

1. FYZIKÁLNÍ VELIČINY A JEDNOTKY. ZÁKLADY VEKTOROVÉHO POČTU.

1.1. Fyzikální veličiny a jednotky.

Fyzikální veličinou rozumíme význačnou vlastnost daného objektu, která se dá číselně vyjádřit, tzn. že je měřitelná.

Fyzikální zákony pak vyjadřují objektivní závislost mezi fyzikálními veličinami.

Jednotka fyzikální veličiny znamená libovolně zvolenou, přesnou a stálou hodnotu veličiny, se kterou měřenou veličinu srovnáváme.

Bylo by možné pro každou fyzikální veličinu zavést její jednotku libovolně. Vhodnější je zvolit malý počet tzv. základních jednotek a jednotky ostatních fyzikálních veličin odvozovat z těchto základních jednotek užitím definic a fyzikálních zákonů.

V současné době je v ČR (a ve většině států světa) zákonem předepsáno užívání **mezinárodní měrové soustavy jednotek SI (Systeme International d' Unites)**. Zákonné jednotky fyzikálních veličin jsou stanoveny normou **ČSN 01 1300 Zákonné měřící jednotky**. Podle této normy jsou zákonnými jednotkami

- a) základní jednotky
- b) doplňkové jednotky
- c) odvozené jednotky
- d) násobky a díly jednotek
- e) vedlejší jednotky

a) Základní jednotky

V tabulce je uveden přehled základních fyzikálních veličin a jejich jednotek v soustavě SI.

Veličina		jednotka	
název	značka	název	značka
délka	l	metr	m
hmotnost	m	kilogram	kg
čas	t	sekunda	s
elektrický proud	I	ampér	A
teplotní rozdíl	ΔT	kelvin	K
svítivost	I	kandela	cd
látkové množství	n	mol	mol

Tab. č. 1: Základní fyzikální veličiny a jednotky v soustavě SI

Definice základních jednotek:

1. **Metr** je definován fixováním číselné hodnoty rychlosti světla ve vakuu c rovné 299 792 458, je-li vyjádřena v jednotkách $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, kde sekunda je definována ve smyslu $\Delta \nu_{\text{Cs}}$.

2. **Kilogram** je definován fixováním číselné hodnoty Planckovy konstanty h rovné $6,626\,070\,15 \times 10^{-34}$, je-li vyjádřena v jednotkách $\text{J} \cdot \text{s}$, což se rovná $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, kde metr a sekunda jsou definovány ve smyslu c a $\Delta \nu_{\text{Cs}}$.

3. **Sekunda** je definována fixováním číselné hodnoty cesiové frekvence $\Delta \nu_{\text{Cs}}$, přechodové frekvence atomu cesia 133 v klidovém stavu při přechodu mezi dvěma hladinami velmi jemné struktury základního stavu, rovné 9 192 631 770, je-li vyjádřena v jednotce Hz , jež je rovna s^{-1} .

4. **Ampér** je definován fixováním číselné hodnoty elementárního náboje e rovné $1,602\,176\,634 \times 10^{-19}$, je-li vyjádřena v jednotce C, což se rovná A·s, kde sekunda je definována ve smyslu $\Delta\nu_{\text{Cs}}$.

5. **Kelvin** je definován fixováním číselné hodnoty Boltzmannovy konstanty k rovné $1,380\,649 \times 10^{-23}$, je-li vyjádřena v jednotkách $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$, což se rovná $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$, kde kilogram, metr a sekunda jsou definovány ve smyslu h , c a $\Delta\nu_{\text{Cs}}$.

6. Jeden **mol** obsahuje přesně $6,022\,140\,76 \times 10^{23}$ elementárních entit. Toto číslo je fixovaná číselná hodnota Avogadrovy konstanty N_A , je-li vyjádřena v jednotce mol^{-1} a je nazývána Avogadrovo číslo.

Látkové množství, symbol n , systému je mírou počtu specifikovaných elementárních entit. Elementární entitou může být atom, molekula, iont, elektron nebo jakákoliv jiná částice či specifikovaná skupina částic.

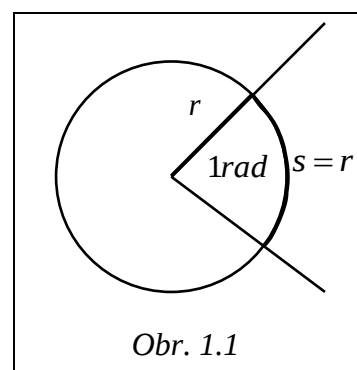
7. **Kandela** je definována fixováním číselné hodnoty světelné účinnosti monochromatického záření o frekvenci 540×10^{12} Hz, K_{cd} , rovné 683, je-li vyjádřena v jednotkách $\text{lm}\cdot\text{W}^{-1}$, což se rovná $\text{cd}\cdot\text{sr}\cdot\text{W}^{-1}$ nebo $\text{cd}\cdot\text{sr}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^3$, kde kilogram, metr a sekunda jsou definovány ve smyslu h , c a $\Delta\nu_{\text{Cs}}$.

b) **Doplňkové jednotky**

Doplňkovými jednotkami jsou jednotka pro rovinný úhel radián (rad) a jednotka pro prostorový úhel steradián (sr).

Radián (rad) je rovinný úhel sevřený dvěma polopřímkami, které na kružnici opsané z jejich počátečního bodu vytínají oblouk o délce rovné jejímu poloměru (obr. 1.1).

(Platí $360^\circ = 2\pi$ rad, 1 rad = $57,2958^\circ$)



Obr. 1.1

Steradián (sr) je prostorový úhel daný kuželem, který na kouli o poloměru r se středem ve vrcholu kužele vytíná plochu o obsahu $S = r^2$ (obr. 1.2).

c) **Odvozené jednotky**

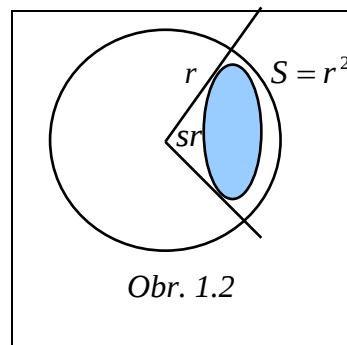
Odvozené jednotky jsou odvozené pomocí definičních jednotkových rovnic ze základních nebo již odvozených jednotek, případně též pomocí doplňkových jednotek. Číselný faktor v uvedených vztazích je roven jedné. Např.:

průměrná (střední) rychlost hmotného bodu

$$v_s = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad [v_s] = \frac{[\Delta s]}{[\Delta t]} = \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

tlak

$$p = \frac{F}{S} \quad [p] = \frac{[F]}{[S]} = \text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$$



Obr. 1.2

V součinech značek jednotek užíváme mezi jednotkami násobící tečku.

d) Násobky a díly jednotek

Protože některé jednotky jsou pro praktické účely příliš velké a jiné příliš malé, tvoříme násobky a díly jednotek násobením nebo dělením vhodnou mocninou deseti. Násobky a díly jednotek se tvoří zejména v řadě s koeficientem 10^3 (viz tabulka č. 2).

<i>předpona</i>	exa	peta	tera	giga	mega	kilo	mili	mikro	nano	piko	femto	atto
<i>značka</i>	E	P	T	G	M	k	m	μ	n	p	f	a
<i>význam</i>	10^{18}	10^{15}	10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}

Tab. č. 2: Násobky a díly jednotek

e) Vedlejší jednotky

Kromě uvedených hlavních jednotek je dočasně povoleno v SI užívat tzv. vedlejších jednotek, které jsou uvedeny v tabulce č. 3.

veličina	jednotka		veličina	jednotka	
	název	značka		název	značka
<i>čas</i>	minuta	min	objem	litr	l
	hodina	h	hmotnost	tuna	t
	den	d	Celsiova teplota	Celsiův stupeň	$^{\circ}\text{C}$
<i>rovinný úhel</i>	úhlový stupeň	1°	energie	elektronvolt	eV
	úhlová minuta	$1'$	hmotnost	atomová hmotnostní konstanta	u
	úhlová vteřina	$1''$			

Tab. č. 3: Vedlejší jednotky základních veličin

1.2. Základy vektorového počtu.

Ve fyzice se setkáváme převážně s veličinami dvojího druhu, skaláry a vektory.

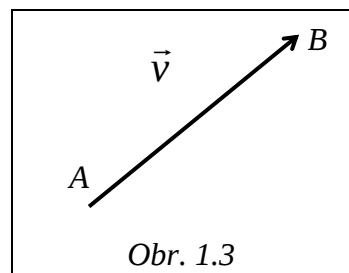
Skalár (skalární veličina) je taková veličina, která je určena (mimo příslušnou jednotku) jedinou číselnou hodnotou - velikostí.

Příklady skalárních veličin: hmotnost, čas, práce, teplota.

Vektor (vektorová veličina) je taková veličina, která je určena (mimo příslušnou jednotku) velikostí, směrem a orientací. *Příklady vektorových veličin:* rychlost, zrychlení, síla, intenzita elektrického pole.

Vektor znázorňujeme orientovanou úsečkou. Počáteční bod a koncový bod (opatřený šipkou) této úsečky určují orientovaný směr vektoru. Vektor, jehož počáteční bod je A a koncový B, budeme značit $\overrightarrow{AB}$. Počáteční bod A nazýváme umístění vektoru. Umístění síly se nazývá působíště. Velikost (absolutní hodnota) vektoru je určena vzdáleností počátečního a koncového bodu, tedy délkou úsečky. **Vektory označujeme vodorovnou šipkou nad příslušným písmenem**, např. $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{F}$.

Velikost vektoru $\vec{a}$ značíme $|\vec{a}|$ nebo a . Jestliže vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ mají stejnou velikost i směr a orientaci, platí $\vec{a} = \vec{b}$.



Jednotkový vektor a skalární násobek vektoru.

Jednotkovým vektorem nazýváme takový vektor, jehož velikost je rovna jedné. Jednotkový vektor vektoru $\vec{a}$ budeme značit $\vec{a}_0$. Platí tedy $|\vec{a}_0| = 1$.

Jednotkové vektory v kladném směru souřadných os x, y, z značíme $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (obr. 1.4).

Skalárním násobkem vektoru $\vec{a}$ libovolným reálným číslem $k \neq 0$, nazýváme vektor $\vec{b} = k\vec{a}$.

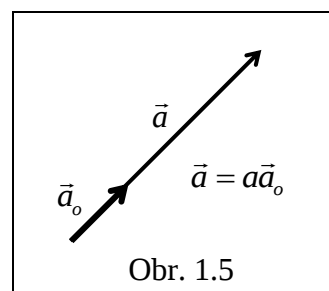
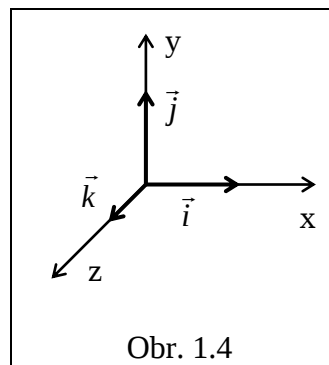
Absolutní hodnota vektoru $\vec{b}$ se rovná součinu absolutních hodnot reálného čísla k a vektoru $\vec{a}$, tedy $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$.

Geometrický význam obou definic: obrazem jednotkového vektoru je orientovaná úsečka jednotkové délky. Obrazem skalárního násobku vektoru $\vec{a}$, tedy vektoru $k\vec{a}$, je orientovaná úsečka, jejíž délka je k krát větší než délka úsečky, která je obrazem vektoru $\vec{a}$. Přitom $k\vec{a} \parallel \vec{a}$.

Je-li $k < 0$, má vektor $k\vec{a}$ opačnou orientaci než vektor $\vec{a}$.

Je-li $k = -1$, je skalárním násobkem vektoru $\vec{a}$ vektor $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$. Vektor $-\vec{a}$ se nazývá opačný vektor k vektoru $\vec{a}$.

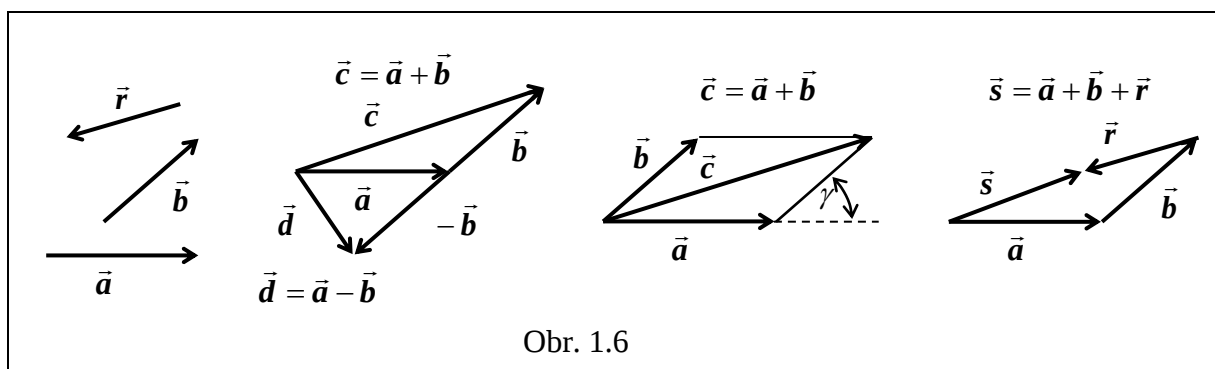
Podle definice skalárního násobku můžeme každý nenulový vektor vyjádřit jako skalární násobek jednotkového vektoru téhož orientovaného směru a jeho absolutní hodnoty, tedy $\vec{a} = a \vec{a}_0$ nebo $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{a}$. (viz. obr. 1.5)



Součet a rozdíl vektorů

Součtem dvou vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ stejného druhu, je vektor $\vec{c}$. Píšeme: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Obraz vektoru $\vec{c}$ dostaneme tak, že ke koncovému bodu vektoru $\vec{a}$ připojíme vektor $\vec{b}$. Potom je počáteční bod vektoru $\vec{a}$ počátkem vektoru $\vec{c}$ a koncový bod vektoru $\vec{b}$ koncovým bodem vektoru $\vec{c}$. Při sčítání více vektorů postupujeme obdobným způsobem (obr. 1.6).



).

Obraz vektoru $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ můžeme získat také tak, že z vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ sestrojíme rovnoběžník. Úhlopříčka tohoto rovnoběžníku určuje vektor $\vec{c}$.

Při sčítání vektorů platí: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ zákon komutativní

Velikost vektoru $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ se vypočítá podle kosinové věty

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma}.$$

Pro **rozdíl** vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ platí: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

Rozdíl vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ tedy znázorníme tak, že ke koncovému bodu vektoru $\vec{a}$ připojíme vektor $-\vec{b}$ (obr. 1.6).

Analytické vyjádření vektorů

Každý vektor můžeme rozložit na dvě nebo více složek. Nejčastěji se provádí rozklad do dvou nebo tří směrů navzájem kolmých.

Vyjádření vektoru pomocí součtu vektorů dvou nebo tří navzájem kolmých směrů (ve směru souřadných os) se nazývá analytické vyjádření vektorů.

Uvažujeme nejprve vektor $\vec{a}$, ležící v rovině x, y. Na obr. 1.7 je znázorněn rozklad vektoru $\vec{a}$ do směru os x, y. Jednotkové vektory v kladném směru těchto os značíme $\vec{i}, \vec{j}$. Pro uvedený rozklad platí:

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \\ \text{nebo} \\ \vec{a} &= \vec{a}_x + \vec{a}_y \end{aligned} \right\} \text{analytické vyjádření vektoru v rovině}$$

Vektory $\vec{a}_x = a_x \vec{i}$, $\vec{a}_y = a_y \vec{j}$ se nazývají **složky vektoru**.

Veličiny a_x , a_y se nazývají **souřadnice vektoru**.

Úhly α , β , které svírá vektor $\vec{a}$ se souřadnými osami, se nazývají **směrové úhly**.

Pro souřadnice platí: $a_x = a \cos \alpha$, $a_y = a \cos \beta$.

Velikost vektoru $\vec{a}$ je: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Kosiny směrových úhlů se nazývají **směrové kosiny**.

Podobně postupujeme při rozkladu vektoru $\vec{a}$ v trojrozměrném prostoru do směrů os x, y, z (obr. 1.8).

V tomto případě je **analytické vyjádření vektoru** $\vec{a}$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad (1.1)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z,$$

kde $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ jsou složky vektoru $\vec{a}$.

Pro souřadnice a_x, a_y, a_z platí:

$$a_x = a \cos \alpha, \quad a_y = a \cos \beta, \quad a_z = a \cos \gamma \quad (1.2)$$

Velikost vektoru $\vec{a}$ je $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ (1.3)

Směrové kosiny vypočítáme:

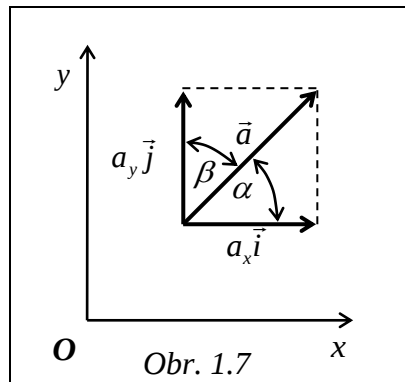
$$\cos \alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \quad (1.4)$$

Známe-li tedy souřadnice vektoru, můžeme pomocí vztahů (1.3) a (1.4) určit velikost vektoru a jeho orientovaný směr.

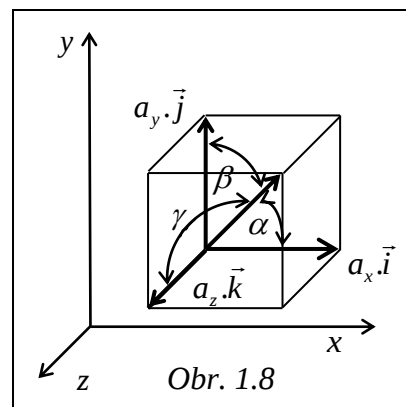
Dosadíme-li (1.2) do (1.1) dostaneme

$$\vec{a} = a (\cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k})$$

Vzhledem k tomu, že platí $\vec{a} = a \vec{a}_0$, vidíme, že směrové kosiny představují souřadnice jednotkového vektoru.



Obr. 1.7



Obr. 1.8

Jsou-li vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ analyticky vyjádřeny

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k},$$

dostaneme pro jejich součet (rozdíl)

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x) \vec{i} + (a_y \pm b_y) \vec{j} + (a_z \pm b_z) \vec{k}$$

Polohový vektor

K určení polohy bodu v prostoru vzhledem k počátku dané souřadné soustavy, používáme ve fyzice tzv. polohový vektor $\vec{r}$.

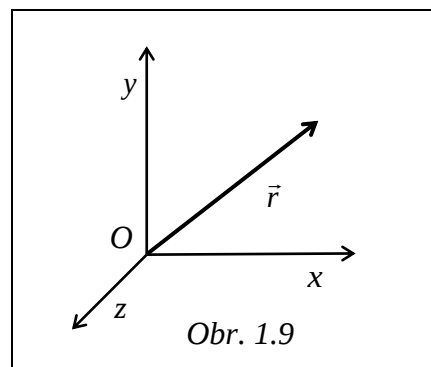
Počátek vektoru $\vec{r}$ je v počátku souřadné soustavy, koncový bod vektoru $\vec{r}$ je v místě, kde se nachází bod, jehož polohu určujeme (obr. 1.9).

Souřadnice polohového vektoru jsou shodné se souřadnicemi bodu, jehož polohu určujeme. Analytické vyjádření vektoru $\vec{r}$ je

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

velikost polohového vektoru udává vzdálenost sledovaného bodu od počátku souřadné soustavy. Podle (1.3) platí

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$



Násobení vektorů

Daný vektor můžeme násobit buď skalárem, nebo jiným vektorem. Se skalárním násobkem vektoru jsme se již seznámili. Je-li vektor dán analyticky $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, platí pro skalární násobek

$$\vec{b} = k\vec{a} = ka_x \vec{i} + ka_y \vec{j} + ka_z \vec{k}$$

Při násobení dvou vektorů rozlišujeme dvojí druh násobení, **skalární a vektorový součin**.

Skalární součin dvou vektorů

je definován jako skalár, který se rovná součinu velikostí obou vektorů a kosinu úhlu, který tyto vektory svírají.

Platí tedy

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$$

(1.8)

Vlastnosti skalárního součinu:

- a) pro skalární součin platí zákon komutativní
a distributivní

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

- b) skalární součin dvou stejných vektorů

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = aa \cos 0^\circ = a^2$$

skalární součin dvou vzájemně rovnoběžných vektorů

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos 0^\circ = ab$$

skalární součin dvou vzájemně kolmých vektorů

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos 90^\circ = 0$$

Pro jednotkové vektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ve směru souřadných os pravoúhlé souřadné soustavy platí:

$$\vec{i}\vec{i} = \vec{j}\vec{j} = \vec{k}\vec{k} = 1$$

$$\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{i} = 0$$

Jsou-li vektory $\vec{a}, \vec{b}$ vyjádřeny analyticky, můžeme jejich skalární součin psát

$$\vec{a}\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

Tento vztah používáme nejen k výpočtu skalárního součinu, ale také k určení úhlu, který svírají vektory $\vec{a}, \vec{b}$. Podle (1.8)

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a}\vec{b}}{ab} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Skalární součin vektoru $\vec{a}$ s jednotkovým vektorem $\vec{b}_0$ je pravoúhlý průmět vektoru $\vec{a}$ do směru vektoru $\vec{b}_0$

$$\vec{a}\vec{b}_0 = a \cos \alpha$$

Ve fyzice má skalární součin použití např. při zavedení fyzikální veličiny práce. Způsobí-li konstantní síla F , působící na těleso, jeho posunutí po přímce o dráhu s , říkáme, že síla vykonala práci, která je určena $W = Fs \cos \alpha = \vec{F}\vec{s}$

Vektorový součin dvou vektorů

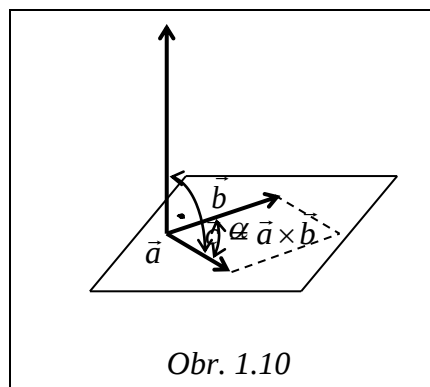
definujeme jako vektor $\vec{c}$ (píšeme $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$), jehož orientovaný směr a velikost se určí takto:

velikost vektoru $\vec{c}$ je

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \alpha,$$

kde a, b jsou velikosti vektorů $\vec{a}, \vec{b}$ a α je úhel, který svírají vektory $\vec{a}, \vec{b}$. Velikost vektorového součinu se číselně rovná plošnému obsahu rovnoběžníka, sestrojeného z obou vektorů.

Orientovaný směr vektoru $\vec{c}$ je kolmý na rovinu, určenou vektory $\vec{a}, \vec{b}$ a míří do toho poloprostoru, z něhož otočení od $\vec{a}$ k $\vec{b}$ (o úhel menší než 90°) se děje v kladném smyslu, tj. proti pohybu hodinových ručiček (obr. 1.10)



Vlastnosti vektorového součinu:

a) z definice vektorového součinu plyne, že pro vektorový součin neplatí zákon komutativní

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

b) pro vektorový součin platí zákon distributivní:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c},$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

b) vektorový součin dvou vzájemně rovnoběžných vektorů je roven nule. Pro vektorový součin dvou vzájemně kolmých vektorů platí:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab$$

d) pro jednotkové vektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ platí:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0, \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \quad (1.9)$$

e) jsou-li vektory $\vec{a}, \vec{b}$ analyticky vyjádřeny, je

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

S použitím distributivního zákona a vztahů (1.9) dostaneme

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k},$$

což lze psát ve tvaru determinantu.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

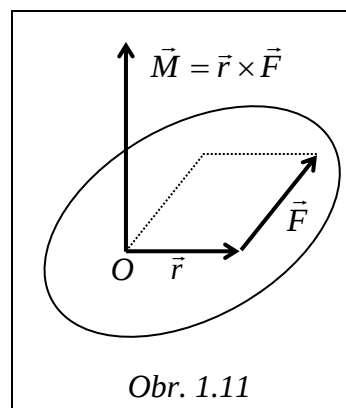
Jako příklad fyzikální veličiny, která je definována pomocí vektorového součinu, uvedeme moment síly vzhledem k bodu

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F},$$

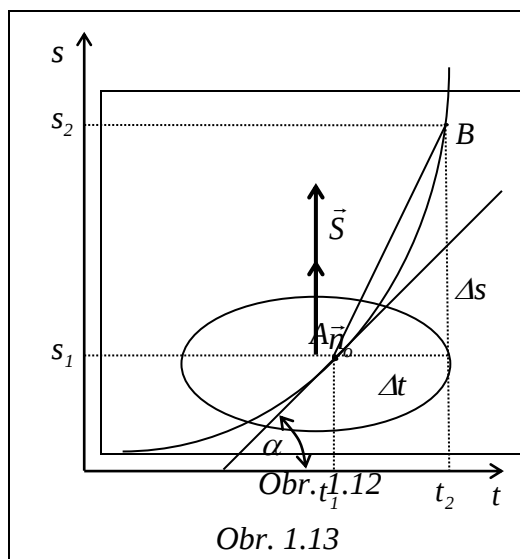
kde $\vec{r}$ je polohový vektor bodu, v němž síla působí, vzhledem k bodu O . Touto definicí je určena jak velikost, tak orientovaný směr vektoru $\vec{M}$. Kdybychom definovali moment síly bez použití vektorového součinu, museli bychom zavést dvě pravidla pro určení velikosti a orientovaného směru vektoru $\vec{M}$.

Podle definice je vektorový součin vektor, jehož velikost se číselně rovná plošnému obsahu rovnoběžníka, sestrojeného z obou vektorů a jehož směr je kolmý na tento rovnoběžník.

Na základě analogie s geometrickým významem vektorového součinu můžeme libovolnou rovinnou plošku považovat za vektor, jehož velikost se číselně rovná plošnému obsahu dané plochy. Směr je kolmý k plošce (orientace je určena další úmluvou). Je-li $\vec{n}_0$ jednotkový vektor ve směru normály plochy S , můžeme vektor plochy psát $\vec{S} = S \vec{n}_0$ (obr. 1.12). Toto vyjádření je výhodné při matematické formulaci řady fyzikálních zákonů.



Obr. 1.11



Obr. 1.13

1.3. Derivace a integrace funkcí.

K pojmu derivace vede např. úloha stanovit okamžitou rychlost pohybujícího se tělesa. Zákon pohybu tělesa je vyjádřen rovnicí $s = f(t)$, kde s značí dráhu uraženou tělesem za dobu t . Jestliže po uplynutí času t_1 byla dráha uražená tělesem $s_1 = f(t_1)$, v okamžiku t_2 pak $s_2 = f(t_2)$, nazýváme podíl

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{\Delta t}$$

průměrnou (střední) rychlostí tělesa v časovém intervalu Δt . Čím bude tento přírůstek Δt menší, tím bude střední rychlost přesněji vyjadřovat rychlost pohybujícího se tělesa v intervalu $t_2 - t_1$. Blíží-li se časový interval Δt k nule, blíží se střední rychlost okamžité rychlosti v

čase t_1 . *Matematicky vyjádřeno:* okamžitá rychlost je určena limitou střední rychlosti pro $\Delta t \rightarrow 0$.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{\Delta t}$$

Střední rychlost $v_s = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ je určena směrnici sečny AB , okamžitá rychlost v bodě A je určena směrnici tečny ke křivce v bodě A (viz obr. 1.13).

Podobných příkladů z přírodních a technických věd lze uvést celou řadu. Všechny se dají převést na výpočet limity pro $\Delta x \rightarrow 0$ zlomku $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, který nazýváme podílem přírůstků. Přitom je $\Delta f(x)$ přírůstek funkce a Δx přírůstek argumentu této funkce. Jestliže se poměr přírůstků $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ blíží k určité mezní hodnotě při $\Delta x \rightarrow 0$, nazývá se tato mezní hodnota (limita) derivace funkce $f(x)$ vzhledem k proměnné x . Derivaci funkce $y = f(x)$ podle x značíme $\frac{dy}{dx}$ nebo $\frac{df(x)}{dx}$. Kratší označení je y' nebo $f'(x)$. Pojem derivace funkce tedy zavádíme takto:

Derivace funkce podle nezávislé proměnné je mezní hodnota poměru přírůstků funkce a jejího argumentu, jestliže se přírůstek argumentu blíží bez omezení k nule.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Derivace funkce podle nezávislé proměnné udává rychlost změny funkce vzhledem k nezávislé proměnné. Určuje tedy nejenom okamžitou rychlost pohybu, ale rychlost přírodních jevů vůbec, např. rychlost ochlazování, změny elektrického proudu, chemických reakcí, rychlost změny objemu při stlačení a pod.

Uvedeme tabulku derivací vybraných funkcí.

funkce	derivace	funkce	derivace
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = kf(x), k = konst.$	$y' = kf'(x)$	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = konst.$	$y' = 0$	$y = u(x) + v(x) + g(x)$	$y' = u'(x) + v'(x) + g'(x)$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = u(x)v(x)$	$y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \frac{u(x)}{v(x)}$	$y' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

Tab. č. 4: Derivace vybraných funkcí

Integrálem funkce $f(x)$ se souhrnně nazývá více matematických objektů. Z hlediska potřeb v rámci tohoto kurzu fyziky jsou nejdůležitější tyto integrály:

- 1) Primitivní funkce k dané funkci $f(x)$ (tzv. neurčitý integrál funkce $f(x)$).
- 2) Riemannův integrál funkce $f(x)$ (tzv. určitý integrál funkce $f(x)$).

1. Primitivní funkce

Podle definice je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ taková funkce $F(x)$, pro kterou platí $F'(x) = f(x)$. Je to tedy funkce, jejíž derivací je funkce $f(x)$. Platí, že je-li $F(x)$ primitivní funkcí, je primitivní funkcí také $F(x) + C$, ($C = konst.$), protože $\frac{d}{dx}[F(x) + C] = \frac{dF(x)}{dx}$.

Primitivní funkci k funkci $f(x)$ značíme symbolem $\int f(x)dx$. Primitivní funkce (neurčitý integrál) dané funkce je tedy funkce, jejíž derivací je funkce daná, např. $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$, protože $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2} + C\right) = x$.

Uvedeme tabulku neurčitých integrálů vybraných funkcí

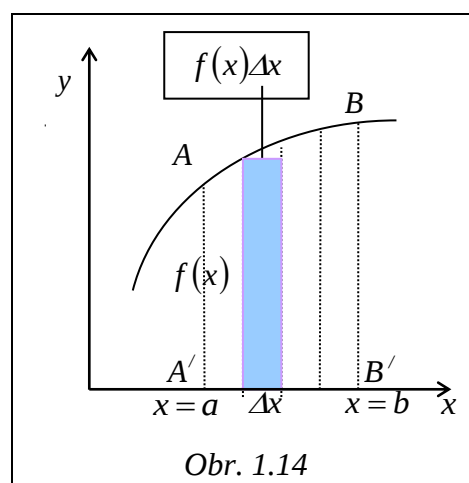
funkce $f(x)$	neurčitý integrál $\int f(x)dx$	funkce $f(x)$	neurčitý integrál $\int f(x)dx$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\sin x$	$-\cos x$
$kf(x), k = konst.$	$k \int f(x)dx$	$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	e^x	e^x

Tab. č. 5: Neurčité integrály vybraných funkcí

2. Riemannův (určitý) integrál

K pojmu určitého integrálu dojdeme např. při stanovení plošného obsahu rovinné plochy, omezené křivkou, vyjádřenou funkcí $f(x)$, osou x a rovnoběžkami s osou y o rovnicích $x = a$, $x = b$.

Úsečku $\overline{A'B'}$ rozdělme na n stejných dílů, dělicími body vedeme rovnoběžky s osou y a jejich průsečíky s křivkou pak rovnoběžky s osou x . Je-li šířka obdélníku Δx , pak plošný obsah obdélníku je $f(x)\Delta x$. Je zřejmé, že čím bude dělení jemnější, tím více se bude součet obsahů jednotlivých obdélníků $\sum f(x)\Delta x$ blížit plošnému obsahu plochy pod křivkou $y = f(x)$. Zjemňujeme-li dělení tak, že $\Delta x \rightarrow 0$ a tvoříme-li součty typu $\sum f(x)\Delta x$, nazývá se limita posloupnosti těchto součtů Riemannův (určitý) in-



Obr. 1.14

integrál funkce $f(x)$ v intervalu (a, b) . Určitý integrál značíme symbolem $\int_a^b f(x)dx$. Určitý in-

tegrál funkce v daném intervalu je tedy mezní hodnota (limita) součtu bez omezení rostoucího počtu členů, z nichž každý je součinem z částečného intervalu nezávislé proměnné a hodnoty funkce v tomto intervalu. **Číselně je určitý integrál roven plošnému obsahu obrazce $AA'BB'$, ležícího pod křivkou znázorňující funkci $f(x)$ v intervalu (a, b) .** Krajní body integračního intervalu se nazývají dolní mez ($x = a$) a horní mez ($x = b$) integrálu. Veličina x se nazývá integrační proměnná.

Pro ty funkce $f(x)$, pro které lze najít jejich primitivní funkci $F(x)$ se užívá k výpočtu určitého integrálu tohoto výsledku

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Platí tedy:

Integrál z funkce $f(x)$ v intervalu (a, b) je roven rozdílu hodnot její primitivní funkce $F(x)$ v horní mezi b a v dolní mezi a .

K výpočtu určitého integrálu $\int_a^b f(x)dx$ tedy v podstatě stačí najít primitivní funkci k funkci $f(x)$, např. $\int_2^3 2x dx = [x^2]_2^3 = 9 - 4 = 5$

Vektor jako funkce skalárního argumentu

Je-li vektor $\vec{a}$ funkcí spojitě proměnné skalární veličiny, např. času t , znamená to, že tento vektor mění s časem svou velikost a směr. Tuto závislost zapisujeme $\vec{a} = \vec{a}(t)$. Analytické vyjádření takového vektoru je

$$\vec{a} = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}.$$

Derivaci vektoru $\vec{a}(t)$ podle proměnného skaláru definujeme

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \frac{da_x(t)}{dt}\vec{i} + \frac{da_y(t)}{dt}\vec{j} + \frac{da_z(t)}{dt}\vec{k}.$$

Souřadnice vektoru $\frac{d\vec{a}(t)}{dt}$ jsou tedy derivace souřadnic vektoru $\vec{a}(t)$.

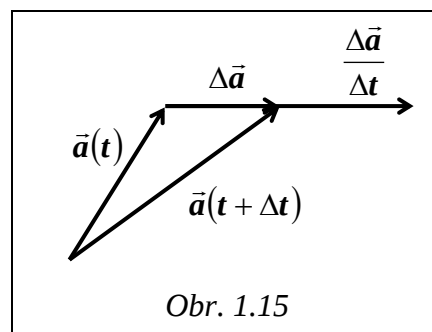
Geometrický význam derivace vychází z definice derivace pomocí limity

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}.$$

Derivace vektoru $\vec{a}(t)$ je tedy vektor, který má směr přírůstku vektoru $\vec{a}$.

Pro derivaci skalárního a vektorového součinu dvou vektorů, jež jsou funkcí téhož skaláru $\vec{a} = \vec{a}(t), \vec{b} = \vec{b}(t)$, platí

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{a}\vec{b}) &= \frac{d\vec{a}}{dt}\vec{b} + \vec{a}\frac{d\vec{b}}{dt}, \\ \frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) &= \left(\frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b}\right) + \left(\vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}\right). \quad (1.9) \end{aligned}$$



Jako příklad vektoru, který je funkcí času uvedeme polohový vektor $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Při pohybu tělesa se souřadnice x, y, z mění s časem, takže $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. Derivace polohového vektoru je pak

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

Fyzikální význam této derivace bude objasněn v kapitole 2.1.

Kontrolní otázky ke kapitole 1.

1. Vysvětlíte, co je fyzikální veličina a jednotka fyzikální veličiny.
2. Vyjmenujte základní fyzikální veličiny a jednotky soustavy SI.
3. Které další jednotky jsou stanoveny normou Zákonné měřicí jednotky?
4. Uveďte příklady bezrozměrných fyzikálních veličin.
5. Kdy jsou si rovny dvě fyzikální vektorové veličiny?
6. Jak je definováno násobení vektoru skalárem? Co je obrazem skalárního násobku vektoru $\vec{a}$?
7. Jsou-li dány vektory $\vec{a}, \vec{b}$, znázorněte obraz vektorů $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, 2\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{a} - 3\vec{b}$.
8. Jak se vypočítá velikost vektoru $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$?
9. Napište analytické vyjádření vektoru v rovině a v prostoru.
10. Uveďte, jak se vypočítá velikost vektoru a jeho směrové kosiny, je-li známo analytické vyjádření.
11. Vysvětlíte, co je polohový vektor. Jak se vypočítá vzdálenost bodu od počátku souřadné soustavy?
12. Definujte skalární součin vektorů a uveďte jeho vlastnosti.
13. Uveďte, jak lze určit úhel mezi dvěma vektory pomocí jejich skalárního součinu.
14. Definujte vektorový součin vektorů a uveďte jeho vlastnosti. Jaký je geometrický význam vektorového součinu?
15. Jakou informaci poskytuje derivace funkce?
16. Jak je definována primitivní funkce k funkci $f(x)$?
17. Čemu je číselně roven určitý integrál $\int_a^b f(x)dx$?
18. Uveďte, jak je definována derivace vektorové funkce $\vec{a}(t)$ podle skalárního argumentu.
19. Derivujte polohový vektor $\vec{r}(t)$ podle času.