# PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

## Testování hypotéz-jednovýběrové testy

Katedra kvantitativních metod FVL UO Brno

12. PŘEDNÁŠKA

**Jednovýběrové testy hypotéz**

- Test o střední hodnotě normálního rozdělení
- Test o rozptylu normálního rozdělení
- Test hypotézy o střední hodnotě pro výběry velkého rozsahu
- Test hypotézy o podílu

Nechť $X_1, X_2, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Statistika

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n}$$

má Studentovo rozdělení s $n-1$ stupni volnosti. Využijeme této statistiky pro konstrukci testu o parametru $\mu$.

# Test o parametru $\mu$ normálního rozdělení

Nechť $x_1, x_2, \dots, x_n$ značí hodnoty náhodného výběru (naměřená data), $\overline{x}$ aritmetický průměr a $s$ je výběrová směrodatná odchylka.
Testujeme hypotézu, že parametr $\mu$ je roven hodnotě $\mu_0$:

$$H : \mu = \mu_0,$$

testové kriterium je statistika

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n},$$

která má při platnosti hypotézy $H$ Studentovo $t$-rozdělení s $\nu = n - 1$ stupni volnosti.

Podle alternativní hypotézy volíme následující kritické obory:

| alternativní hypotéza | kritický obor |
|---|---|
| $A : \mu > \mu_0$ | $W_\alpha = \{t, t \geq t_{1-\alpha}(\nu)\}$ |
| $A : \mu < \mu_0$ | $W_\alpha = \{t, t \leq -t_{1-\alpha}(\nu)\}$ |
| $A : \mu \neq \mu_0$ | $W_\alpha = \left\{t, \lvert t \rvert \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)\right\}$ |

kde $t_{1-\alpha}(\nu)$, $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)$ jsou kvantily Studentova rozdělení.

Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Statistika

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

má Pearsonovo rozdělení s $n-1$ stupni volnosti. Využijeme této statistiky pro konstrukci testu o parametru $\sigma^2$.

# Test o parametru $\sigma^2$ normálního rozdělení

Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ značí hodnoty náhodného výběru (naměřená data), $s^2$ je výběrový rozptyl.
Testujeme hypotézu, že parametr $\sigma^2$ je roven hodnotě $\sigma_0^2$:

$$H : \sigma^2 = \sigma_0^2,$$

testové kriterium je statistika

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

která má při platnosti hypotézy $H$ Pearsovovo $\chi^2$-rozdělení s $\nu = n - 1$ stupni volnosti.

# Test o parametru $\sigma^2$ normálního rozdělení

Podle alternativní hypotézy volíme následující kritické obory:

| **alternativní hypotéza** | **kritický obor** |
|---|---|
| $A : \sigma^2 > \sigma_0^2$ | $W_\alpha = \left\{\chi^2, \chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}(\nu)\right\}$ |
| $A : \sigma^2 < \sigma_0^2$ | $W_\alpha = \{\chi^2, \chi^2 \leq \chi^2_{\alpha}(\nu)\}$ |
| $A : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ | $W_\alpha = \left\{\chi^2, \chi^2 \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(\nu) \text{ nebo } \chi^2 \geq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)\right\}$ |

kde $\chi^2_{1-\alpha}(\nu)$, $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)$ jsou kvantily Pearsonova rozdělení.

Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z nějakého libovolného rozdělení se střední hodnotou $\mu$. Statistika

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n}$$

má podle CLV pro velké $n$ přibližně normální rozdělení $N(0, 1)$. Využijeme této statistiky pro konstrukci testu o parametru $\mu$.

Nechť $x_1, x_2, \dots, x_n$ značí hodnoty náhodného výběru (naměřená data), $\overline{x}$ aritmetický průměr a $s$ je výběrová směrodatná odchylka.
Testujeme hypotézu, že parametr $\mu$ je roven hodnotě $\mu_0$:

$$H : \mu = \mu_0,$$

testové kriterium je statistika

$$u = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n},$$

která má při platnosti hypotézy $H$ asymptoticky normální rozdělení $N(0, 1)$.

Podle alternativní hypotézy volíme následující kritické obory:

| **alternativní hypotéza** | **kritický obor** |
|---|---|
| $A : \mu > \mu_0$ | $W_\alpha = \{u, u \geq u_{1-\alpha}\}$ |
| $A : \mu < \mu_0$ | $W_\alpha = \{u, u \leq -u_{1-\alpha}\}$ |
| $A : \mu \neq \mu_0$ | $W_\alpha = \left\{u, \lvert u \rvert \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$ |

kde $u_{1-\alpha}$, $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ jsou kvantily rozdělení $N(0,1)$.

Předpokládejme, že máme náhodný výběr o rozsahu $n$ za základního souboru s podílem $\pi$ nebo ekvivalentně z alternativního rozdělení s parametrem $\pi$. Nestranný odhad podílu $\pi$ je výběrový podíl $\hat{\pi}$. Podle CLV platí, že náhodná veličina

$$U = \frac{\hat{\pi} - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}}$$

má pro $n \to \infty$ přibližně normální rozdělení $N(0,1)$. Tohoto tvrzení použijeme při konstrukci testu o podílu.

# Test hypotézy o podílu

Nechť $\hat{\pi}$ je odhad podílu v základním souboru na základě výběru o rozsahu $n$. Testujeme hypotézu, že parametr $\pi$ je roven hodnotě $\pi_0$:

$$H : \pi = \pi_0,$$

testové kriterium je statistika

$$u = \frac{\hat{\pi} - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1 - \pi_0)/n}}$$

která má při platnosti hypotézy $H$ asymptoticky normální rozdělení $N(0, 1)$.

Podle alternativní hypotézy volíme následující kritické obory:

| **alternativní hypotéza** | **kritický obor** |
|---|---|
| $A: \pi > \pi_0$ | $W_\alpha = \{u, u \geq u_{1-\alpha}\}$ |
| $A: \pi < \pi_0$ | $W_\alpha = \{u, u \leq -u_{1-\alpha}\}$ |
| $A: \pi \neq \pi_0$ | $W_\alpha = \left\{u, \lvert u\rvert \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$ |

kde $u_{1-\alpha}$, $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ jsou kvantily rozdělení $N(0,1)$.