

PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

Bodové odhady charakteristik základního souboru

Katedra kvantitativních metod FVL UO Brno

9. PŘEDNÁŠKA

Bodový odhad

- Nestranný, Konzistentní odhad
- Vydatnost odhadu
- Přesnost odhadu
- Metody bodových odhadů

Budeme konstruovat 2 typy odhadů:

- bodový odhad
- intervalový odhad

Budeme konstruovat 2 typy odhadů:

- bodový odhad
- intervalový odhad

Definice

Bodovým odhadem parametru θ rozumíme statistiku

$$T = T(X_1, X_2, \dots, X_n) = T(\mathbf{X}),$$

jejíž hodnoty kolísají kolem θ . Bodový odhad parametru θ tedy spočívá v jeho nahrazení jedním číslem (bodem). Potom píšeme $\hat{\theta} = T(\mathbf{X})$ a čteme: odhadem parametru θ je statistika $T(\mathbf{X})$.

Definice

Statistika T je **nestranným (nevychýleným, nezkresleným)** odhadem parametru θ , platí-li

$$E[T(\mathbf{X})] = \theta.$$

Tento požadavek vyjadřuje skutečnost, že použitý bodový odhad skutečnou hodnotu charakteristiky ani nadhodnocuje ani nepodhodnocuje.

Rozdíl

$$B(\theta, T) = E[T(\mathbf{X})] - \theta$$

se nazývá **vychýlení (zkreslení) odhadu T .**

Definice

Statistika T je **nestranným (nevychýleným, nezkresleným)** odhadem parametru θ , platí-li

$$E [T(\mathbf{X})] = \theta.$$

Tento požadavek vyjadřuje skutečnost, že použitý bodový odhad skutečnou hodnotu charakteristiky ani nadhodnocuje ani nepodhodnocuje.

Rozdíl

$$B(\theta, T) = E [T(\mathbf{X})] - \theta$$

se nazývá **vychýlení (zkreslení)** odhadu T .

Mějme náhodný výběr X_1, X_2, \dots, X_n z rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 .

- Výběrový průměr \bar{X} je nestranným odhadem parametru μ , neboť

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \mu.$$

- Výběrový rozptyl S^2 je nestranným odhadem parametru σ^2 , neboť

$$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) = \dots = \sigma^2.$$

Mějme náhodný výběr X_1, X_2, \dots, X_n z rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 .

- Výběrový průměr \bar{X} je nestranným odhadem parametru μ , neboť

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \mu.$$

- Výběrový rozptyl S^2 je nestranným odhadem parametru σ^2 , neboť

$$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) = \dots = \sigma^2.$$

Mějme náhodný výběr X_1, X_2, \dots, X_n z rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 .

- Momentový rozptyl S_n^2 není nestranným odhadem parametru σ^2 , neboť

$$E(S_n^2) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) = \dots = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$$

Vychýlení odhadu S_n^2 parametru σ^2 je rovno

$$B(\sigma^2, S_n^2) = E(S_n^2) - \sigma^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2 - \sigma^2 = \frac{1}{n} \sigma^2.$$

Se zvyšujícím se n se vychýlení zmenšuje.

Mějme náhodný výběr X_1, X_2, \dots, X_n z rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 .

- Momentový rozptyl S_n^2 není nestranným odhadem parametru σ^2 , neboť

$$E(S_n^2) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) = \dots = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$$

Vychýlení odhadu S_n^2 parametru σ^2 je rovno

$$B(\sigma^2, S_n^2) = E(S_n^2) - \sigma^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2 - \sigma^2 = \frac{1}{n} \sigma^2.$$

Se zvyšujícím se n se vychýlení zmenšuje.

Některé odhady jsou sice zkreslené, ale s rostoucím rozsahem výběru se jejich zkreslení zmenšuje.

Definice

Je-li $T(\mathbf{X})$ odhad založený na n pozorováních a jestliže platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[T(\mathbf{X})] = \theta,$$

pak říkáme, že $T(\mathbf{X})$ je **asymptoticky nestranným odhadem** parametru θ .

Pro asymptoticky nestranný odhad tedy platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[T(\mathbf{X}) - \theta] = 0.$$

Momentový rozptyl je asymptoticky nestranným odhadem parametru σ^2 , neboť

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(S_n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2.$$

V některých případech jsme nuceni pracovat s vychýlenými odhady. Pak požadujeme, aby se odhad s rostoucím rozsahem výběru blížil odhadovanému parametru, tedy aby byl **konzistentní**.

Definice

Statistika $T(\mathbf{X})$ je **konzistentním** odhadem parametru θ , platí-li pro každé $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|T(\mathbf{X}) - \theta| < \epsilon) = 1.$$

Je-li

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(\theta, T) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D[T(\mathbf{X})] = 0,$$

pak statistika $T(\mathbf{X})$ je konzistentní odhad parametru θ .

V některých případech jsme nuceni pracovat s vychýlenými odhady. Pak požadujeme, aby se odhad s rostoucím rozsahem výběru blížil odhadovanému parametru, tedy aby byl **konzistentní**.

Definice

Statistika $T(\mathbf{X})$ je **konzistentním** odhadem parametru θ , platí-li pro každé $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|T(\mathbf{X}) - \theta| < \epsilon) = 1.$$

Je-li

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(\theta, T) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D[T(\mathbf{X})] = 0,$$

pak statistika $T(\mathbf{X})$ je konzistentní odhad parametru θ .

Ukažte, že výběrový průměr je konzistentním odhadem střední hodnoty μ .

Vzhledem k tomu, že $E(\bar{X}) = \mu$ a $D(\bar{X}) = \sigma^2/n$ dostáváme

$$B(\mu, \bar{X}) = E(\bar{X}) - \mu = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D(\bar{X}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0.$$

Ukažte, že výběrový průměr je konzistentním odhadem střední hodnoty μ .

Vzhledem k tomu, že $E(\bar{X}) = \mu$ a $D(\bar{X}) = \sigma^2/n$ dostáváme

$$B(\mu, \bar{X}) = E(\bar{X}) - \mu = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D(\bar{X}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0.$$

V některých případech lze najít více statistik, které jsou nestranné a konzistentní. V takovém případě použijeme k odhadování parametru tu z nich, která má nejmenší rozptyl. Statistika, která má ze všech nestranných odhadů nejmenší rozptyl je **vydatným (nejlepším nestranným)** odhadem parametru θ .

Nechť T a U jsou 2 nestranné odhady parametru θ , pak **vydatnost odhadu T vzhledem k odhadu U** je definována vztahem

$$e(T, U) = \frac{D(U)}{D(T)}.$$

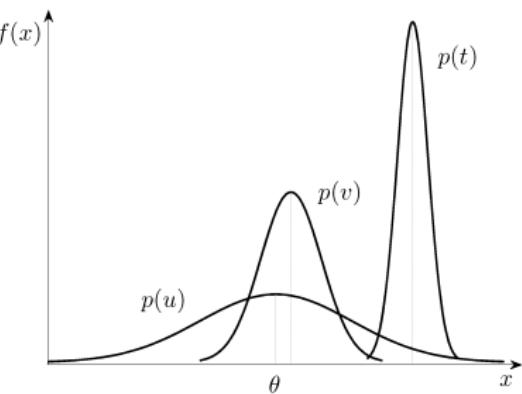
V některých případech lze najít více statistik, které jsou nestranné a konzistentní. V takovém případě použijeme k odhadování parametru tu z nich, která má nejmenší rozptyl. Statistika, která má ze všech nestranných odhadů nejmenší rozptyl je **vydatným (nejlepším nestranným)** odhadem parametru θ .

Nechť T a U jsou 2 nestranné odhady parametru θ , pak **vydatnost odhadu T vzhledem k odhadu U** je definována vztahem

$$e(T, U) = \frac{D(U)}{D(T)}.$$

Predpokládejme nyní, že srovnáváme vychýlené i nestranné odhady parametru θ . V takovém případě nemusí být vhodné vybrat odhad s nejmenším rozptylem.

Odhad T má sice nejmenší rozptyl, ale má velké vychýlení. Ani odhad s nejmenším vychýlením nemusí být nevhodnější. Odhad U má nulové vychýlení, ale má příliš velký rozptyl. Jako nejlepší se jeví odhad V .



Pro parametr λ Poissonova rozdělení lze nalézt 2 nestranné odhady

$$E(\bar{X}) = \lambda \quad \text{a} \quad E(S^2) = \lambda.$$

Lze ale ukázat, že

$$D(\bar{X}) < D(S^2),$$

proto je \bar{X} lepším (vydatnějším) nestranným odhadem než S^2 .

Přesnost bodového odhadu lze měřit pomocí **střední kvadratické chyby** $MSE(T)$ statistiky T .

Definice

Střední kvadratická chyba statistiky T pro odhad parametru θ je definován jako

$$MSE(T) = E(T - \theta)^2 = D(T) + B^2(\theta, T)$$

$$(MSE_{\text{odhadu}} = \text{rozptyl odhadu} + (\text{jeho vychýlení})^2),$$

kde $T - \theta$ je výběrová chyba.

Střední kvadratická chyba

- charakterizuje, jaká je „průměrná“ výběrová chyba odhadů přicházející v úvahu při všech různých výběrech daného rozsahu.
- je kombinací 2 požadovaných vlastností (malého vychýlení a malého rozptylu), proto je univerzálním kritériem.

Je-li statistika T nestranným odhadem, potom $MSE(T) = D(T)$ (střední kvadratická chyba je rovna rozptylu). Přesnost můžeme měřit pomocí směrodatné odchylky $SE = \sqrt{D(T)}$, která se nazývá **směrodatná (střední) chyba odhadu**.

Střední kvadratická chyba

- charakterizuje, jaká je „průměrná“ výběrová chyba odhadů přicházející v úvahu při všech různých výběrech daného rozsahu.
- je kombinací 2 požadovaných vlastností (malého vychýlení a malého rozptylu), proto je univerzálním kritériem.

Je-li statistika T nestranným odhadem, potom $MSE(T) = D(T)$ (střední kvadratická chyba je rovna rozptylu). Přesnost můžeme měřit pomocí směrodatné odchylky $SE = \sqrt{D(T)}$, která se nazývá **směrodatná (střední) chyba odhadu**.

Střední kvadratická chyba

- charakterizuje, jaká je „průměrná“ výběrová chyba odhadů přicházející v úvahu při všech různých výběrech daného rozsahu.
- je kombinací 2 požadovaných vlastností (malého vychýlení a malého rozptylu), proto je univerzálním kritériem.

Je-li statistika T nestranným odhadem, potom $MSE(T) = D(T)$ (střední kvadratická chyba je rovna rozptylu). Přesnost můžeme měřit pomocí směrodatné odchylky $SE = \sqrt{D(T)}$, která se nazývá **směrodatná (střední) chyba odhadu**.

Průměr je nestranným odhadem střední hodnoty, proto směrodatná chyba odhadu je rovna směrodatné odchylce výběrového průměru, tj.

$$SE = \sqrt{D(\bar{X})} = \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}.$$

Protože $\sigma(X)$ neznáme, odhadneme směrodatnou chybu pomocí výběrové střední chyby

$$\widehat{SE} = \frac{\hat{\sigma}(X)}{\sqrt{n}} = \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Spočtěte střední kvadratickou chybu statistiky S^2 a statistiky S_n^2 . Uvažujme nejprve statistiku S^2 , která je nestranný odhadem parametru σ^2 . Platí, že

$$\begin{aligned}MSE(S^2) &= D(S^2) = E(S^2 - \sigma^2)^2 = E(S^4) - 2\sigma^2 E(\sigma^2) + \sigma^4 = \\&= E(S^4) - \sigma^4 = \frac{2\sigma^4}{n-1}.\end{aligned}$$

Pro střední kvadratickou chybu statistiky S_n^2 dostaneme

$$\begin{aligned}MSE(S_n^2) &= E(S_n^2 - \sigma^2)^2 = E(S_n^4) - 2\frac{n-1}{n}\sigma^4 + \sigma^4 = \\&= E(S_n^4) - \frac{2-n}{n}\sigma^4 = \frac{2n-1}{n^2}\sigma^4,\end{aligned}$$

to je méně než $MSE(S^2)$, neboť $\frac{2n-1}{n^2} < \frac{2}{n-1}$. Každý z těchto odhadů je lepší v jiném smyslu.

Spočtěte střední kvadratickou chybu statistiky S^2 a statistiky S_n^2 . Uvažujme nejprve statistiku S^2 , která je nestranný odhadem parametru σ^2 . Platí, že

$$\begin{aligned}MSE(S^2) &= D(S^2) = E(S^2 - \sigma^2)^2 = E(S^4) - 2\sigma^2 E(\sigma^2) + \sigma^4 = \\&= E(S^4) - \sigma^4 = \frac{2\sigma^4}{n-1}.\end{aligned}$$

Pro střední kvadratickou chybu statistiky S_n^2 dostaneme

$$\begin{aligned}MSE(S_n^2) &= E(S_n^2 - \sigma^2)^2 = E(S_n^4) - 2\frac{n-1}{n}\sigma^4 + \sigma^4 = \\&= E(S_n^4) - \frac{2-n}{n}\sigma^4 = \frac{2n-1}{n^2}\sigma^4,\end{aligned}$$

to je méně než $MSE(S^2)$, neboť $\frac{2n-1}{n^2} < \frac{2}{n-1}$. Každý z těchto odhadů je lepší v jiném smyslu.

Doposud jsme popisovali vlastnosti odhadů, nezabývali jsem se však otázkou, jak odhady získat. Uvedeme 2 nejčastěji používané metody

- metodu momentů,
- metodu maximální věrohodnosti.

Doposud jsme popisovali vlastnosti odhadů, nezabývali jsem se však otázkou, jak odhady získat. Uvedeme 2 nejčastěji používané metody

- metodu momentů,
- metodu maximální věrohodnosti.

Uvažujme rozdělení, které závisí na $m \geq 1$ reálných parametrech $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ a mějme náhodný výběr X_1, X_2, \dots, X_n z tohoto rozdělení. Předpokládejme, že existují obecné momenty

$$\mu'_r = E(X_i^r) \quad \text{pro} \quad r = 1, 2, \dots, m.$$

Tyto momenty obecně závisí na parametrech $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$. Výběrové momenty jsou dány vztahem

$$M'_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^r, \quad r = 0, 1, \dots$$

Momentová metoda odhadu parametrů $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ spočívá v tom, že za jejich odhad vezmeme řešení rovnic

$$\mu'_r = M'_r.$$

Odhad parametru λ Poissonova rozdělení.

V případě náhodného výběru z Poissonova rozdělení $Po(\lambda)$ dostaneme rovnici

$$\mu'_1 = M'_1 \quad \Rightarrow \quad E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

takže odhadem $\hat{\lambda}$ parametru λ získaným metodou momentů je

$$\hat{\lambda} = \bar{X}.$$

Odhad parametrů μ a σ^2 normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

$$\mu'_1 = M'_1 \quad \Rightarrow \quad E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$\mu'_2 = M'_2 \quad \Rightarrow \quad E(X_i^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \Leftrightarrow D(X_i) + E(X_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

$$\sigma^2 + \mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

Získané odhady jsou

$$\hat{\mu} = \bar{X}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = S_n^2 = \frac{n-1}{n} S^2$$

Odhad parametrů μ a σ^2 normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

$$\mu'_1 = M'_1 \quad \Rightarrow \quad E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$\mu'_2 = M'_2 \quad \Rightarrow \quad E(X_i^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \Leftrightarrow D(X_i) + E(X_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

$$\sigma^2 + \mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

Získané odhady jsou

$$\hat{\mu} = \bar{X}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = S_n^2 = \frac{n-1}{n} S^2$$

Odhad parametrů μ a σ^2 normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

$$\mu'_1 = M'_1 \quad \Rightarrow \quad E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$\mu'_2 = M'_2 \quad \Rightarrow \quad E(X_i^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \Leftrightarrow D(X_i) + E(X_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

$$\sigma^2 + \mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

Získané odhady jsou

$$\hat{\mu} = \bar{X}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = S_n^2 = \frac{n-1}{n} S^2$$

Nechť X_1, X_2, \dots, X_n je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x, \theta)$, resp. s pravěpodobnostní funkcí $p(x, \Theta)$ obsahující neznámý parametr $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$. Náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ má sdruženou hustotu rozdělení resp. sdruženou pravděpodobnostní funkci

$$g(\mathbf{x}, \Theta) = g(x_1, x_2, \dots, x_n, \Theta) = f(x_1, \Theta)f(x_2, \Theta) \cdots f(x_n, \Theta)$$

resp.

$$g(\mathbf{x}, \Theta) = g(x_1, x_2, \dots, x_n, \Theta) = p(x_1, \Theta)p(x_2, \Theta) \cdots p(x_n, \Theta).$$

Hustota $g(x, \Theta)$ reprezentuje funkci proměnné x při pevně dané hodnotě Θ . Při každé pevné hodnotě x lze $g(x, \Theta)$ chápat jako funkci proměnné Θ . Pro tuto funkci budeme používat značení $\mathcal{L}(\Theta, x)$ a nazývat jí **věrohodnostní funkce**. Existuje-li takové $\hat{\Theta}$, že pro každé Θ platí

$$\mathcal{L}(\hat{\Theta}, x) \geq \mathcal{L}(\Theta, x),$$

pak $\hat{\Theta}$ nazýváme **maximálně věrohodným odhadem** parametru Θ .

Místo věrohodnostní funkce je někdy výhodnější pracovat s jejím logaritmem.

Potom buhdeme mluvit o **logaritmické věrohodnostní funkci**

$L(\Theta, x) = \ln \mathcal{L}(\Theta, x)$. Pro maximálně věrohodný odhad také platí

$$L(\hat{\Theta}, x) \geq L(\Theta, x),$$

neboť logaritmus je rostoucí funkcí.

Hustota $g(x, \Theta)$ reprezentuje funkci proměnné x při pevně dané hodnotě Θ . Při každé pevné hodnotě x lze $g(x, \Theta)$ chápat jako funkci proměnné Θ . Pro tuto funkci budeme používat značení $\mathcal{L}(\Theta, x)$ a nazývat jí **věrohodnostní funkce**. Existuje-li takové $\hat{\Theta}$, že pro každé Θ platí

$$\mathcal{L}(\hat{\Theta}, x) \geq \mathcal{L}(\Theta, x),$$

pak $\hat{\Theta}$ nazýváme **maximálně věrohodným odhadem** parametru Θ .

Místo věrohodnostní funkce je někdy výhodnější pracovat s jejím logaritmem.

Potom buhdeme mluvit o **logaritmické věrohodnostní funkci**

$L(\Theta, x) = \ln \mathcal{L}(\Theta, x)$. Pro maximálně věrohodný odhad také platí

$$L(\hat{\Theta}, x) \geq L(\Theta, x),$$

neboť logaritmus je rostoucí funkcí.

Maximálně věrohodný odhad (není obecně nestranný) vektoru $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ je určen řešením soustavy věrohodnostních rovnic

$$\frac{\partial L(\Theta, \mathbf{x})}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Metodou maximální věrohodnosti odhadněte parametr π z alternativního rozdělení $A(\pi)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\pi, \mathbf{x}) &= \pi^{x_1}(1-\pi)^{1-x_1}\pi^{x_2}(1-\pi)^{1-x_2}\dots\pi^{x_n}(1-\pi)^{1-x_n} = \\ &= \pi^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\pi)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}\end{aligned}$$

Logaritmická věrohodnostní funkce má tvar

$$L(\pi, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i \ln \pi + \left(n - \sum_{i=1}^n x_i \right) \ln(1-\pi).$$

Položíme-li derivaci této funkce rovnu nule

$$\frac{dL(\pi, \mathbf{x})}{d\pi} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\pi} - \frac{n - \sum_{i=1}^n x_i}{1 - \pi} = 0,$$

dostáváme odhad

$$\hat{\pi} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}.$$

Metodou maximální věrohodnosti odhadněte parametr λ z Poissonova rozdělení $Po(\lambda)$.

$$\mathcal{L}(\lambda, \mathbf{x}) = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1! x_2! \cdots x_n!},$$

$$L(\lambda, \mathbf{x}) = \ln \mathcal{L}(\lambda, \mathbf{x}) = -n\lambda + \sum_{i=1}^n x_i \ln \lambda - \ln(x_1! x_2! \cdots x_n!)$$

$$\frac{dL(\lambda, \mathbf{x})}{d\lambda} = -n + \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{1}{\lambda} = 0$$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}.$$