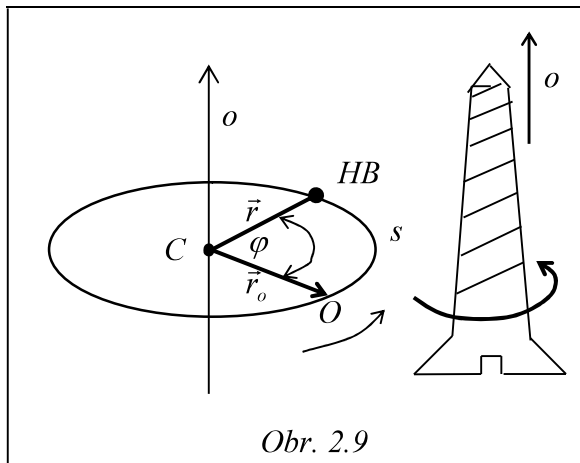


2.3 Kruhový pohyb hmotného bodu

je zvláštním případem rovinného křivočarého pohybu. Trajektorií je kružnice, která má konstantní poloměr křivosti $\rho = konst. = r$, kde r je poloměr kružnice se středem v bodě C .

Polohu hmotného bodu můžeme určit pomocí pravoúhlých souřadnic $[x, y]$ v rovině kružnice. Časový průběh pohybu hmotného bodu ale většinou popisujeme pomocí ураžené dráhy s nebo (a to častěji) pomocí středového úhlu $\varphi = \varphi(t)$, který se nazývá úhlová dráha. Trajektorii orientujeme obvykle ve směru opačném než je směr pohybu hodinových ručiček, zvolíme na ni pevný bod O a zavedeme dráhovou souřadnici l a polohový vektor $\vec{r}$. Středem kružnice, kolmo k její rovině, prochází osa otáčení o . Osu otáčení orientujeme na základě pravidla pravotočivého šroubu (obr. 2.9). Nejdůležitější veličinou při popisu kruhového pohybu je úhlová dráha φ . Je to úhel, který svírá polohový vektor $\vec{r}$ hmotného bodu s vektorem $\vec{r}_o$ pevného bodu O . Úhel v obloukové míře je definován



Obr. 2.9

$$\varphi = \frac{s}{r}, \quad \text{takže } s = r\varphi.$$

Protože pro $\varphi = 360^\circ$ je $s = 2\pi r$, platí

$$180^\circ = \pi \text{ rad}, \quad 1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 45''$$

Jestliže hmotný bod urazí během časového intervalu dt dráhu ds , pro kterou platí $ds = r d\varphi$, dostaneme pro velikost rychlosti

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt}.$$

Výraz

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

(2.15)

představuje časovou změnu středového úhlu φ a nazývá se **úhlová rychlost**. Úhlová rychlost vyjadřuje, jak rychle se otáčí průvodič $\vec{r}$, na jehož konci je hmotný bod, konající kruhový pohyb. **Její velikost je číselně rovna úhlu v obloukové míře, o který by se otočil průvodič za jednotku času, kdyby otáčení bylo rovnoměrné.**

Rychlost bodu, kterou nazýváme obvodovou rychlostí, je tedy

$$v = r\omega$$

(2.16)

Při stálé úhlové rychlosti obíhá hmotný bod tím rychleji, čím je více vzdálen od osy otáčení.

Jestliže se úhlová rychlost s časem mění, zavádíme veličinu

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

(2.17)

která představuje časovou změnu úhlové rychlosti a nazývá se **úhlové zrychlení**. Číselně úhlové zrychlení udává přírůstek úhlové rychlosti za jednotku času, jestliže úhlová rychlost v tomto časovém intervalu roste rovnoměrně.

Určíme tečné a normálové zrychlení při kruhovém pohybu

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\omega) = r \frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \qquad (2.18)$$

Nyní si všimneme jednotek fyzikálních veličin, které se vyskytují v popisu kruhového pohybu, tj. středový úhel (úhlová dráha) φ , úhlová rychlost ω a úhlové zrychlení ε .

Úhel má jednotkovou velikost, jestliže $s = r$; potom $\frac{s}{r} = 1$. Tento poměr je vždy pouhé číslo, přesto se však jednotkovému rovinnému úhlu dává jméno a to radián (rad) a úhly se vyjadřují v násobcích rad.

$$\frac{s}{r} = \frac{n\pi r}{r} = n\pi \text{ rad,}$$

kde n je pouhé číslo. Velikost rovinného úhlu v radiánech je vyjádřena násobkem čísla π .

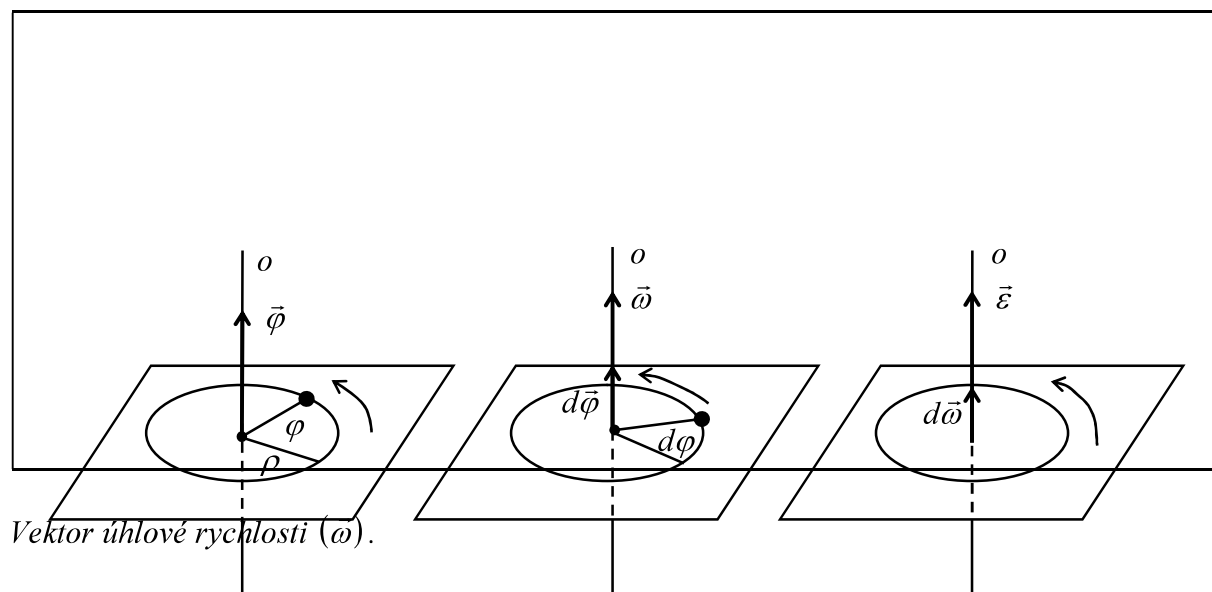
Radián tedy není fyzikální jednotkou v pravém smyslu slova, která musí nutně vystupovat ve fyzikálních rovnicích, aby byly rozměrově homogenní. Můžeme jej použít tam, kde je to účelné a v jiných případech vypustit. Jednotky úhlové rychlosti a úhlového zrychlení můžeme vyjádřit

$$\begin{aligned} [\omega] &= \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} & \text{nebo} & & [\omega] &= \text{s}^{-1}, \\ [\varepsilon] &= \text{rad} \cdot \text{s}^{-2} & \text{nebo} & & [\varepsilon] &= \text{s}^{-2}. \end{aligned}$$

Veličiny, kterými jsme popsali kruhový pohyb, můžeme znázornit též vektorově. Vektorové vyjádření je úplnější, protože z něho plynou nejen velikosti příslušných veličin, ale také orientace kruhové dráhy v prostoru i vzájemné orientace jednotlivých veličin.

Vektor úhlové dráhy ($\vec{\varphi}$).

Jeho velikost je určena velikostí úhlové dráhy (středového úhlu) φ . Vektor $\vec{\varphi}$ leží v ose rotace, je tedy kolmý k rovině úhlu, procházející jeho vrcholem. Míří na tu stranu roviny kruhového pohybu, ze které vidíme narůstání úhlu φ (otáčení hmotného bodu) v kladném smyslu (tj. proti směru pohybu hodinových ručiček).



Obr. 2.10

Jestliže během časového intervalu dt vzroste úhlová dráha o $d\varphi$, potom elementární přírůstek $d\vec{\varphi}$ vektoru $\vec{\varphi}$ leží rovněž v ose otáčení. Výraz $\frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ představuje tedy vektor v ose rotace, stejné orientace jako vektor $\vec{\varphi}$. Nazýváme jej **vektorem úhlové rychlosti**

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}} \quad (2.19)$$

Jeho velikost je určena vztahem (2.15).

Vektor úhlového zrychlení ($\vec{\varepsilon}$).

Jestliže kruhový pohyb není rovnoměrný, mění se velikost vektoru $\vec{\omega}$, ale jeho směr zůstává stálý. Výraz

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}} \quad (2.20)$$

určuje **vektor úhlového zrychlení**. Leží opět v ose rotace, ale je orientován jako vektor $\vec{\varphi}$ jen v tom případě, jestliže se úhlová rychlost otáčení zvětšuje. Při zpomaleném otáčení je změna $d\vec{\omega}$ orientována opačně než je vektor okamžité úhlové rychlosti $\vec{\omega}$.

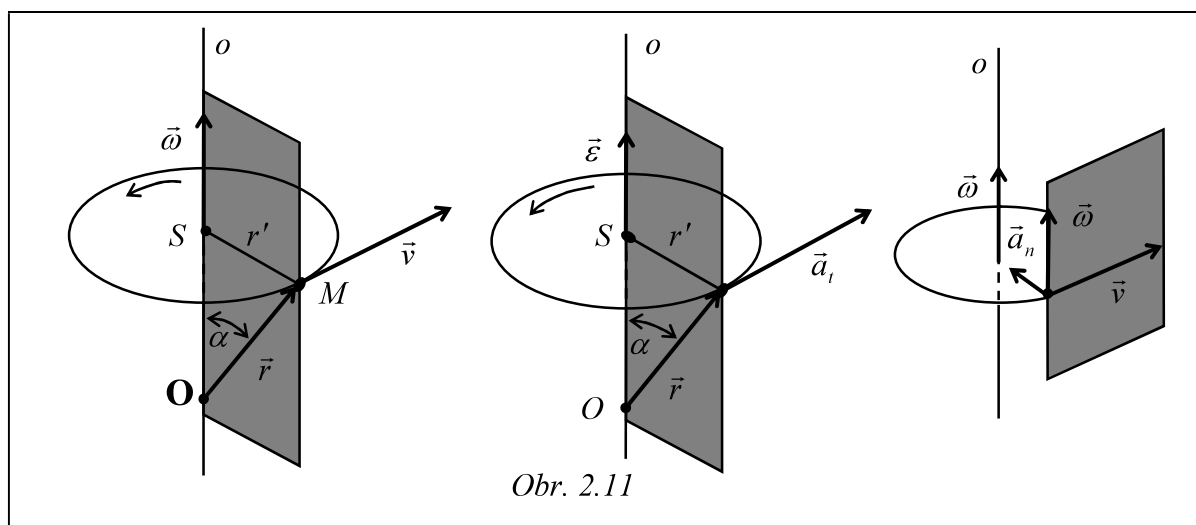
Obvodová rychlost $\vec{v}$

je vektor, který má směr tečny ke kruhové dráze a leží tedy v její rovině. Je kolmý na rovinu, proloženou osou rotace a polohovým vektorem $\vec{r}$, který určuje polohu hmotného bodu vzhledem k libovolnému bodu na ose rotace. Protože vektor $\vec{\omega}$ leží v ose rotace, můžeme vektor obvodové rychlosti $\vec{v}$ vyjádřit jako vektorový součin

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \quad (2.21)$$

velikost

$$v = \omega r \sin \alpha = \omega r' \quad (\text{obr. 2.11}).$$



Celkové zrychlení $\vec{a}$ hmotného bodu dostaneme derivací vektoru $\vec{v}$ podle času. S použitím pravidla pro derivaci vektorového součinu

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Celkové zrychlení $\vec{a}$ je tedy vyjádřeno jako součet dvou vektorů. Vektor $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ má velikost $\varepsilon r \sin \alpha = \varepsilon r'$ a představuje tedy tečné zrychlení. Vektor $\vec{\omega} \times \vec{v}$ má velikost $\omega v = r \omega^2$ a představuje normálové zrychlení.

Zvláštním případem kruhového pohybu je **rovnoměrný kruhový pohyb**, kdy platí $\omega = konst.$. Ze vztahu (2.15) plyne

$$\varphi = \int \omega dt = \omega t + C = \varphi_0 + \omega t, \quad (2.22)$$

je-li v čase $t = 0$ poloha bodu určena úhlovou drahou φ_0 . Je-li v čase $t = 0$ bod v základní poloze, tj. v bodě O (obr. 2.9) je $\varphi_0 = 0$ a potom

$$\varphi = \omega t.$$

Tento pohyb je periodický, to znamená, že se stále opakuje. Základní charakteristikou periodického pohybu je doba jednoho oběhu – perioda (značíme T). Pro čas $t = T$ je tedy $\varphi = 2\pi$ a platí

$$2\pi = \omega t,$$

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$$

kde převrácená hodnota periody je frekvence $f = \frac{1}{T}$. Frekvence udává kolikrát za jednotku času se celý pohyb opakuje. Jednotkou frekvence je s^{-1} . Tato jednotka se nazývá hertz (Hz).

Je-li $\varepsilon = konst.$, nazýváme **pohyb rovnoměrně proměnný**. Pro **úhlovou rychlost** a **úhlovou dráhu** pak platí

$$\omega = \int \varepsilon dt = \varepsilon t + C = \omega_0 + \varepsilon t, \quad (2.23)$$

$$\varphi = \int \omega dt = \int (\omega_0 + \varepsilon t) dt = \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2 + C = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2. \quad (2.24)$$

Všimněte si, že vztahy pro rovnoměrný a rovnoměrně proměnný pohyb kruhový jsou analogické vztahům pro rovnoměrný a rovnoměrně proměnný pohyb přímočarý. Analogické veličiny jsou

dráha s	$\rightarrow$ úhlová dráha φ
rychlost v	$\rightarrow$ úhlová rychlost ω
zrychlení a	$\rightarrow$ úhlové zrychlení ε

Kontrolní otázky k části 2.3.

1. Uveďte, které veličiny určují kruhový pohyb hmotného bodu.
2. Definujte úhlovou rychlost a úhlové zrychlení.
3. Definujte úhlovou dráhu, úhlovou rychlost a úhlové zrychlení jako vektory.
4. Uveďte, jak se vypočítá obvodová rychlost hmotného bodu při kruhovém pohybu.
5. Odvoďte vztahy pro tečné a normálové zrychlení při kruhovém pohybu.
6. Napište, jak závisí úhlová rychlost a úhlová dráha na čase v případě kruhového pohybu:
 - a) rovnoměrného
 - b) rovnoměrně proměnného