Studijní text

Název předmětu: PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

Garant předmětu: RNDr. Marek Sedlačík, Ph.D.

Téma: Bodové a intervalové odhady charakteristik základního souboru

Obsah

1 Bodový odhad

Budeme konstruovat 2 typy odhadů:

- bodový odhad,
- intervalový odhad.

Definice 1.1 **Bodovým odhadem** parametru θ rozumíme statistiku

$$T = T(X_1, X_2, \ldots, X_n) = T(\mathbf{X}),$$

jejíž hodnoty kolísají kolem θ. Bodový odhad parametru θ tedy spočívá v jeho nahrazení jedním číslem (bodem). Potom píšeme $\hat{\theta} = T(\mathbf{X})$ a čteme: odhadem parametru θ je statistika $T(\mathbf{X})$.

1.1 Nestranný odhad

Definice 1.2 Statistika T je **nestranným (nevychýleným, nezkresleným)** odhadem parametru θ, platí-li

$$E\left[T(\mathbf{X})\right] = \theta.$$

Tento požadavek vyjadřuje skutečnost, že použitý bodový odhad skutečnou hodnotu charakteristiky ani nenadhodnocuje ani nepodhodnocuje. Rozdíl $B(\theta, T) = E\left[T(\mathbf{X})\right] - \theta$ se nazývá **vychýlení (zkreslení)** odhadu T.

Příklad 1.1 Mějme náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2.

- Výběrový průměr $\overline{X}$ je nestranným odhadem parametru μ, neboť

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \mu.$$

- Výběrový rozptyl S^2 je nestranným odhadem parametru σ^2, neboť

$$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right) = \cdots = \sigma^2.$$

- Momentový rozptyl S_n^2 není nestranným odhadem parametru σ^2, neboť

$$E(S_n^2) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right) = \cdots = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

  Vychýlení tohoto odhadu je $B(\sigma^2, S_n^2) = E(S_n^2) - \sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 - \sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma^2$, tedy se zvyšujícím se n se vychýlení zmenšuje.

Některé odhady jsou sice zkreslené, ale s rostoucím rozsahem výběru se jejich zkreslení zmenšuje.

Definice 1.3 Je-li $T(\mathbf{X})$ odhad založený na n pozorováních a jestliže platí

$$\lim_{n\to\infty} E\left[T(\mathbf{X})\right] = \theta,$$

pak říkáme, že $T(\mathbf{X})$ je **asymptoticky nestranným odhadem** parametru θ. Pro asymptoticky nestranný odhad tedy platí

$$\lim_{n\to\infty} E\left[T(\mathbf{X}) - \theta\right] = 0.$$

Příklad 1.2 Momentový rozptyl je asymptoticky nestranným odhadem parametru σ^2, neboť

$$\lim_{n\to\infty} E(S_n^2) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2.$$

1.2 Konzistentní odhad

V některých případech jsme nuceni pracovat s vychýlenými odhady. Pak požadujeme, aby se odhad s rostoucím rozsahem výběru blížil odhadovanému parametru, tedy aby byl **konzistentní**.

Definice 1.4 Statistika $T(\mathbf{X})$ je **konzistentním** odhadem parametru θ, platí-li pro každé $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(|T(\mathbf{X}) - \theta| < \epsilon) = 1.$$

Je-li

$$\lim_{n\to\infty} B(\theta, T) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} D[T(\mathbf{X})] = 0,$$

pak statistika $T(\mathbf{X})$ je konzistentní odhad parametru θ.

Příklad 1.3 Ukažte, že výběrový průměr je konzistentním odhadem střední hodnoty μ.

Řešení: Vzhledem k tomu, že $E(\overline{X}) = \mu$ a $D(\overline{X}) = \sigma^2/n$ dostáváme

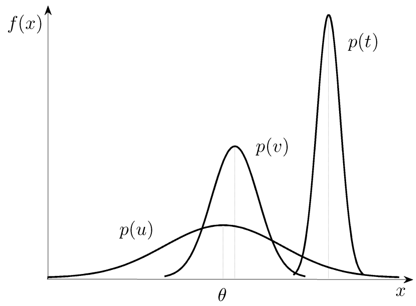
$$B(\mu, \overline{X}) = E(\overline{X}) - \mu = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} D(\overline{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0.$$

1.3 Vydatnost odhadů

V některých případech lze najít více statistik, které jsou nestranné a konzistentní. V takovém případě použijeme k odhadování parametru tu z nich, která má nejmenší rozptyl. Statistika, která má ze všech nestranných odhadů nejmenší rozptyl je **vydatným** (**nejlepší nestranným**) odhadem parametru θ.

Definice 1.5 Nechť T a U jsou 2 nestranné odhady parametru θ, pak **vydatnost odhadu T vzhledem k odhadu U** je definována vztahem

$$e(T, U) = \frac{D(U)}{D(T)}.$$



Obrázek 1: Srovnání vychýlených a nestranných odhadů parametru θ

Předpokládejme nyní, že srovnáváme vychýlené i nestranné odhady parametru θ. V takovém případě nemusí být vhodné vybrat odhad s nejmenším rozptylem. Odhad T má na obrázku 1 sice nejmenší rozptyl, ale má velké vychýlení. Ani odhad s nejmenším vychýlením nemusí být nejvhodnější. Odhad U má nulové vychýlení, ale má příliš velký rozptyl. Jako nejlepší se jeví odhad V.

Příklad 1.4 Srovnejte odhady $\overline{X}$ a S^2 parametru λ Poissonova rozdělení.

Řešení: Pro parametr λ Poissonova rozdělení lze nalézt 2 nestranné odhady $E(\overline{X}) = \lambda \quad \text{a} \quad E(S^2) = \lambda$. Lze ale ukázat, že

$$D(\overline{X}) < D(S^2),$$

proto je $\overline{X}$ lepším (vydatnějším) nestranným odhadem než S^2.

1.4 Přesnost odhadu

Přesnost bodového odhadu lze měřit pomocí **střední kvadratické chyby** $MSE(T)$ statistiky T.

Definice 1.6 Střední kvadratická chyba statistiky T pro odhad parametru θ je definován jako

$$MSE(T) = E(T-\theta)^2 = D(T) + B^2(\theta, T)$$

$$(MSE\text{odhadu} = \text{rozptyl odhadu} + (\text{jeho vychýlení})^2),$$

kde $T - \theta$ je výběrová chyba.

Střední kvadratická chyba

- charakterizuje, jaká je „průměrná“ výběrová chyba odhadů přicházející v úvahu při všech různých výběrech daného rozsahu,
- je kombinací 2 požadovaných vlastností (malého vychýlení a malého rozptylu), proto je univerzálním kritériem.

Je-li statistika T nestranným odhadem, potom $MSE(T) = D(T)$ (střední kvadratická chyba je rovna rozptylu). Přesnost můžeme měřit pomocí směrodatné odchylky $SE = \sqrt{D(T)}$, která se nazývá **směrodatná (střední) chyba odhadu**.

Průměr je nestranným odhadem střední hodnoty, proto směrodatná chyba odhadu je rovna směrodatné odchylce výběrového průměru, tj.

$$SE = \sqrt{D(\overline{X})} = \sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}.$$

Protože $\sigma(X)$ neznáme, odhadneme směrodatnou chybu pomocí výběrové střední chyby

$$\widehat{SE} = \frac{\hat{\sigma}(X)}{\sqrt{n}} = \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Příklad 1.5 Spočtěte střední kvadratickou chybu statistiky S^2 a statistiky S_n^2.

Řešení: Uvažujme nejprve statistiku S^2, která je nestranný odhadem parametru σ^2. Platí, že

$$\begin{aligned} MSE(S^2) = D(S^2) &= E(S^2 - \sigma^2)^2 = E(S^4) - 2\sigma^2 E(\sigma^2) + \sigma^4 = \\ &= E(S^4) - \sigma^4 = \tfrac{2\sigma^4}{n-1}. \end{aligned}$$

Pro střední kvadratickou chybu statistiky S_n^2 dostaneme

$$\begin{aligned} MSE(S_n^2) = E(S_n^2 - \sigma^2)^2 &= E(S_n^4) - 2\tfrac{n-1}{n}\sigma^4 + \sigma^4 = \\ &= E(S_n^4) - \tfrac{2-n}{n}\sigma^4 = \tfrac{2n-1}{n^2}\sigma^4, \end{aligned}$$

to je méně než $MSE(S^2)$, neboť $\frac{2n-1}{n^2} < \frac{2}{n-1}$. Každý z těchto odhadů je lepší v jiném smyslu.

1.5 Metody bodových odhadů

Doposud jsme popisovali vlastnosti odhadů, nezabývali jsem se však otázkou, jak odhady získat. Uvedeme 2 nejčastěji používané metody

1. metodu momentů,
2. metodu maximální věrohodnosti.

Metoda momentů

Uvažujme rozdělení, které závisí na $m \geq 1$ reálných parametrech $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ a mějme náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z tohoto rozdělení. Předpokládejme, že existují obecné momenty

$$\mu_r' = E(X_i^r) \quad \text{pro} \quad r = 1, 2, \ldots, m.$$

Tyto momenty obecně závisí na parametrech $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$. Výběrové momenty jsou dány vztahem

$$M_r' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r, \quad r = 0, 1 \ldots.$$

Momentová metoda odhadu parametrů $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ spočívá v tom, že za jejich odhad vezmeme řešení rovnic

$$\mu_r' = M_r'.$$

Příklad 1.6 Nalezněte odhad parametru λ Poissonova rozdělení.

Řešení: V případě náhodného výběru z Poissonova rozdělení $Po(\lambda)$ dostaneme rovnici

$$\mu_1' = M_1' \quad \Rightarrow \quad E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

takže odhadem $\hat{\lambda}$ parametru λ získaným metodou momentů je

$$\hat{\lambda} = \overline{X}.$$

Příklad 1.7 Nalezněte odhad parametrů μ a σ^2 normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

Řešení: Obdobně jako v předchozím příkladě dostáváme

$$\mu_1' = M_1' \quad \Rightarrow \quad E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$\mu_2' = M_2' \quad \Rightarrow \quad E(X_i^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \Leftrightarrow D(X_i) + E(X_i)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2,$$

$$\sigma^2 + \mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Získané odhady jsou

$$\hat{\mu} = \overline{X}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = S_n^2 = \frac{n-1}{n}S^2.$$

Metoda maximální věrohodnosti

Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x, \theta)$, resp. s pravěpodobnostní funkcí $p(x, \Theta)$ obsahující neznámý parametr $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$. Náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ má sdruženou hustotu rozdělení resp. sdruženou pravděpodobnostní funkci

$$g(\mathbf{x}, \Theta) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n, \Theta) = f(x_1, \Theta) f(x_2, \Theta) \cdots f(x_n, \Theta)$$

resp.

$$g(\mathbf{x}, \Theta) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n, \Theta) = p(x_1, \Theta) p(x_2, \Theta) \cdots p(x_n, \Theta).$$

Hustota $g(\mathbf{x}, \Theta)$ reprezentuje funkci proměnné $\mathbf{x}$ při pevně dané hodnotě Θ. Při každé pevné hodnotě $\mathbf{x}$ lze $g(\mathbf{x}, \Theta)$ chápat jako funkci proměnné Θ. Pro tuto funkci budeme používat značení $\mathcal{L}(\Theta, \mathbf{x})$ a nazývat jí **věrohodnostní funkce**. Existuje-li takové $\hat{\Theta}$, že pro každé Θ platí

$$\mathcal{L}(\hat{\Theta}, \mathbf{x}) \geq \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{x}),$$

pak $\hat{\Theta}$ nazýváme **maximálně věrohodným odhadem** parametru Θ.

Místo věrohodnostní funkce je někdy výhodnější pracovat s jejím logaritmem. Potom budeme mluvit o **logaritmické věrohodnostní funkci** $L(\Theta, \mathbf{x}) = \ln \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{x})$. Pro maximálně věrohodný odhad také platí

$$L(\hat{\Theta}, \mathbf{x}) \geq L(\Theta, \mathbf{x}),$$

neboť logaritmus je rostoucí funkcí.

Maximálně věrohodný odhad (není obecně nestranný) vektoru $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$ je určen řešením soustavy věrohodnostních rovnic

$$\frac{\partial L(\Theta, \mathbf{x})}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Příklad 1.8 Metodou maximální věrohodnosti odhadněte parametr π alternativního rozdělení $A(\pi)$.

Řešení: Věrohodnostní funkce má tvar

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\pi, \mathbf{x}) &= \pi^{x_1}(1-\pi)^{1-x_1}\pi^{x_2}(1-\pi)^{1-x_2}\ldots\pi^{x_n}(1-\pi)^{1-x_n} = \\ &= \pi^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\pi)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}.\end{aligned}$$

Logaritmická věrohodnostní funkce má tvar

$$L(\pi, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i \ln \pi + \left(n - \sum_{i=1}^n x_i\right) \ln(1-\pi).$$

Položíme-li derivaci této funkce rovnu nule

$$\frac{dL(\pi, \mathbf{x})}{d\pi} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\pi} - \frac{n - \sum_{i=1}^n x_i}{1-\pi} = 0,$$

dostáváme odhad

$$\hat{\pi} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \overline{x}.$$

Příklad 1.9 Metodou maximální věrohodnosti odhadněte parametr λ Poissonova rozdělení $Po(\lambda)$.

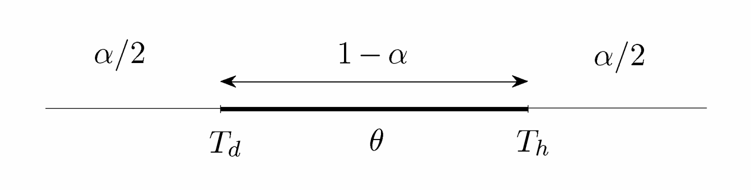
Řešení: Obdobně jako v předchozím příkladě dostáváme postupně

$$\mathcal{L}(\lambda, \mathbf{x}) = e^{-n\lambda}\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1! x_2! \cdots x_n!},$$

$$L(\lambda, \mathbf{x}) = \ln \mathcal{L}(\lambda, \mathbf{x}) = -n\lambda + \sum_{i=1}^n x_i \ln \lambda - \ln(x_1! x_2! \cdots x_n!),$$

$$\frac{dL(\lambda, \mathbf{x})}{d\lambda} = -n + \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{1}{\lambda} = 0,$$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = \overline{x}.$$



Obrázek 2: Oboustranný interval spolehlivosti pro θ

2 Intervalový odhad

Bodové odhady parametrů představují odhady vyjádřené jediným číslem. Nevýhodou takových odhadů je, že jejich spolehlivost – pravděpodobnost, že určíme hodnotu parametru přesně – je nulová. Proto zavádíme intervalové odhady parametrů.

Definice 2.1 Mějme náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z rozdělení s hustotou pravděpodobnosti $f(x, \theta)$ resp. s pravděpodobnostní funkcí $p(x, \theta)$. Jsou-li $T_d(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ a $T_h(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ statistiky, pro něž platí

$$P(T_d < \theta < T_h) = 1 - \alpha,$$

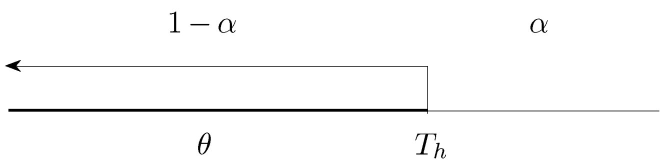
potom interval (T_d, T_h) se nazývá $100(1-\alpha)\%$ **interval spolehlivosti** pro parametr θ. Číslo $0 < \alpha < 1$ nazýváme **riziko odhadu**, číslo $1 - \alpha$ je **koeficient spolehlivosti (spolehlivost)**.

Interval spolehlivosti můžeme také zadat nerovností $\theta > T_d$ příp. $\theta < T_h$. Takto zadané intervaly jsou **jednostranné intervaly spolehlivosti**. **Oboustranné intervaly spolehlivosti**, které splňují podmínku

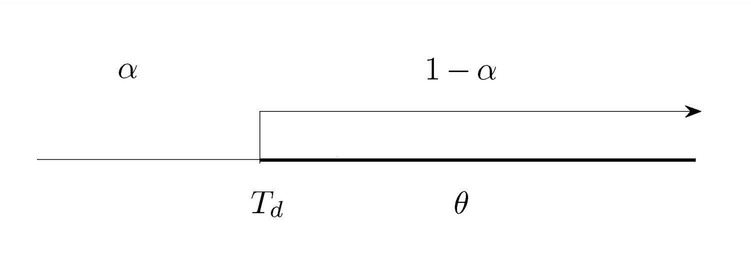
$$P(\theta \leq T_d) = P(\theta \geq T_h) = \frac{\alpha}{2}$$

se nazývají **symetrické** intervaly spolehlivosti. V dalším výkladu je budeme označovat jen jako oboustranné intervaly spolehlivosti. Nesymetrickými intervaly se zabývat nebudeme.

- Platí-li
$$P(T_d < \theta < T_h) = 1 - \alpha,$$
$$P(\theta \leq T_h) = P(\theta \geq T_d) = \frac{\alpha}{2},$$
pak interval $T_d < \theta < T_h$ nazýváme **oboustranným intervalem spolehlivosti pro** θ (obrázek 2).
- Platí-li
$$P(\theta < T_h) = 1 - \alpha, P(\theta \geq T_h) = \alpha,$$
pak interval $\theta < T_h$ nazýváme **pravostranným intervalem spolehlivosti pro** θ (obrázek 3).
- Platí-li
$$P(\theta > T_d) = 1 - \alpha, P(\theta \leq T_h) = \alpha,$$
pak interval $\theta > T_d$ nazýváme **levostranným intervalem spolehlivosti pro** θ (obrázek 4).



Obrázek 3: Pravostranný interval spolehlivosti pro θ



Obrázek 4: Levostranný interval spolehlivosti pro θ

2.1 Intervaly spolehlivosti pro parametry normálního rozdělení

IS pro parametr μ normálního rozdělení

Mějme náhodný výběr $X_1, X_2, \dots, X_n$ z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Z dřívějška víme, že náhodná veličina

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1),$$

má Studentovo t-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti, tudíž platí

$$P(t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < T < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)) = 1-\alpha,$$

odkud dostáváme

$$P\left(t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha.$$

Pomocí algebraických úprav dostáváme postupně

$$P\left(t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < \overline{X} - \mu < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(-\overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < -\mu < -\overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha.$$

Jelikož pro kvantily t-rozdělení platí $t_{\frac{\alpha}{2}} = -t_{1-\frac{\alpha}{2}}$, obdržíme pro pozorované hodnoty $\overline{x}$ a s náhodných veličin $\overline{X}$ a S

$$P\left(\overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha.$$

Věta 2.1 Pro riziko odhadu $\alpha \in (0,1)$ je:

a) $100(1-\alpha)\%$ oboustranný interval spolehlivosti pro parametr μ normálního rozdělení

$$\overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

b) $100(1-\alpha)\%$ pravostranný resp. levostranný interval spolehlivosti pro parametr μ

$$\mu < \overline{x} + t_{1-\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} \quad \text{resp.} \quad \mu > \overline{x} - t_{1-\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

IS pro parametr σ^2 normálního rozdělení

Mějme náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Z dřívějška víme, že náhodná veličina

$$\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$$

má χ^2-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti. Potom platí

$$P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(\frac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} > \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} > \frac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right) = 1-\alpha.$$

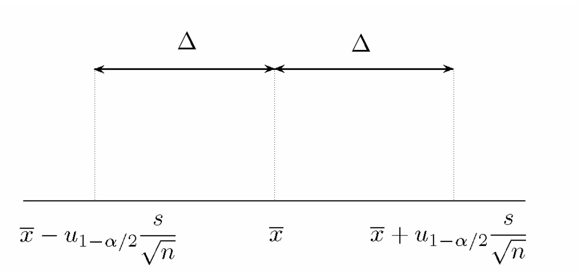
Věta 2.2 Pro riziko odhadu $\alpha \in (0,1)$ je:

a) $100(1-\alpha)\%$ oboustranný interval spolehlivosti pro parametr σ^2 normálního rozdělení

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}.$$

b) $100(1-\alpha)\%$ pravostranný resp. levostranný interval spolehlivosti pro parametr σ^2

$$\sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)} \quad \text{resp.} \quad \sigma^2 > \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}.$$



Obrázek 5: Přípustná chyba intervalového odhadu

2.2 Intervaly spolehlivosti pro μ při velkém rozsahu výběru

Mějme náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z libovolného rozdělení se střední hodnotou μ a konečným rozptylem σ^2. Při konstukci intervalu spolehlivosti pro parametr μ se vychází z centrální limitní věty, konkrétně z tvrzení, že náhodná veličina

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n}$$

má pro $n \to \infty$ ($n > 30$) přibližně normální rozdělení $N(0,1)$. Platí tedy

$$P\left(u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n} < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha.$$

Věta 2.3 Pro riziko odhadu $\alpha \in (0,1)$ je:

a) $100(1-\alpha)\%$ oboustranný interval spolehlivosti pro parametr μ

$$\overline{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

b) $100(1-\alpha)\%$ pravostranný resp. levostranný interval spolehlivosti pro parametr μ

$$\mu < \overline{x} + u_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}} \quad \text{resp.} \quad \mu > \overline{x} - u_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

2.3 Stanovení velikosti výběru pro odhad střední hodnoty

Ukážeme nyní, jak velikost výběru ovlivňuje přesnost odhadu. Uvažujme oboustranný interval spolehlivosti pro μ.

Definice 2.2 Přípustná chyba odhadu pro μ je

$$\Delta = u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}} = u_{1-\frac{\alpha}{2}}\widehat{SE}.$$

Přípustná chyba je tedy rovna polovině intervalu spolehlivosti (obrázek 5).

Základní otázkou je, jak velké n stanovit, abychom s pravděpodobností $1-\alpha$ mohli tvrdit, odchylka výběrového průměru $\overline{x}$ od střední hodnoty μ základního souboru stanovenou přípustnou chybu Δ?

$$P\left(|\overline{x} - \mu| < \Delta\right) = 1 - \alpha \Rightarrow u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}} < \Delta \Rightarrow n > \left(u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\Delta}\right)^2$$

2.4 Intervaly spolehlivosti pro podíl

Předpokládejme, že máme náhodný výběr o rozsahu n za základního souboru s podílem π nebo ekvivalentně z alternativního rozdělení s parametrem π. Nestranný odhad podílu π je výběrový podíl $\hat{\pi} = P$. Podle CLV platí, že náhodná veličina

$$U = \frac{P - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}}$$

má pro $n \to \infty$ přibližně normální rozdělení $N(0,1)$, pro pozorovanou hodnotu $\hat{\pi}$ tedy platí

$$P\left(u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\hat{\pi} - \pi}{\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}} < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha.$$

Pomocí algebraických úprav postupně dostáváme

$$P\left(u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n} < \hat{\pi} - \pi < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}\right) = 1 - \alpha,$$

$$P\left(-\hat{\pi} + u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n} < -\pi < -\hat{\pi} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}\right) = 1 - \alpha,$$

$$P\left(\hat{\pi} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n} < \pi < \hat{\pi} - u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}\right) = 1 - \alpha.$$

Dosazením $u_{\frac{\alpha}{2}} = -u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ dostáváme interval spolehlivosti.

Věta 2.4 Pro riziko odhadu $\alpha \in (0,1)$ je:

a) $100(1-\alpha)\%$ oboustranný interval spolehlivosti pro podíl π

$$\hat{\pi} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n} < \pi < \hat{\pi} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}.$$

b) $100(1-\alpha)\%$ pravostranný resp. levostranný interval spolehlivosti pro parametr π

$$\pi < \hat{\pi} + u_{1-\alpha}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n} \quad \text{resp.} \quad \pi > \hat{\pi} - u_{1-\alpha}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}.$$