PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

Zákon velkých čísel a limitní věty

Katedra kvantitativních metod FVL UO Brno

8. PŘEDNÁŠKA

Modely spojité náhodné veličiny

- Rovnoměrné rozdělení
- Exponenciální rozdělení
- Normální a normované normální rozdělení
- Log-normální rozdělení
- Rozdělení odvozená od normálního
    1. Pearsonovo
    2. Studentovo
    3. Fisherovo-Snedecorovo

Rovnoměrné rozdělení

Definice

Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení $R(\alpha, \beta)$ právě tehdy, když má funkce hustoty pravděpodobnosti tvar

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \alpha < x < \beta, \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases}$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$.

Distribuční funkci náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením dostaneme

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{\beta - \alpha} dt = \cdots = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} \quad \text{pro} \quad \alpha < x < \beta.$$

Celkový tvar distribuční funkce je

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \alpha, \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \alpha < x < \beta, \\ 1 & x \geq \beta. \end{cases}$$

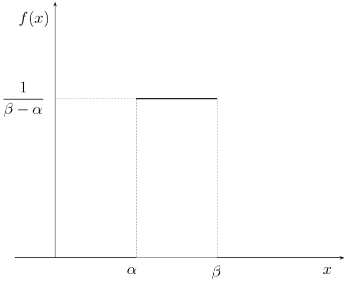
Rovnoměrné rozdělení

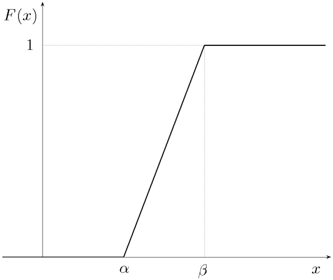
Distribuční funkci náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením dostaneme

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{\beta - \alpha} dt = \cdots = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} \quad \text{pro} \quad \alpha < x < \beta.$$

Celkový tvar distribuční funkce je

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \alpha, \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \alpha < x < \beta, \\ 1 & x \geq \beta. \end{cases}$$





Obrázek: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $R(\alpha, \beta)$

Následující tabulka uvádí hodnoty některých číselných charakteristik rovnoměrného rozdělení.

$E(X)$	$D(X)$	$\alpha_3(X)$	$\alpha_4(X)$	kvantily x_P	$Me(X)$
$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^2$	0	$-1{,}2$	$\alpha + P(\beta-\alpha)$	$\frac{\alpha+\beta}{2}$

Příklady: doba čekání na nastoupení jevu, který se v pravidelných intervalech opakuje (doba čekání na vlak metra, na dodávku zboží, pokud se pravidelně opakují), chyby při zaokrouhlování čísel, ...

Rovnoměrné rozdělení

Následující tabulka uvádí hodnoty některých číselných charakteristik rovnoměrného rozdělení.

$E(X)$	$D(X)$	$\alpha_3(X)$	$\alpha_4(X)$	kvantily x_P	$Me(X)$
$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^2$	0	$-1{,}2$	$\alpha + P(\beta-\alpha)$	$\frac{\alpha+\beta}{2}$

Příklady: doba čekání na nastoupení jevu, který se v pravidelných intervalech opakuje (doba čekání na vlak metra, na dodávku zboží, pokud se pravidelně opakují), chyby při zaokrouhlování čísel, . . .

Rovnoměrné rozdělení

Použití při výpočtech:

- $P(X \leq x_0) = F(x_0) = \frac{x_0 - \alpha}{\beta - \alpha}$
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \frac{x_2 - \alpha}{\beta - \alpha} - \frac{x_1 - \alpha}{\beta - \alpha}$

Rovnoměrné rozdělení

Použití při výpočtech:

- $P(X \leq x_0) = F(x_0) = \frac{x_0 - \alpha}{\beta - \alpha}$
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \frac{x_2 - \alpha}{\beta - \alpha} - \frac{x_1 - \alpha}{\beta - \alpha}$

Příklad

Tramvaje jezdí v pravidelných intervalech po 10 minutách. Cestující přijde na zastávku v libovolném okamžiku. Náhodná veličina představuje dobu čekání na příjezd tramvaje.

- Určete typ rozdělení dané náhodné veličiny a popište ji pomocí funkce hustoty a distribuční funkce, funkce vyjádřete matematicky i graficky.
- Určete pravděpodobnost, že cestující bude čekat nejvýše 5 minut, alespoň 3 minuty, právě 7 minut.
- Určete střední hodnotu, medián, rozptyl, směrodatnou odchylku a 90 % kvantil.

Příklad

Tramvaje jezdí v pravidelných intervalech po 10 minutách. Cestující přijde na zastávku v libovolném okamžiku. Náhodná veličina představuje dobu čekání na příjezd tramvaje.

- Určete typ rozdělení dané náhodné veličiny a popište ji pomocí funkce hustoty a distribuční funkce, funkce vyjádřete matematicky i graficky.
- Určete pravděpodobnost, že cestující bude čekat nejvýše 5 minut, alespoň 3 minuty, právě 7 minut.
- Určete střední hodnotu, medián, rozptyl, směrodatnou odchylku a 90 % kvantil.

Příklad

Tramvaje jezdí v pravidelných intervalech po 10 minutách. Cestující přijde na zastávku v libovolném okamžiku. Náhodná veličina představuje dobu čekání na příjezd tramvaje.

- Určete typ rozdělení dané náhodné veličiny a popište ji pomocí funkce hustoty a distribuční funkce, funkce vyjádřete matematicky i graficky.
- Určete pravděpodobnost, že cestující bude čekat nejvýše 5 minut, alespoň 3 minuty, právě 7 minut.
- Určete střední hodnotu, medián, rozptyl, směrodatnou odchylku a 90 % kvantil.

Příklad

Daná náhodná veličina má rovnoměrné rozdělení $X \sim R(0, 10)$.
Funkce hustoty pravděpodobnosti má tvar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 0 < x < 10, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

distribuční funkce je potom

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{x}{10} & 0 < x < 10, \\ 1 & x \geq 10. \end{cases}$$

Příklad

Daná náhodná veličina má rovnoměrné rozdělení $X \sim R(0, 10)$.
Funkce hustoty pravděpodobnosti má tvar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 0 < x < 10, \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases}$$

distribuční funkce je potom

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{x}{10} & 0 < x < 10, \\ 1 & x \geq 10. \end{cases}$$

Příklad

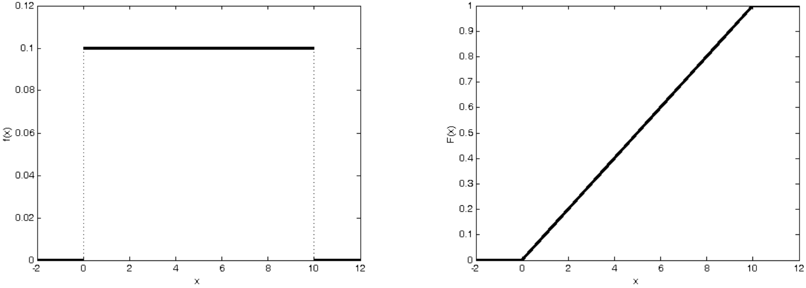
Daná náhodná veličina má rovnoměrné rozdělení $X \sim R(0, 10)$.
Funkce hustoty pravděpodobnosti má tvar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 0 < x < 10, \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases}$$

distribuční funkce je potom

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{x}{10} & 0 < x < 10, \\ 1 & x \geq 10. \end{cases}$$

Příklad



Obrázek: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $R(0, 10)$

Příklad

Pravděpodobnost, že cestující bude čekat

- nejvýše 5 minut
  $P(X \leq 5) = \int_0^5 \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10} [x]_0^5 = 0{,}5$
  nebo pomocí distribuční funkce
  $P(X \leq 5) = F(5) = \frac{5}{10} = 0{,}5$
- alespoň 3 minuty
  $P(X \geq 3) = \int_3^{10} \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10} [x]_3^{10} = 0{,}7$
  $$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = \\ = 1 - \frac{3}{10} = 0{,}7$$
- právě 7 minut
  $P(X = 7) = 0$

Příklad

Pravděpodobnost, že cestující bude čekat

- nejvýše 5 minut
  $P(X \leq 5) = \int\limits_0^5 \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10} [x]_0^5 = 0{,}5$
  nebo pomocí distribuční funkce
  $P(X \leq 5) = F(5) = \frac{5}{10} = 0{,}5$
- alespoň 3 minuty
  $P(X \geq 3) = \int\limits_3^{10} \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10} [x]_3^{10} = 0{,}7$
  $$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = \\ &= 1 - \frac{3}{10} = 0{,}7 \end{aligned}$$
- právě 7 minut
  $P(X = 7) = 0$

Příklad

Pravděpodobnost, že cestující bude čekat

- nejvýše 5 minut

  $P(X \leq 5) = \int\limits_0^5 \frac{1}{10}\,dx = \frac{1}{10}[x]_0^5 = 0{,}5$

  nebo pomocí distribuční funkce

  $P(X \leq 5) = F(5) = \frac{5}{10} = 0{,}5$
- alespoň 3 minuty

  $P(X \geq 3) = \int\limits_3^{10} \frac{1}{10}\,dx = \frac{1}{10}[x]_3^{10} = 0{,}7$

  $$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = \\ &= 1 - \frac{3}{10} = 0{,}7 \end{aligned}$$
- právě 7 minut

  $P(X = 7) = 0$

Příklad

- střední hodnota $E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{10}{2} = 5$
- medián $Me(X) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{10}{2} = 5$
- rozptyl $D(X) = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2 = \frac{1}{12}(10 - 0)^2 = \frac{100}{12} = 8{,}333$
- směrodatná odchylka $\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{100}{12}} = 2{,}887$
- 90 % kvantil $x_{0,90} = \alpha + 0{,}90(\beta - \alpha) = 0{,}9 \cdot 10 = 9$

Příklad

- střední hodnota $E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{10}{2} = 5$
- medián $Me(X) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{10}{2} = 5$
- rozptyl $D(X) = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2 = \frac{1}{12}(10 - 0)^2 = \frac{100}{12} = 8{,}333$
- směrodatná odchylka $\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{100}{12}} = 2{,}887$
- 90 % kvantil $x_{0,90} = \alpha + 0{,}90(\beta - \alpha) = 0{,}9 \cdot 10 = 9$

Příklad

- střední hodnota $E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{10}{2} = 5$
- medián $Me(X) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{10}{2} = 5$
- rozptyl $D(X) = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2 = \frac{1}{12}(10 - 0)^2 = \frac{100}{12} = 8{,}333$
- směrodatná odchylka $\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{100}{12}} = 2{,}887$
- 90 % kvantil $x_{0,90} = \alpha + 0{,}90(\beta - \alpha) = 0{,}9 \cdot 10 = 9$

Příklad

- střední hodnota $E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{10}{2} = 5$
- medián $Me(X) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{10}{2} = 5$
- rozptyl $D(X) = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2 = \frac{1}{12}(10-0)^2 = \frac{100}{12} = 8{,}333$
- směrodatná odchylka $\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{100}{12}} = 2{,}887$
- 90 % kvantil $x_{0,90} = \alpha + 0{,}90(\beta - \alpha) = 0{,}9 \cdot 10 = 9$

Příklad

- střední hodnota $E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{10}{2} = 5$
- medián $Me(X) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{10}{2} = 5$
- rozptyl $D(X) = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2 = \frac{1}{12}(10 - 0)^2 = \frac{100}{12} = 8{,}333$
- směrodatná odchylka $\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{100}{12}} = 2{,}887$
- 90 % kvantil $x_{0,90} = \alpha + 0{,}90(\beta - \alpha) = 0{,}9 \cdot 10 = 9$

Definice

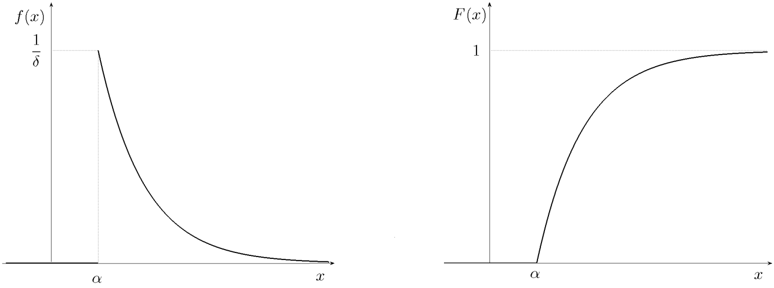
Náhodná veličina X má exponenciální rozdělení $Ex(\alpha, \delta)$ právě tehdy, když má funkce hustoty pravděpodobnosti tvar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} e^{-\frac{x-\alpha}{\delta}} & x > \alpha, \\ 0 & x \leq \alpha, \end{cases}$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}, \delta > 0$.

Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x-\alpha}{\delta}} & x > \alpha, \\ 0 & x \leq \alpha. \end{cases}$$



Obrázek: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $Ex(\alpha, \delta)$

Následující tabulka uvádí hodnoty některých číselných charakteristik exponenciálního rozdělení.

$E(X)$	$D(X)$	$\alpha_3(X)$	$\alpha_4(X)$	kvantily x_P	$Me(X)$
$\alpha + \delta$	δ^2	2	6	$\alpha - \delta \ln(1 - P)$	$\alpha + \delta \ln 2$

Příklady: teorie hromadné obsluhy, teorie spolehlivosti, teorie obnovy, doba čekání na obsluhu, životnost zařízení, ...

Následující tabulka uvádí hodnoty některých číselných charakteristik exponenciálního rozdělení.

$E(X)$	$D(X)$	$\alpha_3(X)$	$\alpha_4(X)$	kvantily x_P	$Me(X)$
$\alpha + \delta$	δ^2	2	6	$\alpha - \delta \ln(1-P)$	$\alpha + \delta \ln 2$

Příklady: teorie hromadné obsluhy, teorie spolehlivosti, teorie obnovy, doba čekání na obsluhu, životnost zařízení, ...

Exponenciální rozdělení

Použití při výpočtech:

- $P(X \leq x_0) = F(x_0) = 1 - e^{-\frac{x_0 - \alpha}{\delta}}$
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = e^{-\frac{x_1 - \alpha}{\delta}} - e^{-\frac{x_2 - \alpha}{\delta}}$

Použití při výpočtech:

- $P(X \leq x_0) = F(x_0) = 1 - e^{-\frac{x_0 - \alpha}{\delta}}$
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = e^{-\frac{x_1 - \alpha}{\delta}} - e^{-\frac{x_2 - \alpha}{\delta}}$

Příklad

Bylo zjištěno, že doba čekání na číšníka v restauracích určitého typu je náhodná veličina, která má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 5 minut a směrodatnou odchylkou 2 minuty. Nakreslete graf funkce hustoty a distribuční funkce. Určete pravděpodobnost, že doba čekání nebude větší než 5 minut.

Příklad

Pro exponenciální rozdělení platí $E(X) = \alpha + \delta$ a $D(X) = \delta^2$, dostáváme tedy

$$\begin{aligned} \alpha + \delta &= 5 \\ \delta &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \alpha = 3, \delta = 2$$

$$X \sim Ex(3, 2)$$

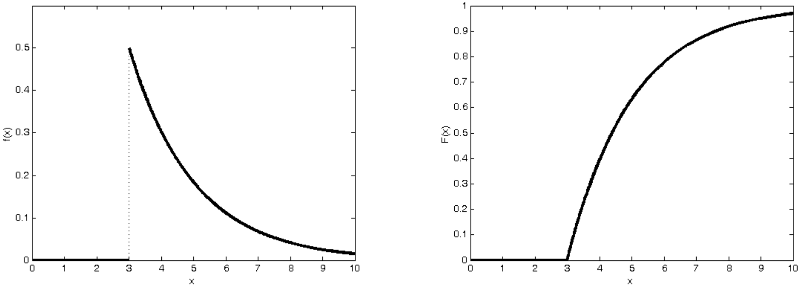
Příklad

Pro exponenciální rozdělení platí $E(X) = \alpha + \delta$ a $D(X) = \delta^2$, dostáváme tedy

$$\begin{aligned} \alpha + \delta &= 5 \\ \delta &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \alpha = 3, \delta = 2$$

$$X \sim Ex(3, 2)$$

Příklad



Obrázek: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $Ex(\alpha, \delta)$

Příklad

Pravděpodobnost, že doba čekání nebude větší než 5 minut je rovna

$$P(X \leq 5) = F(5) = 1 - e^{-\frac{5-3}{2}} = 1 - e^{-1} = 0{,}632.$$

Definice

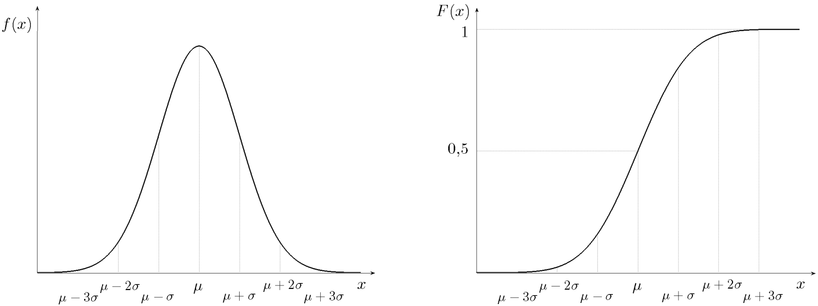
Náhodná veličina X má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ právě tehdy, když má funkce hustoty pravděpodobnosti tvar

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{pro} \quad x \in \mathbb{R}$$

kde $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$.

Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad \text{pro} \quad x \in \mathbb{R}$$



Obrázek: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

Následující tabulka uvádí hodnoty některých číselných charakteristik normálního rozdělení.

$E(X)$	$D(X)$	$\alpha_3(X)$	$\alpha_4(X)$	kvantily x_P	$Me(X)$	$Mo(X)$
μ	σ^2	0	0	$\mu + \sigma u_P$	μ	μ

u_P ... kvantil rozdělení $N(0, 1)$.

Pro náhodnou veličinu s normálním rozdělením platí:

- $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0{,}683$
- $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}954$
- $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0{,}997$

Normální rozdělení

Pro náhodnou veličinu s normálním rozdělením platí:

- $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0{,}683$
- $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}954$
- $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0{,}997$

Pro náhodnou veličinu s normálním rozdělením platí:

- $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0{,}683$
- $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}954$
- $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0{,}997$

Mějme náhodnou veličinu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. **Normovaná náhodná veličina** U vzniklá transformací

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

má normální rozdělení se střední hodnotou 0 rozptylem 1, píšeme $U \sim N(0, 1)$.

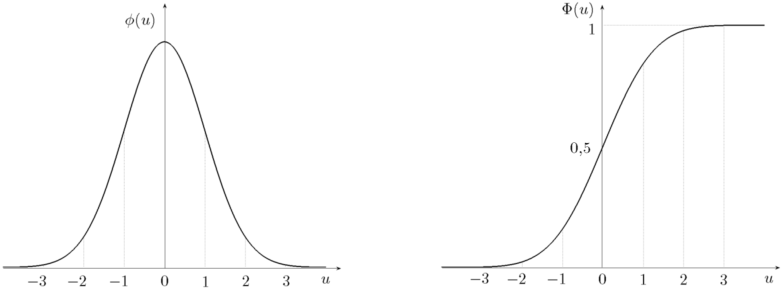
Funkce hustoty má tvar

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \quad \text{pro} \quad u \in \mathbb{R},$$

distribuční funkce

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} \phi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{pro} \quad u \in \mathbb{R}$$

Normované normální rozdělení



Obrázek: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $N(0,1)$

Následující tabulka uvádí hodnoty některých číselných charakteristik normovaného normálního rozdělení.

$E(X)$	$D(X)$	$\alpha_3(X)$	$\alpha_4(X)$	kvantily x_P	$Me(X)$	$Mo(X)$
0	1	0	0	u_P	0	0

Hodnoty u_P jsou tabelovány, pro $P < 0{,}5$ platí $u_P = -u_{1-P}$.

Hodnoty distribuční funkce jsou pro kladné hodnoty tabelovány, pro záporné hodnoty platí

$$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u).$$

Jestliže $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $U \sim N(0,1)$, pak distribuční funkci náhodné veličiny X určíme pomocí distribuční funkce náhodné veličiny U.

$$F(x_0) = P(X \le x_0) = P(X - \mu \le x_0 - \mu) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x_0-\mu}{\sigma}\right) = \\ = P\left(U \le \frac{x_0-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x_0-\mu}{\sigma}\right)$$

Hodnoty distribuční funkce jsou pro kladné hodnoty tabelovány, pro záporné hodnoty platí

$$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u).$$

Jestliže $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $U \sim N(0, 1)$, pak distribuční funkci náhodné veličiny X určíme pomocí distribuční funkce náhodné veličiny U.

$$\begin{aligned} F(x_0) &= P(X \leq x_0) = P(X - \mu \leq x_0 - \mu) = P\left(\tfrac{X-\mu}{\sigma} \leq \tfrac{x_0-\mu}{\sigma}\right) = \\ &= P\left(U \leq \tfrac{x_0-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\tfrac{x_0-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Kvantily náhodné veličiny X se určují pomocí kvantilů náhodné veličiny U, které jsou v tabulkách (u_p), platí

$$F(x_P) = \Phi\left(\frac{x_P - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(u_P),$$

odkud

$$u_P = \frac{x_P - \mu}{\sigma} \Rightarrow x_P = \mu + \sigma u_P.$$

Normované normální rozdělení

Použití při výpočtech:

- $P(X \leq x_0) = F(x_0) = \Phi\left(\frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right)$
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$

Použití při výpočtech:

- $P(X \leq x_0) = F(x_0) = \Phi\left(\frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right)$
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$

Příklad

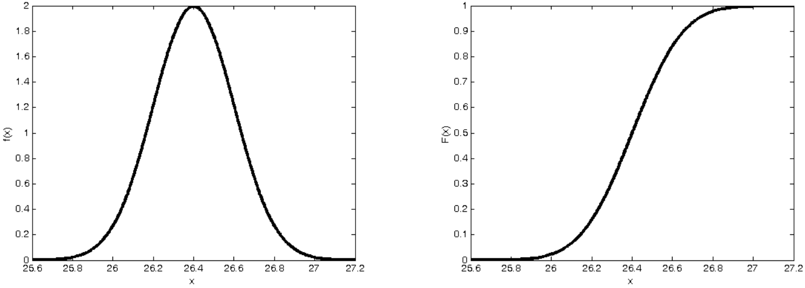
Při kontrole jakosti přebíráme součástku tehdy, jestliže se její rozměr pohybuje v mezích 26–27 mm. Rozměry součástek mají normální rozdělení se střední hodnotou $\mu = 26{,}4$ mm a směrodatnou odchylkou $\sigma = 0{,}2$ mm. Jaká je pravděpodobnost, že rozměr součástky náhodně vybrané ke kontrole bude v požadovaných mezích?

Příklad

Náhodná veličina X udávající rozměr součástky má rozdělení $X \sim N(26{,}4; 0{,}2^2)$. Máme určit pravděpodobnost, že se tento rozměr bude nacházet v rozmezí 26–27 mm, tedy

$$
\begin{aligned}
P(26 \leq X \leq 27) &= F(27) - F(26) = \Phi\left(\tfrac{27-26{,}4}{0{,}2}\right) - \Phi\left(\tfrac{26-26{,}4}{0{,}2}\right) = \\
&= \Phi(3) - \Phi(-2) = \Phi(3) - (1 - \Phi(2)) = \\
&= 0{,}99865 - (1 - 0{,}97725) = 0{,}9759
\end{aligned}
$$

Příklad



Obrázek: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $N(26{,}4; 0{,}04)$

Log-normální rozdělení

Nechť X je nezáporná náhodná veličina. Má-li náhodná veličina $\ln X$ normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, potom náhodná veličina X má logaritmicko-normální rozdělení $LN(\mu, \sigma^2)$.

Definice

Náhodná veličina X má logaritmicko-normální rozdělení $LN(\mu, \sigma^2)$ právě tehdy, když má funkce hustoty pravděpodobnosti tvar

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0, \end{cases}$$

kde $\mu \geq 0$, $\sigma > 0$.

Následující tabulka uvádí hodnoty některých číselných charakteristik log-normálního rozdělení.

$E(X)$	$D(X)$	$\alpha_3(X)$	$\alpha_4(X)$	kvantily x_P	$Mo(X)$
$e^{\mu+\sigma^2/2}$	$e^{2\mu}\omega(\omega-1)$	$\sqrt{\omega-1}(\omega+2)$	$\omega^4+2\omega^3+3\omega^2-6$	$e^{\mu+\sigma u_P}$	$e^{\mu-\sigma^2}$

kde $\omega = e^{\sigma^2}$

Použití: logaritmicko-normální rozdělení se uplatňuje jako model příjmových a mzdových rozdělení, doby obnovy, opravy, výměny zařízení, velikosti částic sypkých materiálů, v teorii spolehlivosti, ...

Následující tabulka uvádí hodnoty některých číselných charakteristik log-normálního rozdělení.

$E(X)$	$D(X)$	$\alpha_3(X)$	$\alpha_4(X)$	kvantily x_P	$Mo(X)$
$e^{\mu+\sigma^2/2}$	$e^{2\mu}\omega(\omega-1)$	$\sqrt{\omega-1}(\omega+2)$	$\omega^4+2\omega^3+3\omega^2-6$	$e^{\mu+\sigma u_P}$	$e^{\mu-\sigma^2}$

kde $\omega = e^{\sigma^2}$

Použití: logaritmicko-normální rozdělení se uplatňuje jako model příjmových a mzdových rozdělení, doby obnovy, opravy, výměny zařízení, velikosti částic sypkých materiálů, v teorii spolehlivosti, ...

Má-li náhodná veličina X log-normální rozdělení $X \sim LN(\mu, \sigma)$, pak transformovaná náhodná veličina

$$U = \frac{\ln X - \mu}{\sigma}$$

má normované normální rozdělení $U \sim N(0, 1)$.

Potom platí

$$F(x_0) = \Phi\left(\frac{\ln x_0 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(u),$$

kde $\Phi(u)$ je distribuční funkce $N(0, 1)$.

Má-li náhodná veličina X log-normální rozdělení $X \sim LN(\mu, \sigma)$, pak transformovaná náhodná veličina

$$U = \frac{\ln X - \mu}{\sigma}$$

má normované normální rozdělení $U \sim N(0, 1)$.
Potom platí

$$F(x_0) = \Phi\left(\frac{\ln x_0 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(u),$$

kde $\Phi(u)$ je distribuční funkce $N(0, 1)$.

Log-normální rozdělení

Použití při výpočtech:

- $P(X \leq x_0) = F(x_0) = \Phi\left(\frac{\ln x_0 - \mu}{\sigma}\right)$
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \Phi\left(\frac{\ln x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma}\right)$

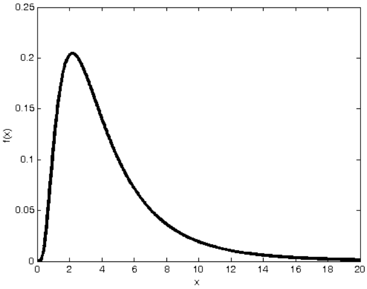
Použití při výpočtech:

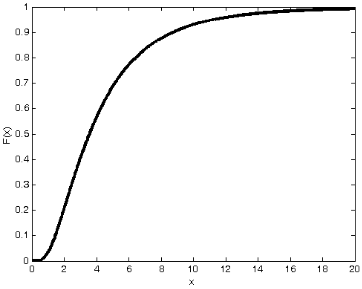
- $P(X \leq x_0) = F(x_0) = \Phi\left(\frac{\ln x_0 - \mu}{\sigma}\right)$
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \Phi\left(\frac{\ln x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma}\right)$

Příklad

Předpokládejme, že odstupy mezi jedoucími vozidly na dálnici (v sekundách) představují náhodnou veličinu, která má log-normální rozdělení s parametry $\mu = 1{,}27$ a $\sigma^2 = 0{,}49$. Určete podíl vozidel, jejichž odstupy budou 4 až 5 sekund.

Příklad





Obrázek: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $LN(1{,}27; 0{,}7)$

Pravděpodobnost, že odstupy budou 4 až 5 sekund je

$$P(4 \leq X \leq 5) = F(5) - F(4) = \Phi\left(\frac{\ln 5 - 1{,}27}{0{,}7}\right) - \Phi\left(\frac{\ln 4 - 1{,}27}{0{,}7}\right) =$$
$$= 0{,}68613 - 0{,}56597 = 0{,}12016$$

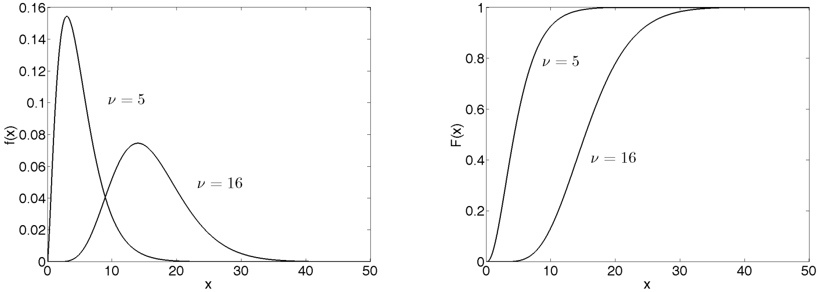
Definice

Pearsonovo rozdělení náhodné veličiny χ^2 s ν stupni volnosti, píšeme $\chi^2 \sim \chi^2(\nu)$ představuje rozdělení náhodné veličiny

$$\chi^2 = U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_\nu^2,$$

kde $U_1, U_2, \ldots, U_\nu$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $N(0,1)$.

Parametr ν (počet stupňů volnosti) zpravidla vyjadřuje počet nezávislých pozorování zmenšený o počet lineárních podmínek na pozorování kladených.



Obrázek: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $\chi^2(5)$ a $\chi^2(16)$

V matematické statistice se často používají kvantily χ^2_P tohoto rozdělení. Jsou zpravidla tabelované pro různé hodnoty P a stupně volnosti $\nu \leq 30$ Jestliže $\nu > 30$, lze použít ke stanovení přibližné hodnoty kvantilu vztah

$$\chi^2_P(\nu) \approx \frac{1}{2}\left(\sqrt{2\nu - 1} + u_P\right)^2,$$

kde u_P je kvantil rozdělení $N(0, 1)$.

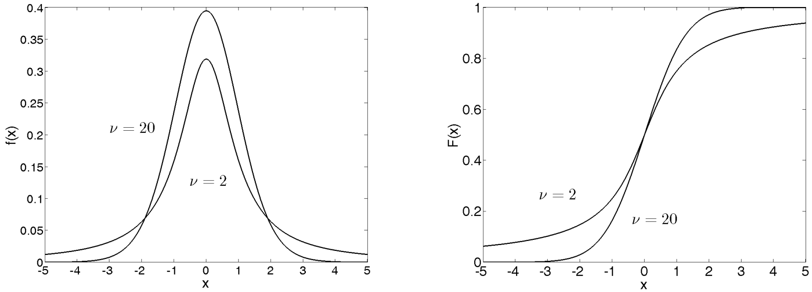
Studentovo rozdělení $t(\nu)$

Definice

Má-li náhodná veličina U normované normální rozdělení $U \sim N(0,1)$, náhodná veličina χ^2 Pearsonovo rozdělení $\chi^2 \sim \chi^2(\nu)$ a jsou-li U a χ^2 nezávislé, pak náhodná veličina

$$t = \frac{U}{\sqrt{\frac{\chi^2}{\nu}}}$$

má Studentovo rozdělení s ν stupni volnosti, píšeme $t \sim t(\nu)$.



Obrázek: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $t(2)$ a $t(20)$

Studentovo rozdělení $t(\nu)$

Funkce hustoty pravděpodobnosti je symetrická kolem střední hodnoty $E(t) = 0$.
Kvantily Studentova rozdělení jsou pro $\nu \leq 30$ a $P > 0{,}5$ tabelovány, pro $P < 0{,}5$ platí vztah

$$t_P = -t_{1-P}.$$

Je-li $\nu > 30$, lze kvantily Studentova rozdělení nahradit kvantily normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$

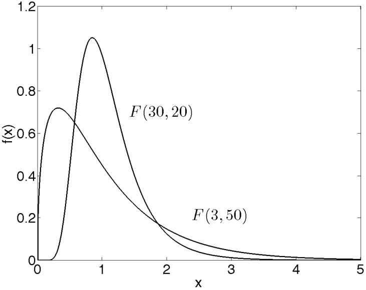
$$t_p \approx u_P.$$

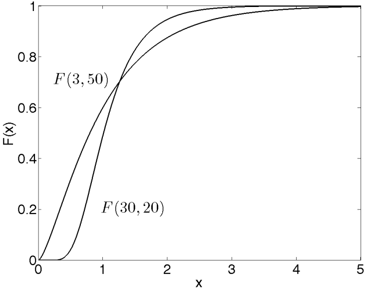
Definice

Má-li náhodná veličina χ_1^2 rozdělení $\chi_1^2 \sim \chi^2(\nu_1)$ s ν_1 stupni volnosti a náhodná veličina χ_2^2 rozdělení $\chi_2^2 \sim \chi^2(\nu_2)$ s ν_2 stupni volnosti a jsou-li χ_1^2 a χ_2^2 nezávislé, pak náhodná veličina

$$F = \frac{\chi_1^2}{\nu_1} : \frac{\chi_2^2}{\nu_2}$$

má Fisherovo-Snedecorovo rozdělení s ν_1 a ν_2 stupni volnosti a píšeme $F \sim F(\nu_1, \nu_2)$.





Obrázek: Funkce hustoty a distribuční funkce rozdělení $F(30, 20)$ a $F(3, 50)$

Fischerovo-Snedecorovo rozdělení je asymetrické.
Kvantily F rozdělení jsou pro $P > 0{,}5$ tabelovány, pro $P < 0{,}5$ se určí ze vztahu

$$F_P(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{F_{1-P}(\nu_2, \nu_1)}.$$

Základní literatura

- MANN, P.S. Introductory Statistics. 6th edition. Hoboken: Wiley, 2007. ISBN 978-0-471-75530-2.
- MOUČKA, J., RÁDL, P. Matematika pro studenty ekonomie. 1. vyd. Grada 2010. ISBN 978-80-247-3260-2.
- NEUBAUER, J., SEDLAČÍK, M., KŘÍŽ, O. Základy statistiky – Aplikace v technických a ekonomických oborech. Grada 2012.ISBN: 978-80-247-4273-1.
- ŘEZANKOVÁ, H. Analýza dat z dotazníkových šetření. 2. vydání, Professional Publishing, 2010. ISBN: 9788074310195.

- AGRESTI, A. Categorical Data Analysis. Second Edition. Wiley 2002. ISBN: 0-471-36093-7.
- ANDĚL, J. Statistické metody. 3. vydání. Praha: Matfyzpress, 2003. ISBN 80-86732-08-8.
- ANDĚL, J. Základy matematické statistiky. 2. vyd. Praha: Matfyzpress, 2007, 358 s. ISBN 978-80-7378-001-2.
- VÁGNER, M. Integrální počet funkcí jedné proměnné. 1. vydání. Brno: UO, 2005,126 s. ISBN 80-7231-025-9.
- VÁGNER, M., KAŠTÁNKOVÁ, V. Posloupnosti a řady. 1. vydání. Brno: UO, 2006. ISBN 80-7231-131-X.