Studijní text

Název předmětu: PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

Garant předmětu: RNDr. Marek Sedlačík, Ph.D.

Téma: Testování hypotéz

Obsah

1 Testování hypotéz

1.1 Princip testování hypotéz

Statistickou hypotézou se rozumí určité tvrzení

- o parametrech rozdělení zkoumané náhodné veličiny (μ, σ^2, π, λ, ...),
- o tvaru rozdělení (normální, Poissonovo, ...).

Předpokládáme-li např., že střední hodnota základního souboru μ se rovná určité konkrétní hodnotě μ_0, vyslovili jsme hypotézu o parametru základního souboru. Na základě vyčerpávajícího šetření celého základního souboru by bylo možné bezpečně rozhodnout o správnosti či nesprávnosti hypotézy. Takové vyčerpávající šetření je většinou neekonomické nebo technicky neproveditelné, proto podrobíme šetření jen určitou část základního souboru – **výběrový soubor**. Ten použijeme pro rozhodnutí o správnosti vyslovené hypotézy.

Při testování hypotéz formulujeme dvojici tvrzení

1. H ... předpoklad, který vyslovíme o určitém parametru či tvaru rozdělení základního souboru, nazývá se **nulová hypotéza**, např. hypotézu o konkrétní střední hodnotě zapíšeme
   - $H : \mu = \mu_0$,
2. A ... tvrzení, které popírá vlastnost vyslovenou v nulové hypotéze, nazývá se **alternativní hypotéza**
   - $A : \mu \neq \mu_0 \rightarrow$ oboustranný test,
   - $A : \mu > \mu_0 \rightarrow$ jednostranný test,
   - $A : \mu < \mu_0 \rightarrow$ jednostranný test.

Při testování hypotéz se můžeme dopustit chybných závěrů (tabulka 1), neboť úsudky jsou prováděny pomocí náhodného výběru:

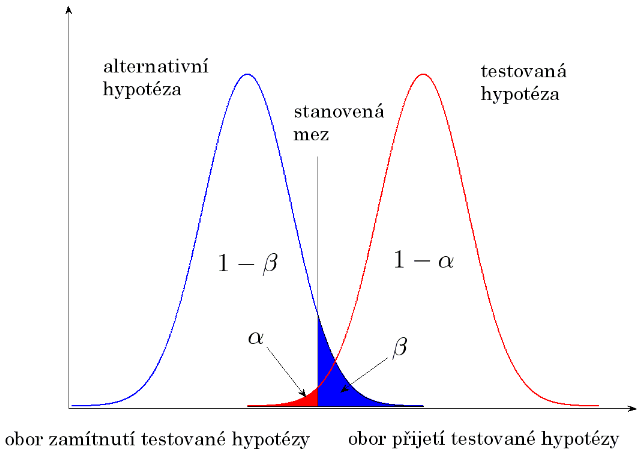
1. Zamítneme-li nulovou hypotézu, přestože je ve skutečnosti pravdivá, dopouštíme se **chyby I. druhu**. Maximální pravděpodobnost chyby I. druhu označujeme α a nazýváme **hladinou významnosti**. Číslo $1 - \alpha$ vyjadřuje minimální pravděpodobnost, s jakou nezamítneme správnou hypotézu.
2. Přijmeme-li naopak nulovou hypotézu, přestože je ve skutečnosti nesprávná, dopouštíme se **chyby II. druhu**. Maximální pravděpodobnost chyby II. druhu označujeme β. Číslo $1 - \beta$ je **síla testu** a vyjadřuje minimální pravděpodobnost, s jakou zamítneme nulovou hypotézu H, platí-li ve skutečnosti alternativní hypotéza A.

K testu hypotézy použijeme vhodnou statistiku $T = T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tzv. testové kriterium, která má při platnosti hypotézy H známé pravděpodobnostní rozdělení (zpravidla t, u, χ^2, F). Prostor hodnot této statistiky se rozdělí na 2 disjunktní obory (obrázek 1):

- $W_{1-\alpha}$ **obor přijetí hypotézy** H – množina těch hodnot, které svědčí ve prospěch hypotézy H,

skutečnost	**H je pravdivá**		**H je nepravdivá**	
úsudek o H		prst.		prst.
se nezamítá	správné rozhodnutí	$1-\alpha$	chyba II. druhu	β
se zamítá	chyba I. druhu	α	správné rozhodnutí	$1-\beta$

Tabulka 1: Důsledky rozhodnutí při testování hypotéz



Obrázek 1: Princip testování hypotéz

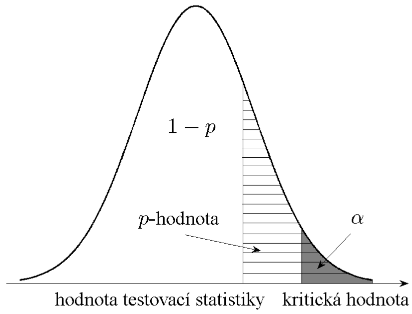
- W_α **kritický obor** (obor zamítnutí hypotézy H) - obsahuje hodnoty svědčící ve prospěch hypotézy A.

Např. pro test hypotézy o střední hodnotě μ normálního rozdělení $H : \mu = \mu_0 \rightarrow A : \mu > \mu_0$ bude kritický obor $W_\alpha = \{t, t \geq t_{1-\alpha}\}$, kde μ_0 je předpokládaná hodnota parametru μ, t je hodnota testového kriteria a $t_{1-\alpha}$ je kvantil Studentova rozdělení – tzv. **kritická hodnota**.

1.2 Postup při testování hypotéz

Testování hypotéz užitím kritického oboru W_α

1. Zformulujeme hypotézy H, A (jako alternativní většinou volíme hypotézu, kterou chceme s ohledem na věcný problém prokázat).
2. Zvolíme hladinu významnosti α (zpravidla 0,05 a 0,01).
3. Zvolíme vhodné testové kriterium (pochopitelně vzhledem k testovanému parametru nebo testované vlastnosti).
4. Vymezíme kritický obor W_α s ohledem na formulaci hypotézy A.
5. Vypočteme hodnotu testového kriteria a určíme příslušné kvantily.



Obrázek 2: Vztah mezi α a p-hodnotou pro pravostranný test

6. Zformulujeme závěr:
   - Jestliže hodnota testového kriteria padne do kritického oboru, zamítneme hypotézu H a říkáme, že s pravděpodobností $1-\alpha$ platí hypotéza A. Riziko nesprávnosti tohoto výroku je $100\alpha\%$.
   - Jestliže hodnota testového kriteria padne do oboru přijetí, říkáme že hypotézu H nemůžeme na dané hladině významnosti zamítnout. (Výroku o správnosti H se vyhneme, neboť nebudeme určovat pravděpodobnost chyby β).

Testování hypotéz užitím intervalu spolehlivosti

1. Zformulujeme hypotézy H, A (jako alternativní volíme hypotézu, kterou chceme s ohledem na věcný problém prokázat).
2. Zvolíme hladinu významnosti α (zpravidla 0,05 nebo 0,01).
3. Vypočteme vhodný interval spolehlivosti s ohledem na testovaný parametr a formulaci alternativní hypotézy A.
4. Zformulujeme závěr:
   - Jestliže daná hodnota testového parametru (tj. např. μ_0) padne do intervalu spolehlivosti, nezamítáme na hladině významnosti α nulovou hypotézu H.
   - Jestliže daná hodnota testového parametru (tj. např. μ_0) nepadne do intervalu spolehlivosti, zamítáme na hladině významnosti α nulovou hypotézu H.

Testování hypotéz užitím p-hodnoty

Statistický software uvádí ve výsledkových výstupech tzv. p-hodnotu. Hladina významnosti α je předpokládaná pravděpodobnost zamítnutí nulové hypotézy ještě před uskutečněním testu. Naopak p-hodnota je nejmenší pravděpodobnost zamítnutí nulové hypotézy (obrázek 2) určená na základě testovacího kritéria (tzn. po uskutečnění testu).

1. Zformulujeme hypotézy H, A (jako alternativní volíme hypotézu, kterou chceme s ohledem na věcný problém prokázat).
2. Zvolíme hladinu významnosti α (zpravidla 0,05 nebo 0,01).

3. Užitím vhodného software spočteme p-hodnotu.
4. Zformulujeme závěr:
   - Jestliže $\alpha > p$-hodnota, na hladině významnosti α hypotézu H zamítáme.
   - Jestliže $\alpha < p$-hodnota, na hladině významnosti α hypotézu H nezamítáme.

2 Testy o tvaru rozdělení

2.1 χ^2-test dobré shody

Hodnoty náhodného výběru $x_1, x_2, \ldots, x_n$ roztřídíme do k disjunktních tříd, přičemž $n_j, j = 1, 2, \ldots, k$, je četnost j-té třídy resp. j-té obměny a π_j je pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude hodnoty z j-té třídy resp. j-té obměny, počítaná za předpokladu, že X má předpokládané rozdělení. Východiskem pro konstrukci testového kriteria je porovnání statistické pravděpodobnosti (relativní četnosti n_j/n) s hypotetickou pravděpodobností π_j.

Formulujeme hypotézu a alternativu:

H : náhodná veličina X má rozdělení daného typu,

A : náhodná veličina X nemá rozdělení daného typu.

Testové kriterium je statistika

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_j - n\pi_j)^2}{n\pi_j},$$

která má za předpokladu správnosti hypotézy H pro velké n (asymptoticky) Pearsonovo χ^2 rozdělení s $\nu = k - c - 1$ stupni volnosti, kde c je počet odhadovaných parametrů ověřovaného rozdělení. Kritický obor je

$$W_\alpha = \left\{\chi^2, \chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}(\nu)\right\},$$

kde $\chi^2_{1-\alpha}(\nu)$ je kvantil Pearsonova rozdělení.

2.1 Poznámka: Při praktickém provádění testu se požaduje, aby ve všech třídách byly teoretické četnosti větší než 5, tj.

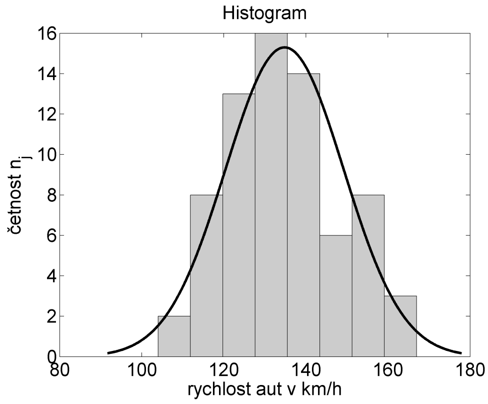
$$n\pi_j > 5, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Není-li tato podmínka splněna, přistupujeme ke slučování tříd.

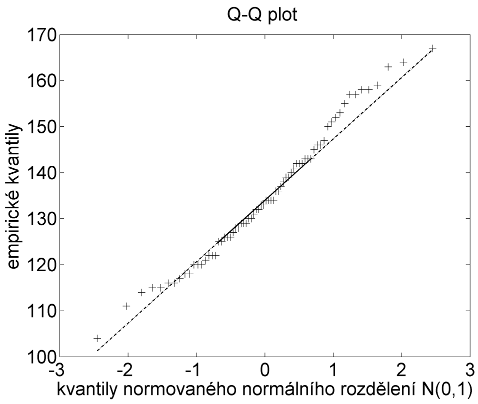
2.2 Grafické metody

Histogram

Základní představu o tvaru rozdělení datového souboru získáme pomocí **histogramu**, příp. **polygonu četností**. K histogramu je možné zkonstruovat křivku popisující rozdělení četností, která by se očekávala, pokud by se jednalo o výběr z daného rozdělení (obrázek 3).



Obrázek 3: Grafické metody ověřování normality – histogram s Gaussovou křivkou



Obrázek 4: Grafické metody ověřování normality – Q-Q plot

Q-Q plot

Konstrukce tzv. Q-Q plotu spočívá ve vynesení dvojic bodů $[X_P, x_p]$, kde X_p jsou kvantily teoretického rozdělení (normálního, exponenciálního, Studentova apod.) a x_p jsou empirické kvantily zjištěné z datového souboru (obrázek 4).

2.3 Testy koeficientů šikmosti a špičatosti

O normálním rozdělení víme, že má nulové koeficienty šikmosti a špičatosti $\alpha_3 = 0$ a $\alpha_4 = 0$. Toho se využívá k ověření hypotézy, že X má normální rozdělení. Z výběru se vypočtou odhady obou těchto koeficientů

$$\hat{\alpha}_3 = a_3 = \frac{1}{ns_n^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3, \quad \hat{\alpha}_3 = a_4 = \frac{1}{ns_n^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^4 - 3.$$

Formulujeme hypotézy:

$H : H_1 : \alpha_3 = 0 \rightarrow A_1 : \alpha_3 \neq 0,$

$A : H_2 : \alpha_4 = 0 \rightarrow A_2 : \alpha_4 \neq 0.$

Pokud rozdělení je normální, musí mít oba koeficienty nulové.

1. $H_1 : \alpha_3 = 0 \to A_1 : \alpha_3 \neq 0$
   Testové kriterium je statistika
   $$u_3 = \frac{a_3}{\sqrt{D(a_3)}}, \quad \text{kde} \quad D(a_3) = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)},$$
   která má při platnosti hypotézy H_1 asymptoticky normální rozdělení $N(0,1)$. Kritický obor je roven
   $$W_\alpha = \left\{u_3, |u_3| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\},$$
   kde $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ je kvantil rozdělení $N(0,1)$.
2. $H_2 : \alpha_4 = 0 \to A_2 : \alpha_4 \neq 0$
   Testové kriterium je statistika
   $$u_4 = \frac{a_4 + \frac{6}{n+1}}{\sqrt{D(a_4)}}, \quad \text{kde} \quad D(a_4) = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)},$$
   která má při platnosti hypotézy H_2 asymptoticky normální rozdělení $N(0,1)$. Kritický obor je roven
   $$W_\alpha = \left\{u_4, |u_4| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\},$$
   kde $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ je kvantil rozdělení $N(0,1)$.

2.2 Poznámka: Užití testů nulovosti koeficientu α_3 a α_4 se doporučuje pro dostatečně velké výběry $n > 200$, resp $n > 500$.

- Jestliže alespoň jeden z testů zamítne hypotézu o nulovosti koeficientů, zamítneme hypotézu o tom, že náhodná veličina X má normální rozdělení (data nejsou výběrem z normálního rozdělení). Budeme říkat, že s pravděpodobností $1-\alpha$ nemá náhodná veličina normální rozdělení.
- Pokud nemůžeme zamítnout ani jednu hypotézu o nulovosti koeficientů šikmosti a špičatosti, budeme říkat, že se nám na dané hladině významnosti α nepodařilo zamítnou normalitu, neboli že normální rozdělení je vhodným modelem pro popis náhodné veličiny X.

Kombinovaný test koeficientů α_3 a α_4 – C-test

Pro testování normality je možné využít známý poznatek, že součet k čtverců nezávislých normovaných normálních veličin má Pearsonovo χ^2 rozdělení s k stupni volnosti. Formulujeme hypotézy:

H : náhodná veličina X má normální rozdělení,

A : náhodná veličina X nemá normální rozdělení.

Testové kriterium je statistika
$$C = u_3^2 + u_4^2,$$
která má při platnosti hypotézy H χ^2 rozdělení se dvěma stupni volnosti, u_3 a u_4 jsou statistiky definované v testech nulovosti koeficientů šikmosti a špičatosti. Kritický obor je
$$W_\alpha = \left\{C, C \geq \chi^2_{1-\alpha}(2)\right\},$$
kde $\chi^2_{1-\alpha}(2)$ je kvantil Pearsonova χ^2 rozdělení.

Modifikované testy

V literatuře se uvádí, že C-test, ve tvaru, jak bylo uvedeno, by se měl používat pouze pro velké náhodné výběry ($n > 200$). Pro výběry menšího rozsahu je možné spočítat statistiku

$$z_3 = \delta \ln \left[\frac{u_3}{a} + \sqrt{\left(\frac{u_3}{a}\right)^2 + 1} \right], \text{ kde}$$

$b = \frac{3(n^2+27n-70)(n+1)(n+3)}{(n-2)(n+5)(n+7)(n+9)}$, $W^2 = \sqrt{2(b-1)} - 1$, $\delta = \frac{1}{\sqrt{\ln W}}$, $a = \sqrt{\frac{2}{W^2-1}}$ a statistiku

$$z_4 = \frac{1 - \frac{2}{9A} - \sqrt[3]{\frac{1-\frac{2}{A}}{1+u_4\sqrt{\frac{2}{A-4}}}}}{\sqrt{\frac{2}{9A}}}, \text{ kde}$$

$B = \frac{6(n^2-5n+2)}{(n+7)(n+9)} \sqrt{\frac{6(n+3)(n+5)}{n(n-2)(n-3)}}$, $A = 6 + \frac{8}{B}\left(\frac{2}{B} + \sqrt{1 + \frac{4}{B^2}}\right)$. Nově zavedené testové kritérium $C' = z_3^2 + z_4^2$ má při platnosti hypotézy H rozdělení χ^2 se dvěma stupni volnosti. Normalitu tedy zamítáme, pokud je $C' \geq \chi^2_{1-\alpha}(2)$. Daný test je možné použít pro výběry rozsahu většího než 20.

2.3 Poznámka: Pomocí statistik z_3 a z_4 lze také testovat nulovost koeficientu šikmosti a špičatosti. Obě mají při platnosti nulové hypotézy přibližně normované normální rozdělení. Test nulovosti koeficientu šikmosti založený na statistice z_3 je možné aplikovat již na výběry o rozsahu $n > 8$, zatímco test pomocí statistiky u_3 by se měl použít pro $n > 200$. Podobně nulovost koeficientu špičatosti lze testovat pomocí statistiky z_4 již pro $n > 20$, zatímco původní nemodifikovaný test využívající statistiku u_4 by se měl používat jen pro velká n ($n > 500$).

3 Jednovýběrové testy hypotéz

3.1 Test o střední hodnotě μ normálního rozdělení

Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Již víme, že statistika

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n}$$

má Studentovo rozdělení s $n - 1$ stupni volnosti. Využijeme této statistiky pro konstrukci testu o parametru μ.

Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ značí hodnoty náhodného výběru (naměřená data), $\overline{x}$ značí aritmetický průměr a s je výběrová směrodatná odchylka. Testujeme hypotézu, že parametr μ je roven hodnotě μ_0:

$$H : \mu = \mu_0,$$

testové kriterium je statistika

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n},$$

která má při platnosti hypotézy H Studentovo t-rozdělení s $\nu = n-1$ stupni volnosti. Podle alternativní hypotézy volíme následující kritické obory:

alternativní hypotéza	**kritický obor**
$A : \mu > \mu_0$	$W_\alpha = \{t, t \geq t_{1-\alpha}(\nu)\}$
$A : \mu < \mu_0$	$W_\alpha = \{t, t \leq -t_{1-\alpha}(\nu)\}$
$A : \mu \neq \mu_0$	$W_\alpha = \left\{t, \lvert t\rvert \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)\right\}$

kde $t_{1-\alpha}(\nu)$, $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)$ jsou kvantily Studentova rozdělení.

3.2 Test o parametru σ^2 normálního rozdělení

Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Víme, že statistika

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

má Pearsonovo rozdělení s $n - 1$ stupni volnosti. Využijeme této statistiky pro konstrukci testu o parametru σ^2.

Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ značí hodnoty náhodného výběru (naměřená data), s^2 je výběrový rozptyl. Testujeme hypotézu, že parametr σ^2 je roven hodnotě σ_0^2:

$$H : \sigma^2 = \sigma_0^2,$$

testové kriterium je statistika

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2},$$

která má při platnosti hypotézy H Pearsovovo χ^2-rozdělení s $\nu = n - 1$ stupni volnosti. Podle alternativní hypotézy volíme následující kritické obory:

alternativní hypotéza	**kritický obor**
$A : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$W_\alpha = \left\{\chi^2, \chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}(\nu)\right\}$
$A : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$W_\alpha = \{\chi^2, \chi^2 \leq \chi^2_{\alpha}(\nu)\}$
$A : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$W_\alpha = \left\{\chi^2, \chi^2 \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(\nu) \text{ nebo } \chi^2 \geq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)\right\}$

kde $\chi^2_{1-\alpha}(\nu)$, $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)$ jsou kvantily Pearsonova rozdělení.

3.3 Test hypotézy o střední hodnotě pro výběry velkého rozsahu

Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z nějakého libovolného rozdělení se střední hodnotou μ. Statistika

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n}$$

má podle CLV pro velké n přibližně normální rozdělení $N(0, 1)$. Využijeme této statistiky pro konstrukci testu o parametru μ.

Nechť $x_1, x_2, \dots, x_n$ značí hodnoty náhodného výběru (naměřená data), $\overline{x}$ značí aritmetický průměr a s je výběrová směrodatná odchylka. Testujeme hypotézu, že parametr μ je roven hodnotě μ_0:

$$H : \mu = \mu_0,$$

testové kriterium je statistika

$$u = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n},$$

která má při platnosti hypotézy H asymptoticky normální rozdělení $N(0,1)$. Podle alternativní hypotézy volíme následující kritické obory:

alternativní hypotéza	**kritický obor**
$A : \mu > \mu_0$	$W_\alpha = \{u, u \geq u_{1-\alpha}\}$
$A : \mu < \mu_0$	$W_\alpha = \{u, u \leq -u_{1-\alpha}\}$
$A : \mu \neq \mu_0$	$W_\alpha = \left\{u, \lvert u \rvert \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$

kde $u_{1-\alpha}$, $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ jsou kvantily rozdělení $N(0,1)$.

3.4 Test hypotézy o podílu

Předpokládejme, že máme náhodný výběr o rozsahu n ze základního souboru s podílem π nebo ekvivalentně z alternativního rozdělení s parametrem π. Nestranný odhad podílu π je výběrový podíl $\hat{\pi}$. Podle CLV platí, že náhodná veličina

$$U = \frac{\hat{\pi} - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}}$$

má pro $n \to \infty$ přibližně normální rozdělení $N(0,1)$. Tohoto tvrzení použijeme při konstrukci testu o podílu.

Nechť $\hat{\pi}$ je odhad podílu v základním souboru na základě výběru o rozsahu n. Testujeme hypotézu, že parametr π je roven hodnotě π_0:

$$H : \pi = \pi_0,$$

testové kriterium je statistika

$$u = \frac{\hat{\pi} - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)/n}}$$

která má při platnosti hypotézy H asymptoticky normální rozdělení $N(0,1)$. Podle alternativní hypotézy volíme následující kritické obory:

alternativní hypotéza	**kritický obor**
$A : \pi > \pi_0$	$W_\alpha = \{u, u \geq u_{1-\alpha}\}$
$A : \pi < \pi_0$	$W_\alpha = \{u, u \leq -u_{1-\alpha}\}$
$A : \pi \neq \pi_0$	$W_\alpha = \left\{u, \lvert u \rvert \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$

kde $u_{1-\alpha}$, $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ jsou kvantily rozdělení $N(0,1)$.

4 Dvouvýběrové testy hypotéz

4.1 Test shody rozptylů

Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Označme S_X^2 a S_Y^2 odpovídající výběrové rozptyly. Statistika

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$$

má Fisherovo-Snedecorovo rozdělení s $\nu_1 = n_1 - 1$ a $\nu_2 = n_2 - 1$ stupni volnosti. Využijeme tohoto tvrzení pro konstrukci testu o shodě rozptylů.

Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ značí hodnoty náhodného výběru z $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ značí hodnoty náhodného výběru z $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, s_x^2 a s_y^2 jsou odpovídající hodnoty výběrových rozptylů. Testujeme hypotézu, že parametr σ_1^2 je roven hodnotě σ_2^2:

$$H : \sigma_1^2 = \sigma_2^2,$$

testové kriterium je statistika

$$F = \frac{s_x^2}{s_y^2},$$

která má při platnosti hypotézy H Fisherovo-Snedecorovo rozdělení s $\nu_1 = n_1 - 1$ a $\nu_2 = n_2 - 1$ stupni volnosti. Podle alternativní hypotézy volíme následující kritické obory:

alternativní hypotéza	**kritický obor**
$A : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$W_\alpha = \{F, F \geq F_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2)\}$
$A : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$W_\alpha = \{F, F \leq F_{\alpha}(\nu_1, \nu_2)\}$
$A : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$W_\alpha = \left\{F, F \leq F_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_1, \nu_2) \vee F \geq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu_1, \nu_2)\right\}$

kde $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$, $F_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2)$, $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu_1, \nu_2)$ jsou kvantily Fisher-Snedecorova rozdělení, $\nu_1 = n_1 - 1$, $\nu_2 = n_2 - 1$.

4.2 Test shody středních hodnot

Test shody středních hodnot za předpokladu $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Dále předpokládejme, že tyto výběry jsou **nezávislé**. Označme $\overline{X}$ a $\overline{Y}$ odpovídající výběrové průměry, S_X^2 a S_Y^2 odpovídající výběrové rozptyly. Platí-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, pak statistika

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S} \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}},$$

kde

$$S = \left[\frac{(n_1-1)S_X^2 + (n_2-1)S_Y^2}{n_1+n_2-2}\right]^{1/2}$$

má Studentovo rozdělení s $\nu = n_1 + n_2 - 2$ stupni volnosti. Využijeme této vlastnosti pro konstrukci testu o shodě středních hodnot.

Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ značí hodnoty náhodného výběru z $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ značí hodnoty náhodného výběru z $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\overline{x}, \overline{y}$, s_x^2 a s_y^2 jsou odpovídající hodnoty výběrových průměrů a rozptylů. Testujeme hypotézu, že parametr μ_1 je roven hodnotě μ_2 ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$):

$$H : \mu_1 = \mu_2,$$

testové kriterium je statistika

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{S}\sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}},$$

kde

$$S = \left[\frac{(n_1-1)s_x^2 + (n_2-1)s_y^2}{n_1+n_2-2}\right]^{1/2}$$

která má při platnosti nulové hypotézy H Studentovo rozdělení s $\nu = n_1 + n_2 - 2$ stupni volnosti. Podle alternativní hypotézy volíme následující kritické obory:

alternativní hypotéza	**kritický obor**
$A : \mu_1 > \mu_2$	$W_\alpha = \{t, t \geq t_{1-\alpha}(\nu)\}$
$A : \mu_1 < \mu_2$	$W_\alpha = \{t, t \leq -t_{1-\alpha}(\nu)\}$
$A : \mu_1 \neq \mu_2$	$W_\alpha = \left\{t, \lvert t\rvert \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)\right\}$

kde $t_{1-\alpha}(\nu)$, $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)$ jsou kvantily Studentova rozdělení, $\nu = n_1 + n_2 - 2$.

Test shody středních hodnot za předpokladu $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Dále předpokládejme, že tyto výběry jsou **nezávislé**. Označme $\overline{X}$ a $\overline{Y}$ odpovídající výběrové průměry, S_X^2 a S_Y^2 odpovídající výběrové rozptyly. Pro $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, má statistika

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_1} + \frac{S_Y^2}{n_2}}},$$

přibližně Studentovo rozdělení s ν stupni volnosti. Využijeme této vlastnosti pro konstrukci testu o shodě středních hodnot.

Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ značí hodnoty náhodného výběru z $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ značí hodnoty náhodného výběru z $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\overline{x}$, $\overline{y}$, s_x^2 a s_y^2 odpovídající hodnoty výběrových průměrů a rozptylů. Testujeme hypotézu, že parametr μ_1 je roven hodnotě μ_2 ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$):

$$H : \mu_1 = \mu_2,$$

testové kriterium je statistika

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}}},$$

která má při platnosti nulové hypotézy H přibližně Studentovo rozdělení s ν stupni volnosti. Stupně volnosti daného rozdělení určíme ze vztahu

$$\nu \approx \frac{\left(\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1-1}\left(\frac{s_x^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2-1}\left(\frac{s_y^2}{n_2}\right)^2}$$

zaokrouhleno dolů na nejbližší celé číslo. Podle alternativní hypotézy volíme následující kritické obory:

alternativní hypotéza	**kritický obor**
$A: \mu_1 > \mu_2$	$W_\alpha = \{t, t \geq t_{1-\alpha}(\nu)\}$
$A: \mu_1 < \mu_2$	$W_\alpha = \{t, t \leq -t_{1-\alpha}(\nu)\}$
$A: \mu_1 \neq \mu_2$	$W_\alpha = \left\{t, \lvert t \rvert \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)\right\}$

kde $t_{1-\alpha}(\nu)$, $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)$ jsou kvantily Studentova rozdělení, stupně volnosti ν se určí pomocí zmíněného vztahu.

4.3 Test shody středních hodnot dvou výběrů velkého rozsahu

Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ je náhodný výběr z rozdělení se střední hodnotou μ_1 a $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ je náhodný výběr z rozdělení se střední hodnotou μ_2. Dále předpokládejme, že tyto výběry jsou *nezávislé* a rozsahy n_1 a n_2 dostatečně velké. Označme $\overline{X}$ a $\overline{Y}$ odpovídající výběrové průměry, S_X^2 a S_Y^2 odpovídající výběrové rozptyly. Statistika

$$U = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_1} + \frac{S_Y^2}{n_2}}},$$

má přibližně normální rozdělení $N(0,1)$.

Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ značí hodnoty náhodného výběru z prvního rozdělení, $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ značí hodnoty náhodného výběru z druhého rozdělení, $\overline{x}$, $\overline{y}$, s_x^2 a s_y^2 jsou odpovídající hodnoty výběrových průměrů a rozptylů. Testujeme hypotézu, že parametr μ_1 je roven hodnotě μ_2:

$$H: \mu_1 = \mu_2,$$

testové kriterium je statistika

$$u = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}}},$$

která má při platnosti nulové hypotézy H přibližně normální rozdělení $N(0,1)$. Podle alternativní hypotézy volíme následující kritické obory:

alternativní hypotéza	kritický obor
$A: \mu_1 > \mu_2$	$W_\alpha = \{u, u \geq u_{1-\alpha}\}$
$A: \mu_1 < \mu_2$	$W_\alpha = \{u, u \leq -u_{1-\alpha}\}$
$A: \mu_1 \neq \mu_2$	$W_\alpha = \left\{u, \lvert u\rvert \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$

kde $u_{1-\alpha}$, $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ jsou kvantily rozdělení $N(0,1)$.

4.4 Párový test

Uvažujme situaci, kdy ve výběru o rozsahu n spolu vždy 2 měření určitým způsobem souvisí (např. měření na jednom prvku je provedeno dvakrát za různých podmínek). Uvažujeme tedy dvě **závislé** náhodné veličiny X a Y se středními hodnotami μ_1 a μ_2, u kterých nás budou zajímat jejich diference $D = X - Y$. Předpokládejme, že máme náhodný výběr $D_1, D_2, \ldots, D_n$, kde diference $D_i = X_i - Y_i$ mají normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu = \mu_1 - \mu_2$ (σ^2 není třeba znát). Statistika

$$T = \frac{\overline{D} - \mu}{S_D}\sqrt{n},$$

kde $\overline{D}$ je výběrový průměr diferencí a S_D je výběrová směrodatná odchylka diferencí, má potom Studentovo rozdělení s $\nu = n - 1$ stupni volnosti.

Nechť $d_1 = x_1 - y_1, d_2 = x_2 - y_2, \ldots, d_n = x_n - y_n$ jsou naměřené hodnoty diferencí, $\overline{d}$ je jejich průměr a s_d jejich výběrová směrodatná odchylka. Testujeme hypotézu, že parametr μ_1 je roven hodnotě μ_2:

$$H: \mu_1 = \mu_2,$$

testové kriterium je statistika

$$t = \frac{\overline{d}}{s_d}\sqrt{n},$$

která má při platnosti nulové hypotézy H Studentovo rozdělení s $\nu = n - 1$ stupni volnosti. Podle alternativní hypotézy volíme následující kritické obory:

alternativní hypotéza	kritický obor
$A: \mu_1 > \mu_2$	$W_\alpha = \{t, t \geq t_{1-\alpha}(\nu)\}$
$A: \mu_1 < \mu_2$	$W_\alpha = \{t, t \leq -t_{1-\alpha}(\nu)\}$
$A: \mu_1 \neq \mu_2$	$W_\alpha = \left\{t, \lvert t\rvert \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)\right\}$

kde $t_{1-\alpha}(\nu)$, $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)$ jsou kvantily Studentova rozdělení, $\nu = n - 1$.

4.5 Test shody dvou parametrů alternativního rozdělení

Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ je náhodný výběr z alternativního rozdělení s parametrem π_1 a $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ je náhodný výběr z alternativního rozdělení s parametrem π_2. Dále předpokládejme, že tyto výběry jsou *nezávislé* a rozsahy n_1 a n_2 dostatečně velké. Označme $P_1 = \sum_{i=1}^{n_1} X_i/n_1$,$P_2 = \sum_{i=1}^{n_2} Y_i/n_2$ odhady pravděpodobností (podílů) π_1 a π_2. Statistika

$$U = \frac{P_1 - P_2 - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}}$$

má přibližně normální rozdělení $N(0,1)$.

Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ značí hodnoty náhodného výběru z prvního alternativního rozdělení, podobně $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ značí hodnoty náhodného výběru z druhého alternativního rozdělení, $p_1 = \sum_{i=1}^{n_1} x_i/n_1$, $p_2 = \sum_{i=1}^{n_2} x_i/n_2$ jsou odpovídající odhady. Testujeme hypotézu, že parametr π_1 je roven hodnotě π_2:

$$H : \pi_1 = \pi_2,$$

testové kriterium je statistika

$$u = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}},$$

která má při platnosti nulové hypotézy H přibližně normální rozdělení $N(0,1)$. Podle alternativní hypotézy volíme následující kritické obory:

alternativní hypotéza	**kritický obor**
$A : \pi_1 > \pi_2$	$W_\alpha = \{u, u \geq u_{1-\alpha}\}$
$A : \pi_1 < \pi_2$	$W_\alpha = \{u, u \leq -u_{1-\alpha}\}$
$A : \pi_1 \neq \pi_2$	$W_\alpha = \left\{u, \lvert u \rvert \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$

kde $u_{1-\alpha}$, $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ jsou kvantily rozdělení $N(0,1)$.

Literatura

Základní

MANN, P.S. Introductory Statistics. 6th edition. Hoboken: Wiley, 2007. ISBN 978-0-471-75530-2.

MOUČKA, J., RÁDL, P. Matematika pro studenty ekonomie. 1. vyd. Grada 2010. ISBN 978-80-247-3260-2.

NEUBAUER, J., SEDLAČÍK, M., KŘÍŽ, O. Základy statistiky – Aplikace v technických a ekonomických oborech. Grada 2012.ISBN: 978-80-247-4273-1.

ŘEZANKOVÁ, H. Analýza dat z dotazníkových šetření. 2. vydání, Professional Publishing, 2010. ISBN: 9788074310195.

Doporučená

AGRESTI, A. Categorical Data Analysis. Second Edition. Wiley 2002. ISBN: 0-471-36093-7.

ANDĚL, J. Statistické metody. 3. vydání. Praha: Matfyzpress, 2003. ISBN 80-86732-08-8.

ANDĚL, J. Základy matematické statistiky. 2. vyd. Praha: Matfyzpress, 2007, 358 s. ISBN 978-80-7378-001-2.

VÁGNER, M. Integrální počet funkcí jedné proměnné. 1. vydání. Brno: UO, 2005,126 s. ISBN 80-7231-025-9.

VÁGNER, M., KAŠTÁNKOVÁ, V. Posloupnosti a řady. 1. vydání. Brno: UO, 2006. ISBN 80-7231-131-X.

Úkoly pro samostatnou práci

Testy o tvaru rozdělení

1. Ve skupině 110 studentů byla sledována výše kapesného. Ze zjištěných dat byl vypočtena výběrová šikmost $a_3 = 0{,}446$ a výběrová špičatost $a_4 = 0{,}231$. Užitím testů o nulové šikmosti, o nulové špičatosti a C-testu ověřte na hladině významnosti 0,05, zda výběr pochází z normálního rozdělení. Totéž proveďte pomocí modifikovaných variant daných testů.

2. Střelec střílí na terč, zaznamenává se počet zásahů při 3 výstřelech. Střelec provedl celkem 50 trojic výstřelů s těmito výsledky:

Počet zásahů	0	1	2	3
Počet případů	1	4	22	23

   Odhadněte pravděpodobnost $\hat{\pi}$ zásahu při jednom výstřelu. Je možné toto rozdělení počtu zásahů při 3 výstřelech popsat pomocí binomického rozdělení? Danou hypotézu ověřte pomocí χ^2-testu dobré shody na hladině významnosti 0,05. (Využijte faktu, že výběrový průměr je nestranným odhadem střední hodnoty, která je v případě binomického rozdělení rovna $n\pi$, kde n je počet výstřelů a π je pravděpodobnost zásahu při jednom výstřelu.)

3. Bylo provedeno 10 měření obsahu tuku v mléce (v g/100 g mléka) s těmito výsledky: 1,59; 1,57; 1,47; 1,65; 1,59; 1,39; 1,49; 1,48; 1,69; 1,32. Na hladině významnosti 0,05 ověřte normalitu Kolmogorov-Smirnovovým testem.

4. U 250 zaměstnanců státní správy byla zjištěna výška měsíční mzdy. Ze získaných dat byly určen koeficient šikmosti $a_3 = 0{,}723$ a koeficient špičatosti $a_4 = 1{,}311$. Pomocí C-testu a modifikovaného C-testu ověřte, zda je možné náhodnou veličinu udávající měsíční mzdu zaměstnanců státní správy popsat normálním rozdělením.

Řešení:

1. $u_3 = 1{,}962$, $u_4 = 0{,}653$, zamítáme normalitu; $C = 4{,}277$, nezamítáme normalitu; $z_3 = 1{,}948$, $z_4 = 0{,}794$, nezamítáme normalitu; $C' = 4{,}425$, nezamítáme normalitu;
2. $\overline{x} = 2{,}34$, $\hat{\pi} = 0{,}78$, $\nu = 1$, $\chi^2 = 0{,}437$, binomické rozdělení je vhodný model;
3. $d_{10} = 0{,}155$, $d_{10,0{,}95,} = 0,409$, normální rozdělení je přijatelné;
4. $C = 42,015$, $C' = 28{,}180$, normální rozdělení není vhodným modelem;

Jednovýběrové testy hypotéz

1. Požadovaná průměrná vlhkost pražené kávy je 4,2 % a směrodatná odchylka 0,4 %. Ve 20 vzorcích byly naměřené tyto skutečné hodnoty vlhkosti v %:

   4,5 4,3 4,1 4,9 4,6 3,2 4,4 5,1 4,8 4,0
   3,7 4,4 3,9 4,1 4,2 4,1 4,7 4,3 4,2 4,4

   Předpokládejte, že se jedná o náhodný výběr z normálního rozdělení (ověřte). Na hladině významnosti 0,05 zjistěte, zda základní soubor, z něhož vzorky pocházejí, vykazuje požadovanou
   a) průměrnou vlhkost,
   b) variabilitu vlhkosti.

2. Zástupci ekologického hnutí aktivně vystupují proti výstavbě nové továrny v oblasti, jejíž životní prostředí je již tak dost poznamenané průmyslovou činností. Předpokládají, že jedním z důsledků nezdravého životního prostředí je i nízká porodní hmotnost novorozenců dané oblasti. Má smysl, aby použili nižší porodní hmotnost jako argument proti výstavbě nové továrny, když ví, že porodní hmotnost zdravé populace má normální rozdělení se střední hodnotou 3500 g? Své tvrzení chtějí prokázat na souboru 50 náhodně vybraných novorozenců této oblasti narozených v minulém roce, u nichž naměřili průměrnou hmotnost 3310 g a směrodatnou odchylku 500 g. Test proveďte na hladině významnosti 0,01.

3. V nedávné době omezila provoz v menším městě továrna, která z větší části zaměstnává pracovníky dojíždějící z okolí. Společnost provozující osobní přepravu se obává, že klesne průměrný počet přepravovaných osob jedním autobusem na určitých linkách. Z tohoto důvodu provedla šetření ve 40 náhodně vybraných autobusech a příslušných linkách v době přepravní špičky s těmito výsledky:

Počet cestujících	25	28	29	34	35	38	40	42	45
Počet případů	2	4	7	10	6	5	3	2	1

   Z minulých let je známo, že průměrný počet cestujících v jednom autobusu za srovnatelných podmínek byl 36 osob. V případě, že by se prokázalo, že počet přepravovaných osob klesl, bude přepravní společnost muset omezit provoz. Jak se rozhodne ($\alpha = 0{,}05$)?

4. Dle nejmenované společnosti, která se zabývá průzkumem spotřebitelských zvyklostí, označilo v minulém období 33 % domácností jako místo svých hlavních nákupů hypermarkety. Společnost předpokládá další růst jejich obliby. Za účelem prokázání tohoto předpokladu náhodně vybrala 250 obyvatel a zjistila, že hypermarketům dává přednost 93 ze všech dotázaných. Je výsledek průzkumu v souladu s uvedeným předpokladem ($\alpha = 0{,}05$)?

Řešení:

1. a) $A : \mu \neq 4{,}2$, $t = 0{,}986$, požadovaná průměrná vlhkost je dodržena;
   b) $A : \sigma^2 > 0{,}4^2$, $\chi^2 = 22{,}059$, požadovaná variabilita vlhkosti je dodržena;
2. $A : \mu < 3500$, $u = -2{,}687$, tvrzení aktivistů je oprávněné;
3. $A : \mu < 36$, $u = -2{,}795$, společnost bude muset provoz omezit;
4. $A : \pi > 0{,}33$, $u = 1{,}412$, růst obliby nebyl prokázán.

Dvouvýběrové testy hypotéz

1. U dvou laborantů máme posoudit přesnost měření chemické koncentrace látky. První laborant provedl 15 měření s výběrovou směrodatnou odchylkou 0,32 a druhý laborant provedl 20 měření se směrodatnou odchylkou 0,55. S 95% a 99% spolehlivostí ověřte, zda první laborant provádí měření přesněji než druhý laborant, mají-li chyby měření normální rozdělení.

2. V červnu před 2 roky byla provedena chemická analýza 85 vzorků vody z různých částí městského jezera, bylo zjišťováno množství chlóru. Za poslední 2 roky se značně zredukovalo používání soli na údržbu silnic v zimním období. V červnu letošního roku byla provedena opětovná analýza 110 vzorků vody z daného jezera. Byly získané tyto výsledky:

	Před 2 roky	Letos
Průměr	18,3	17,8
Výb. směrodatná odchylka	1,2	1,8

   Ověřte tvrzení, že nižší používání soli v zimním období snižuje množství chlóru v jezeře ($\alpha = 0{,}05$ resp. 0,01).

3. V rámci předvolebního průzkumu bylo zjišťováno, zda voliči dají v nadcházejících volbách přednost levici nebo pravici. Průzkum byl proveden ve dvou regionech. Je možné na základě získaných údajů tvrdit, že levice má v regionu A významně větší podporu než v regionu B? Test proveďte na hladině významnosti 0,05. Výsledky průzkumu jsou uvedené v tabulce:

	Dotázaných	Levice	Pravice	Neví
Region A	150	50	70	30
Region B	200	50	90	60

4. Byly měřeny výčetní tloušťky (tj. tloušťka kmene stromu ve výšce 1,3 m nad patou kmene) dvou porostů. Testujte na hladině významnosti 0,05, zda jsou oba porosty stejně tloušťkově vyspělé. Předpokládejte, že se jedná o výběry z normálního rozdělení.

Porost A	33,5	28,6	36,2	41,4	41,0	43,7	24,1	33,8	40,5	29,6	31,5	26,5
Porost B	29,5	30,4	21,6	24,4	28,5	26,8	25,5	22,6	26,1	19,2	24,6	

5. Při zkoušce spolehlivosti výškoměru bylo provedeno 15 kontrolních měření při porovnání s druhým standardním výškoměrem. Ověřte párovým testem, že oba výškoměry měří stejně. Předpokládejte, že se jedná o výběry z normálního rozdělení.

Výškoměr A	26,8 22,1 19,5 18,5 29,4 33,2 16,3 18,5 35,4 29,5 19,2 26,2 18,4 28,6 17,5
Výškoměr B	26,2 22,4 19,5 19,0 29,3 33,5 16,2 18,9 36,0 29,8 18,9 26,0 18,5 29,0 18,0

Řešení:

1. $A : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$, $F = 0{,}339$, pro $\alpha = 0{,}05$ 1. laborant přesnější – ano, pro $\alpha = 0{,}01$ přesnější – ne;
2. $A : \mu_1 > \mu_2$, $u = 2{,}321$; pro $\alpha = 0{,}05$ nižší používání soli v zimním období snižuje množství chlóru v jezeře, pro $\alpha = 0{,}01$ vliv nižšího používání soli se neprokázal;
3. $A : \pi_1 > \pi_2$, $u = 1{,}694$, levice má v regionu A větší podporu;
4. homoskedasticita, $A : \mu_1 \neq \mu_2$ $t = 4{,}055$, rozdílná tloušťka se prokázala;
5. $A : \mu_1 \neq \mu_2$, $t = -1{,}567$, oba výškoměry měří stejně.