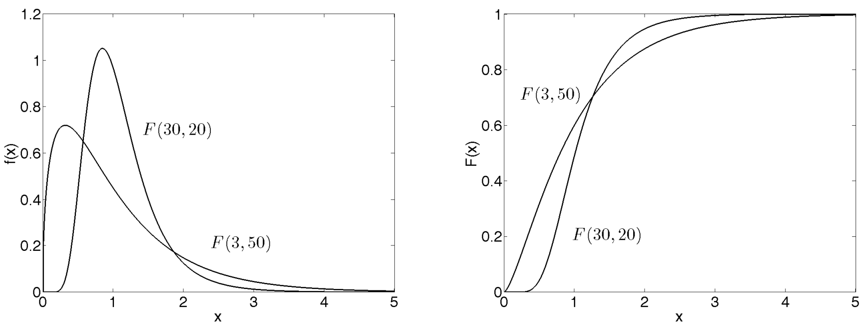
Obrázek 10: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $t(2)$ a $t(20)$

5.3 Fisherovo-Snedecorovo rozdělení

Definice 5.3 Má-li náhodná veličina χ_1^2 rozdělení $\chi_1^2 \sim \chi^2(\nu_1)$ s ν_1 stupni volnosti a náhodná veličina χ_2^2 rozdělení $\chi_2^2 \sim \chi^2(\nu_2)$ s ν_2 stupni volnosti a jsou-li χ_1^2 a χ_2^2 nezávislé, pak náhodná veličina

$$F = \frac{\chi_1^2}{\nu_1} : \frac{\chi_2^2}{\nu_2}$$

má **Fisherovo-Snedecorovo rozdělení** s ν_1 a ν_2 stupni volnosti a píšeme $F \sim F(\nu_1, \nu_2)$.



Obrázek 11: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $F(30, 20)$ a $F(3, 50)$

Fischerovo-Snedecorovo rozdělení je asymetrické (obrázek 11). Kvantily F rozdělení jsou pro $P > 0{,}5$ tabelovány, pro $P < 0{,}5$ se určí ze vztahu

$$F_P(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{F_{1-P}(\nu_2, \nu_1)}.$$

Literatura

Základní

MANN, P.S. Introductory Statistics. 6th edition. Hoboken: Wiley, 2007. ISBN 978-0-471-75530-2.

MOUČKA, J., RÁDL, P. Matematika pro studenty ekonomie. 1. vyd. Grada 2010. ISBN 978-80-247-3260-2.

NEUBAUER, J., SEDLAČÍK, M., KŘÍŽ, O. Základy statistiky – Aplikace v technických a ekonomických oborech. Grada 2012.ISBN: 978-80-247-4273-1.

ŘEZANKOVÁ, H. Analýza dat z dotazníkových šetření. 2. vydání, Professional Publishing, 2010. ISBN: 9788074310195.

Doporučená

AGRESTI, A. Categorical Data Analysis. Second Edition. Wiley 2002. ISBN: 0-471-36093-7.

ANDĚL, J. Statistické metody. 3. vydání. Praha: Matfyzpress, 2003. ISBN 80-86732-08-8.

ANDĚL, J. Základy matematické statistiky. 2. vyd. Praha: Matfyzpress, 2007, 358 s. ISBN 978-80-7378-001-2.

VÁGNER, M. Integrální počet funkcí jedné proměnné. 1. vydání. Brno: UO, 2005,126 s. ISBN 80-7231-025-9.

VÁGNER, M., KAŠTÁNKOVÁ, V. Posloupnosti a řady. 1. vydání. Brno: UO, 2006. ISBN 80-7231-131-X.

Úkoly pro samostatnou práci

1. Autobusy MHD jezdí v pravidelných intervalech po 15 minutách. Cestující přijde na zastávku v libovolném okamžiku. Sledujme náhodnou veličinu představující dobu čekání na příjezd autobusu.
   a) Popište tuto náhodnou veličinu pomocí funkce hustoty a distribuční funkce, funkce vyjádřete matematicky i graficky.
   b) Určete pravděpodobnost, že cestující bude čekat na spoj nejvýše 5 minut, právě 10 minut, nejméně 3 minuty, 3 až 10 minut.
   c) Určete střední hodnotu, medián, rozptyl, směrodatnou odchylku a 90% kvantil doby čekání na autobus.

2. Předpokládejme, že doba mezi příjezdy nákladních automobilů s betonovou směsí na stavbu je náhodnou veličinou, která má exponenciální rozdělení. Minimální doba mezi příjezdy jednotlivých vozidel na stavbu je 5 minut, průměrná doba je 10 minut.
   a) Popište tuto náhodnou veličinu pomocí funkce hustoty a distribuční funkce.
   b) Jaká je pravděpodobnost, že doba mezi příjezdy jednotlivých vozidel bude menší než 7 minut, větší než 11 minut, 7 až 11 minut?
   c) Určete střední hodnotu, směrodatnou odchylku, medián a 20% kvantil doby mezi příjezdy automobilů.

3. Máslo se strojově porcuje a balí na automatu. Dlouhodobým pozorováním bylo zjištěno, že linka produkuje balíčky másla s průměrnou hmotností 246 gramů a směrodatnou odchylkou 8 gramů. Předpokládejme, že hmotnost másla je náhodná veličina s normálním rozdělením.

a) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná kostka másla bude mít hmotnost menší než 250 gramů?
b) Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraná kostka másla bude mít hmotnost větší než 240 gramů.
c) Jaký je v celé produkci másla podíl balení, která projdou výstupní kontrolou, pokud je povolená tolerance od stanovené hmotnosti 250 gramů $\pm$ 10 gramů?

4. Náhodná veličina X má logaritmicko-normální rozdělení $LN(3{,}5; 0{,}36)$.
   a) Vypočítejte hodnotu distribuční funkce $F(x)$ v bodě $x = 16$, střední hodnotu, směrodatnou odchylku, modus, 5% kvantil a koeficient šikmosti této náhodné veličiny.
   b) Určete pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty menší než 20, větší než 30, od 20 do 30. Co platí pro součet těchto pravděpodobností a proč?

5. Náhodná veličina t má Studentovo rozdělení $t(24)$.
   a) Určete 2,5% a 97,5% kvantily náhodné veličiny t.
   b) Určete pravděpodobnost $P(t > -2{,}064)$.

6. Náhodná veličina χ^2 má Pearsonovo rozdělení $\chi^2(15)$.
   a) Určete 5% a 95% kvantily náhodné veličiny χ^2.
   b) Určete pravděpodobnost $P(\chi^2 < 7{,}26)$.

7. Náhodná veličina F má Fisherovo rozdělení $F(12, 7)$.
   a) Určete 5% a 95% kvantily náhodné veličiny F.
   b) Určete pravděpodobnost $P(F < 4{,}666)$.

Řešení:

1. a) $f(x)$: 1/15 pro $0 < x < 15$; 0 jinak; $F(x)$: 0 pro $x \leq 0$; $x/15$ pro $0 < x < 15$; 1 pro $x \geq 15$; b) 0,333; 0; 0,8; 0,467; c) 7,5; 7,5; 18,75; 4,330; 13,5;
2. a) $f(x)$: $\frac{1}{5}e^{-(x-5)/5}$ pro $x > 5$; 0 pro $x \leq 5$; $F(x)$: $1 - e^{-(x-5)/5}$ pro $x > 5$; 0 pro $x \leq 5$; b) 0,330; 0,301; 0,369; c) 10; 5; 8,466; 6,116;
3. a) 0,691; b) 0,773; c) 73,3 %;
4. a) 0,113; 39,646; 26,098; 23,104; 12,343; 2,260; b) 0,200; 0,564; 0,236;
5. a) $-2{,}064$; 2,064; b) 0,975;
6. a) 7,26; 25,0; b) 0,05;
7. a) 0,343; 3,575; b) 0,975.