PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

Intervalové odhady charakteristik základního souboru

Katedra kvantitativních metod FVL UO Brno

10. PŘEDNÁŠKA

Obsah

Intervalový odhad

- Interval spolehlivosti
- IS pro parametry normalniho rozdeleni
- IS pro E pri velkem rozsahu vyberu
- IS pro odhad stredni hodnoty
- IS pro podil

Intervalový odhad

- Je třeba si uvědomit, že bodový odhad parametru se téměř vždy liší od skutečné hodnoty parametru.
- Potřebujeme tedy zjistit přesnost odhadu, což bude možné určit pomocí **intervalového odhadu**.

Intervalový odhad

- Je třeba si uvědomit, že bodový odhad parametru se téměř vždy liší od skutečné hodnoty parametru.
- Potřebujeme tedy zjistit přesnost odhadu, což bude možné určit pomocí **intervalového odhadu**.

Intervaly spolehlivosti

Definice

Mějme náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z rozdělení s hustotou pravděpodobnosti $f(x, \theta)$ resp. s pravděpodobnostní funkcí $p(x, \theta)$. Jsou-li $T_d(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ a $T_h(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ statistiky, pro něž platí

$$P(T_d < \theta < T_h) = 1 - \alpha,$$

potom interval (T_d, T_h) se nazývá $100(1-\alpha)\%$ **interval spolehlivosti** pro parametr θ. Číslo $0 < \alpha < 1$ nazýváme **riziko odhadu**, číslo $1-\alpha$ je **koeficient spolehlivosti (spolehlivost)**.

Intervaly spolehlivosti

Interval spolehlivosti můžeme také zadat nerovností $\theta > T_d$ příp. $\theta < T_h$. Takto zadané intervaly jsou **jednostranné intervaly spolehlivosti**. **Oboustranné intervaly spolehlivosti**, které splňují podmínku

$$P(\theta \leq T_d) = P(\theta \geq T_h) = \frac{\alpha}{2}$$

se nazývají **symetrické** intervaly spolehlivosti. V dalším výkladu je budeme označovat jen jako oboustranné intervaly spolehlivosti. Nesymetrickými intervaly se zabývat nebudeme.

Intervaly spolehlivosti

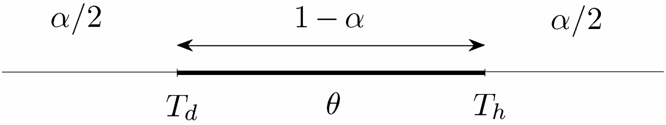
Oboustranný interval spolehlivosti pro parametr θ

Platí-li

$$P(T_d < \theta < T_h) = 1 - \alpha,$$

$$P(\theta \leq T_h) = P(\theta \geq T_d) = \frac{\alpha}{2},$$

pak interval $T_d < \theta < T_h$ nazýváme **oboustranným intervalem spolehlivosti pro** θ.

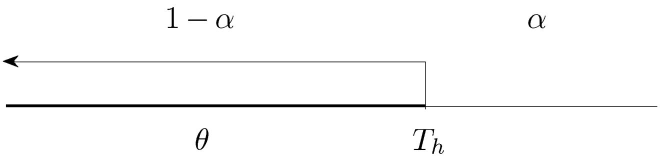


Intervaly spolehlivosti

Pravostranný (horní) interval spolehlivosti pro parametr θ
Platí-li

$$P(\theta < T_h) = 1 - \alpha, P(\theta \geq T_h) = \alpha,$$

pak interval $\theta < T_h$ nazýváme **pravostranným intervalem spolehlivosti pro θ**.

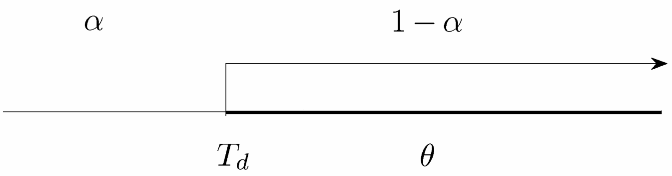


Intervaly spolehlivosti

Levostranný (dolní) interval spolehlivosti pro parametr θ
Platí-li

$$P(\theta > T_d) = 1 - \alpha, P(\theta \leq T_h) = \alpha,$$

pak interval $\theta > T_d$ nazýváme **levostranným intervalem spolehlivosti pro** θ.



Intervaly spolehlivosti pro parametr μ normálního rozdělení

Mějme náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Z dřívějška víme, že náhodná veličina

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1),$$

má Studentovo t-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti, tudíž platí

$$P(t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < T < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)) = 1 - \alpha,$$

odkud dostáváme

$$P\left(t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1 - \alpha.$$

Intervaly spolehlivosti pro parametr μ normálního rozdělení

Mějme náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Z dřívějška víme, že náhodná veličina

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1),$$

má Studentovo t-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti,tudíž platí

$$P(t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < T < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)) = 1 - \alpha,$$

odkud dostáváme

$$P\left(t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1 - \alpha.$$

Intervaly spolehlivosti pro parametr μ normálního rozdělení

Mějme náhodný výběr $X_1, X_2, \dots, X_n$ z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Z dřívějška víme, že náhodná veličina

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1),$$

má Studentovo t-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti,tudíž platí

$$P(t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < T < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)) = 1-\alpha,$$

odkud dostáváme

$$P\left(t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha.$$

Intervaly spolehlivosti pro parametr μ normálního rozdělení

Pomocí algebraických úprav dostáváme postupně

$$P\left(t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < \overline{X} - \mu < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(-\overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < -\mu < -\overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha.$$

Intervaly spolehlivosti pro parametr μ normálního rozdělení

Pomocí algebraických úprav dostáváme postupně

$$P\left(t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < \overline{X} - \mu < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(-\overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < -\mu < -\overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha.$$

Intervaly spolehlivosti pro parametr μ normálního rozdělení

Pomocí algebraických úprav dostáváme postupně

$$P\left(t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < \overline{X} - \mu < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(-\overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < -\mu < -\overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha.$$

Intervaly spolehlivosti pro parametr μ normálního rozdělení

Jelikož pro kvantily t-rozdělení platí $t_{\frac{\alpha}{2}} = -t_{1-\frac{\alpha}{2}}$, obdržíme pro pozorované hodnoty $\overline{x}$ a s náhodných veličin $\overline{X}$ a S

$$P\left(\overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Oboustranný interval spolehlivosti pro parametr μ má tedy tvar

$$\overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Intervaly spolehlivosti pro parametr μ normálního rozdělení

Jelikož pro kvantily t-rozdělení platí $t_{\frac{\alpha}{2}} = -t_{1-\frac{\alpha}{2}}$, obdržíme pro pozorované hodnoty $\overline{x}$ a s náhodných veličin $\overline{X}$ a S

$$P\left(\overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Oboustranný interval spolehlivosti pro parametr μ má tedy tvar

$$\overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Intervaly spolehlivosti pro parametr μ normálního rozdělení

Pravostranný interval spolehlivosti pro parametr μ má tvar

$$\mu < \overline{x} + t_{1-\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Levostranný interval spolehlivosti pro parametr μ má tvar

$$\mu > \overline{x} - t_{1-\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Intervaly spolehlivosti pro parametr μ normálního rozdělení

Pravostranný interval spolehlivosti pro parametr μ má tvar

$$\mu < \overline{x} + t_{1-\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Levostranný interval spolehlivosti pro parametr μ má tvar

$$\mu > \overline{x} - t_{1-\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Intervaly spolehlivosti pro parametr σ^2 normálního rozdělení

Mějme náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Z dřívějška víme, že náhodná veličina

$$\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1)$$

má χ^2-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti. Potom platí

$$P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(\frac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} > \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} > \frac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right) = 1-\alpha.$$

Intervaly spolehlivosti pro parametr σ^2 normálního rozdělení

Mějme náhodný výběr $X_1, X_2, \dots, X_n$ z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Z dřívějška víme, že náhodná veličina

$$\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1)$$

má χ^2-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti. Potom platí

$$P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(\frac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} > \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} > \frac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right) = 1-\alpha.$$

Intervaly spolehlivosti pro parametr σ^2 normálního rozdělení

Mějme náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Z dřívějška víme, že náhodná veličina

$$\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1)$$

má χ^2-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti. Potom platí

$$P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(\frac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} > \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} > \frac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right) = 1-\alpha.$$

Intervaly spolehlivosti pro parametr σ^2 normálního rozdělení

Mějme náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Z dřívějška víme, že náhodná veličina

$$\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1)$$

má χ^2-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti. Potom platí

$$P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(\frac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} > \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} > \frac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right) = 1-\alpha.$$

Intervaly spolehlivosti pro parametr σ^2 normálního rozdělení

Pro pozorovanou hodnotu s^2 nahodné veličiny S^2 dostáváme oboustranný interval spolehlivosti pro parametr σ^2 ve tvaru

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}.$$

Pravostranný interval spolehlivosti pro parametr σ^2 má tvar

$$\sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}.$$

Levostranný interval spolehlivosti pro parametr σ^2 má tvar

$$\sigma^2 > \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}.$$

Intervaly spolehlivosti pro parametr σ^2 normálního rozdělení

Pro pozorovanou hodnotu s^2 nahodné veličiny S^2 dostáváme oboustranný interval spolehlivosti pro parametr σ^2 ve tvaru

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}.$$

Pravostranný interval spolehlivosti pro parametr σ^2 má tvar

$$\sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}.$$

Levostranný interval spolehlivosti pro parametr σ^2 má tvar

$$\sigma^2 > \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}.$$

Intervaly spolehlivosti pro parametr σ^2 normálního rozdělení

Pro pozorovanou hodnotu s^2 nahodné veličiny S^2 dostáváme oboustranný interval spolehlivosti pro parametr σ^2 ve tvaru

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}.$$

Pravostranný interval spolehlivosti pro parametr σ^2 má tvar

$$\sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}.$$

Levostranný interval spolehlivosti pro parametr σ^2 má tvar

$$\sigma^2 > \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}.$$

Intervaly spolehlivosti pro μ při velkém rozsahu výběru

Mějme náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z libovolného rozdělení se střední hodnotou μ a konečným rozptylem σ^2. Při konstukci intervalu spolehlivosti pro parametr μ se vychází z centrální limitní věty, konkrétně z tvrzení, že náhodná veličina

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n}$$

má pro $n \to \infty$ ($n > 30$) přibližně normální rozdělení $N(0,1)$.

Intervaly spolehlivosti pro μ při velkém rozsahu výběru

Platí tedy

$$P\left(u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha.$$

Oboustranný interval spolehlivosti pro parametr μ má tedy tvar

$$\overline{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Pravostranný interval spolehlivosti pro parametr μ má tvar

$$\mu < \overline{x} + u_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Levostranný interval spolehlivosti pro parametr μ má tvar

$$\mu > \overline{x} - u_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Intervaly spolehlivosti pro μ při velkém rozsahu výběru

Platí tedy

$$P\left(u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha.$$

Oboustranný interval spolehlivosti pro parametr μ má tedy tvar

$$\overline{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Pravostranný interval spolehlivosti pro parametr μ má tvar

$$\mu < \overline{x} + u_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Levostranný interval spolehlivosti pro parametr μ má tvar

$$\mu > \overline{x} - u_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Intervaly spolehlivosti pro μ při velkém rozsahu výběru

Platí tedy

$$P\left(u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha.$$

Oboustranný interval spolehlivosti pro parametr μ má tedy tvar

$$\overline{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Pravostranný interval spolehlivosti pro parametr μ má tvar

$$\mu < \overline{x} + u_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Levostranný interval spolehlivosti pro parametr μ má tvar

$$\mu > \overline{x} - u_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Intervaly spolehlivosti pro μ při velkém rozsahu výběru

Platí tedy

$$P\left(u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha.$$

Oboustranný interval spolehlivosti pro parametr μ má tedy tvar

$$\overline{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Pravostranný interval spolehlivosti pro parametr μ má tvar

$$\mu < \overline{x} + u_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Levostranný interval spolehlivosti pro parametr μ má tvar

$$\mu > \overline{x} - u_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Stanovení velikosti výběru pro odhad střední hodnoty

Ukážeme nyní, jak velikost výběru ovlivňuje přesnost odhadu. Uvažujme oboustranný interval spolehlivosti pro μ.

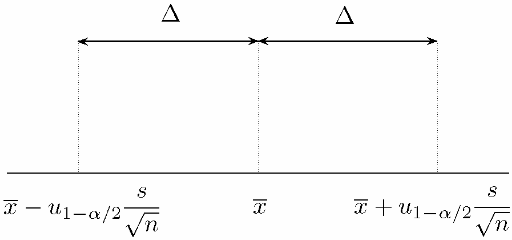
Definice

Přípustná chyba odhadu pro μ je

$$\Delta = u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = u_{1-\frac{\alpha}{2}} \widehat{SE}.$$

Přípustná chyba je rovna polovině intervalu spolehlivosti.

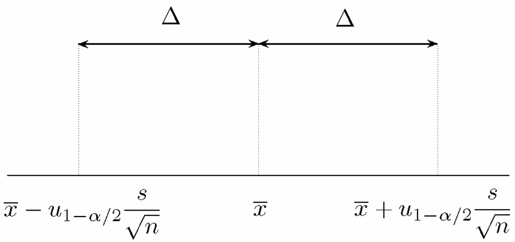
Stanovení velikosti výběru pro odhad střední hodnoty



Jak velké n stanovit, abychom s pravděpodobností $1-\alpha$ mohli tvrdit, odchylka výběrového průměru $\overline{x}$ od střední hodnoty μ základního souboru stanovenou přípustnou chybu Δ?

$$P\left(|\overline{x}-\mu| < \Delta\right) = 1-\alpha \Rightarrow u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}} < \Delta \Rightarrow n > \left(u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\Delta}\right)^2$$

Stanovení velikosti výběru pro odhad střední hodnoty



Jak velké n stanovit, abychom s pravděpodobností $1-\alpha$ mohli tvrdit, odchylka výběrového průměru $\overline{x}$ od střední hodnoty μ základního souboru stanovenou přípustnou chybu Δ?

$$P\left(|\overline{x}-\mu|<\Delta\right)=1-\alpha \Rightarrow u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}<\Delta \Rightarrow n>\left(u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\Delta}\right)^2$$

Intervaly spolehlivosti pro podíl

Předpokládejme, že máme náhodný výběr o rozsahu n za základního souboru s podílem π nebo ekvivalentně z alternativního rozdělení s parametrem π. Nestranný odhad podílu π je výběrový podíl $\hat{\pi} = P$. Podle CLV platí, že náhodná veličina

$$U = \frac{P - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}}$$

má pro $n \to \infty$ přibližně normální rozdělení $N(0,1)$, pro pozorovanou hodnotu $\hat{\pi}$ tedy platí

$$P\left(u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\hat{\pi} - \pi}{\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}} < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha.$$

Intervaly spolehlivosti pro podíl

Pomocí algebraických úprav postupně dostáváme

$$P\left(u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n} < \hat{\pi}-\pi < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(-\hat{\pi}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n} < -\pi < -\hat{\pi}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(\hat{\pi}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n} < \pi < \hat{\pi}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}\right) = 1-\alpha.$$

Jelikož $u_{\frac{\alpha}{2}} = -u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ dostaneme oboustranný interval spolehlivosti pro podíl ve tvaru

$$\hat{\pi}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n} < \pi < \hat{\pi}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}.$$

Intervaly spolehlivosti pro podíl

Pomocí algebraických úprav postupně dostáváme

$$P\left(u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n} < \hat{\pi}-\pi < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(-\hat{\pi}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n} < -\pi < -\hat{\pi}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(\hat{\pi}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n} < \pi < \hat{\pi}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}\right) = 1-\alpha.$$

Jelikož $u_{\frac{\alpha}{2}} = -u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ dostaneme oboustranný interval spolehlivosti pro podíl ve tvaru

$$\hat{\pi}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n} < \pi < \hat{\pi}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}.$$

Intervaly spolehlivosti pro podíl

Pomocí algebraických úprav postupně dostáváme

$$P\left(u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n} < \hat{\pi}-\pi < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(-\hat{\pi}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n} < -\pi < -\hat{\pi}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(\hat{\pi}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n} < \pi < \hat{\pi}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}\right) = 1-\alpha.$$

Jelikož $u_{\frac{\alpha}{2}} = -u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ dostaneme oboustranný interval spolehlivosti pro podíl ve tvaru

$$\hat{\pi}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n} < \pi < \hat{\pi}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}.$$

Intervaly spolehlivosti pro podíl

Pomocí algebraických úprav postupně dostáváme

$$P\left(u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n} < \hat{\pi}-\pi < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(-\hat{\pi}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n} < -\pi < -\hat{\pi}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(\hat{\pi}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n} < \pi < \hat{\pi}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}\right) = 1-\alpha.$$

Jelikož $u_{\frac{\alpha}{2}} = -u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ dostaneme oboustranný interval spolehlivosti pro podíl ve tvaru

$$\hat{\pi}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n} < \pi < \hat{\pi}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}.$$

Intervaly spolehlivosti pro podíl

Analogickým postupem bychom obdrželi jednostranné intervaly: Pravostranný interval spolehlivosti pro parametr π

$$\pi < \hat{\pi} + u_{1-\alpha}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}.$$

Levostranný interval spolehlivosti pro parametr π

$$\pi > \hat{\pi} - u_{1-\alpha}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}.$$

Intervaly spolehlivosti pro podíl

Analogickým postupem bychom obdrželi jednostranné intervaly: Pravostranný interval spolehlivosti pro parametr π

$$\pi < \hat{\pi} + u_{1-\alpha}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}.$$

Levostranný interval spolehlivosti pro parametr π

$$\pi > \hat{\pi} - u_{1-\alpha}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}.$$

Příklad 1

Při zjišťování sklizňových ztrát u obilí jsme na 12 čtvercových plochách 1 m^2 zjistili tyto ztráty [v g]:
8,2 11,1 13,0 11,5 10,5 10,5 8,3 11,2 13,7 10,6 12,8 10,6.
Předpokládejte, že sklizňové ztráty mají normální rozdělení. Určete:
a) bodový odhad průměrných ztrát na 1 m^2, bodový odhad rozptylu a směrodatné odchylky,
b) oboustranný 95%-ní interval spolehlivosti pro směrodatnou odchylku,
c) s 95%-ní pravděpodobností, zda průměrné ztráty nepřekračují hranici 12 g/m^2.

Příklad 2

Při průzkumu zájmu o nový výrobek odpovědělo ze 400 dotázaných zákazníků supermarketu ABC kladně na otázku, zda si nový výrobek koupí, 80 zákazníků. Určete bodový a intervalový odhad podílu těchto zákazníků základního souboru supermarketu ABC.

Základní literatura

- MANN, P.S. Introductory Statistics. 6th edition. Hoboken: Wiley, 2007. ISBN 978-0-471-75530-2.
- MOUČKA, J., RÁDL, P. Matematika pro studenty ekonomie. 1. vyd. Grada 2010. ISBN 978-80-247-3260-2.
- NEUBAUER, J., SEDLAČÍK, M., KŘÍŽ, O. Základy statistiky – Aplikace v technických a ekonomických oborech. Grada 2012.ISBN: 978-80-247-4273-1.
- ŘEZANKOVÁ, H. Analýza dat z dotazníkových šetření. 2. vydání, Professional Publishing, 2010. ISBN: 9788074310195.

Doporučená literatura

- AGRESTI, A. Categorical Data Analysis. Second Edition. Wiley 2002. ISBN: 0-471-36093-7.
- ANDĚL, J. Statistické metody. 3. vydání. Praha: Matfyzpress, 2003. ISBN 80-86732-08-8.
- ANDĚL, J. Základy matematické statistiky. 2. vyd. Praha: Matfyzpress, 2007, 358 s. ISBN 978-80-7378-001-2.
- VÁGNER, M. Integrální počet funkcí jedné proměnné. 1. vydání. Brno: UO, 2005,126 s. ISBN 80-7231-025-9.
- VÁGNER, M., KAŠTÁNKOVÁ, V. Posloupnosti a řady. 1. vydání. Brno: UO, 2006. ISBN 80-7231-131-X.