

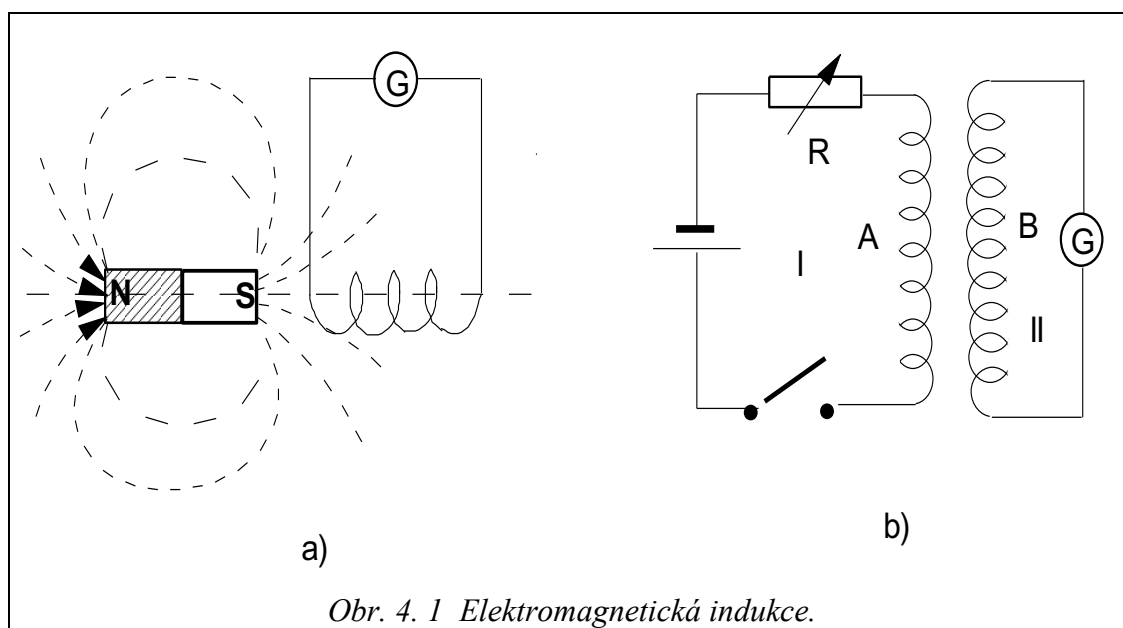
4. ELEKTROMAGNETICKÁ INDUKCE

Roku 1820 zjistil Oersted, že v okolí elektrického proudu vzniká magnetické pole a objevil tak souvislost mezi magnetickým polem a pohybem elektrického náboje. Faraday v roce 1831 experimentálně dokázal, že při změně magnetického indukčního toku vzniká elektromotorické napětí v obvodech, umístěných v magnetickém poli. Tím bylo ukázáno, že existuje souvislost mezi změnami magnetického pole a elektrickým polem ve vodiči. Faradayův objev měl zásadní význam nejen z hlediska fyzikálního poznání elektromagnetických dějů, ale patří i k nejdůležitějším objevům s hlediska aplikačního. Na základě jevu elektromagnetické indukce se získává téměř všechna elektrická energie.

Jev elektromagnetické indukce můžeme pozorovat na těchto pokusech:

1) Přibližujeme-li k uzavřenému vodivému obvodu, v němž je zařazen galvanometr, permanentní tyčový magnet (*obr. 4. 1a*), zjistíme z výchylky galvanometru, že během pohybu magnetu protéká obvodem elektrický proud. Při vzdalování magnetu protéká proud v opačném směru. Stejný jev vzniká, pohybuje-li se obvod vzhledem k magnetu.

2) Místo magnetu můžeme použít cívku s jádrem, kterou protéká proud. Na *obr. 4. 1b* je ke zdroji napětí připojena přes reostat a spínač cívka s jádrem. Obvod *I* se nazývá primární a také cívka se nazývá primární.



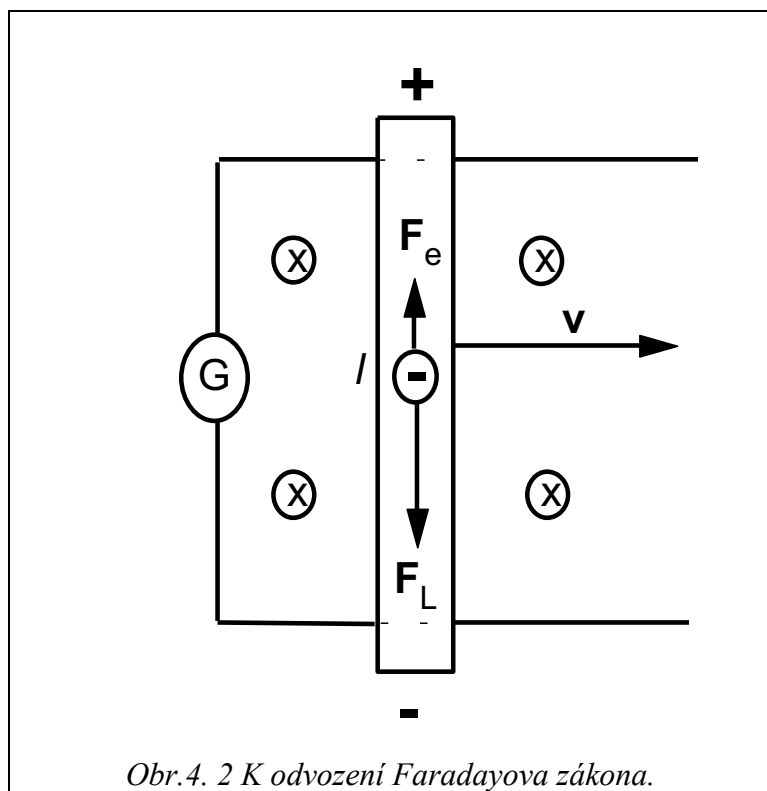
Cívka *B* v obvodu *II*, připojená ke galvanometru, tvoří sekundární obvod, v němž vzniká elektrický proud. Tato cívka se nazývá sekundární. Přibližuje-li se cívka sekundární k cívkce primární, galvanometr ukáže výchylku. Při vzdalování je výchylka opačná. Výchylka galvanometru je tím větší, čím rychlejší je změna vzájemné polohy. Galvanometr ukáže rovněž výchylku, měníme-li proud v primárním obvodu pomocí reostatu, nebo zapneme-li nebo přerušíme proud v primárním obvodu.

Uvedené pokusy ukazují jev, který objevil Faraday a který se nazývá elektromagnetická indukce. Napětí, vzniklé při elektromagnetické indukci, se nazývá indukované napětí. Proud, procházející obvodem v důsledku elektromagnetické indukce, se

nazývá indukovaný proud. Všimněme si výsledků těchto pokusů. V prvním případě (obr. 4. 1a) je charakteristická ta okolnost, že cívkou B prochází proud jen tehdy, dokud se magnet přibližuje nebo vzdaluje od cívky, tzn., dokud se mění magnetické pole blízko cívky nebo dokud se cívka pohybuje v nehomogenním magnetickém poli magnetu. Jakmile se magnet přestane pohybovat vzhledem k cívce (nebo cívka vzhledem k magnetu), magnetické pole v blízkosti cívky se nemění a proud cívkou neprotéká. V druhém případě (obr. 4. 1b) se proměnné magnetické pole v blízkosti cívky B vytváří při vzájemném pohybu primárního a sekundárního obvodu nebo změnou proudu v primárním obvodu. V obou případech se mění magnetické pole v blízkosti cívky B a tedy magnetický indukční tok plochou, ohraničenou obvodem s cívkou B . Že záleží právě na změně indukčního toku, plyne z dalšího pozorovaného jevu: indukovaný proud vzniká i v tom případě, jestliže se uzavřený obvod otáčí v homogenním magnetickém poli. V tomto případě se velikost magnetické indukce nemění, mění se pouze indukční tok plochou obvodu. Jestliže se ale uzavřený obvod pohybuje v homogenním magnetickém poli postupným pohybem, pak indukovaný proud nevzniká, protože indukční tok plochou obvodu se nemění. Pro směr indukovaného proudu platí Lencovo pravidlo : Indukovaný proud má takový směr, že brání změně, která je jeho příčinou. Je-li tedy např. indukovaný proud vyvolán pohybem vodiče v magnetickém poli, má proud takový směr, že jeho magnetické pole tento pohyb brzdí.

4. 1 Faradayův zákon elektromagnetické indukce

Uvažujme přímý vodič délky l v homogenním magnetickém poli. Vektor $\mathbf{B}$ míří na



obr. 4. 2 kolmo za nákresnu. Pohybujeme-li vodičem například vpravo, působí na volné elektrony v kovovém vodiči, které se pohybují společně s celým vodičem rychlostí $\mathbf{v}$ v magnetickém poli, Lorentzova síla $\mathbf{F}_L$. Působením této síly vzniká na jednom konci vodiče nadbytek a na druhém úbytek elektronů. Ve vodiči vznikne elektrické pole. Toto elektrické pole působí na elektrony silou $\mathbf{F}_e$, jejíž směr je opačný než směr síly $\mathbf{F}_L$. Elektrony se přestanou pohybovat, jakmile se $F_L = F_e$. V důsledku pohybu vodiče v magnetickém poli vzniká ve vodiči elektrické pole o intenzitě E_e , kterou můžeme z rovnosti sil F_L a F_e vypočítat. Na každý volný elektron e v pohybujícím se

vodiči působí síla $F_L = e v B$. Vzniklé elektrické pole působí silou $F_e = e E$. Z podmínky $F_L = F_e$ dostaneme $E = v B$.

Mezi intenzitou elektrického pole a napětím U mezi konci vodiče platí vztah

$$E = -\frac{U}{l},$$

(obecně je intenzita elektrického pole záporně vzatý gradient potenciálu $E = -\text{grad } \varphi$), takže platí

$$U = -B v l.$$

Mezi konci vodiče je tedy v důsledku jeho pohybu v magnetickém poli napětí U . Protože rychlost vodiče je $v = ds/dt$, dostaneme pro indukované napětí následující výraz

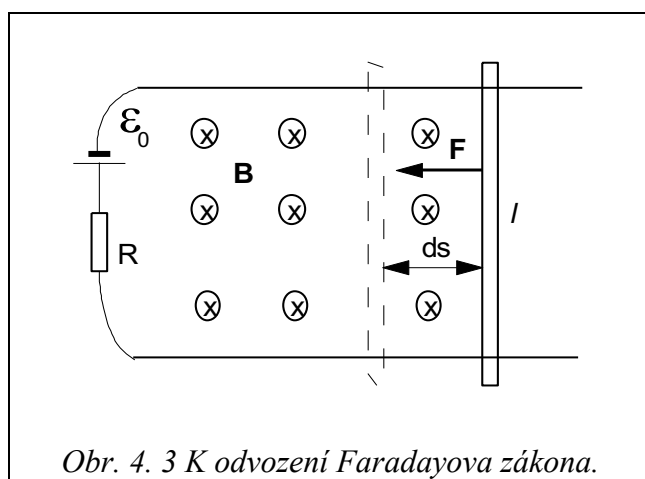
$$U = -B \frac{ds}{dt} l = -B \frac{dS}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Indukované elektromotorické napětí (zkráceně EMN) budeme značit $\mathcal{E}_i$. Odvozený vztah pro indukované napětí představuje Faradayův zákon elektromagnetické indukce. Obecně jej můžeme psát ve tvaru

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (4.1)$$

který platí i pro případy, kdy změny indukčního toku jsou vyvolány jinak než pohybem vodiče. Slovy můžeme Faradayův zákon vyjádřit takto: **indukované elektromotorické napětí se rovná časové změně indukčního toku, procházejícího plochou, omezenou obvodem.** Rozhodující pro vznik indukovaného napětí je tedy časová změna indukčního toku.

Faradayův zákon můžeme získat také použitím zákona zachování energie na obvod se zdrojem EMN ($\mathcal{E}_0$) a odporem R , v němž vodič l uzavírající obvod je volně pohyblivý (viz. obr. 4.3).



Za dobu dt dodá zdroj energii $\mathcal{E}_0 I dt$ a jestliže se obvod nenachází v magnetickém poli, je vodič l v klidu a tato energie je rovna Joulovu teplu, vyvinutém v obvodu za dobu dt ,

$$\mathcal{E}_0 I dt = R I^2 dt$$

a proud v obvodu je

$$I = \mathcal{E}_0 / R.$$

Předpokládejme nyní, že obvod je v homogenním magnetickém poli, jehož vektor $\mathbf{B}$ míří kolmo na rovinu obvodu za nákretnu. Magnetické pole působí na pohyblivou část obvodu l

silou $F = B I l$ a vodič l se za dobu dt posune o ds . Při tomto posunutí bude vykonána práce

$$dA = F ds = B I l ds = B I dS = I d\Phi,$$

kde

$$d\Phi = B dS$$

je změna indukčního toku při pohybu vodiče. Tato práce se koná na účet energie zdroje. Celková energie, dodaná zdrojem přejde nyní nejen na Joulovo teplo, ale také na práci při posunutí vodiče l . Platí tedy

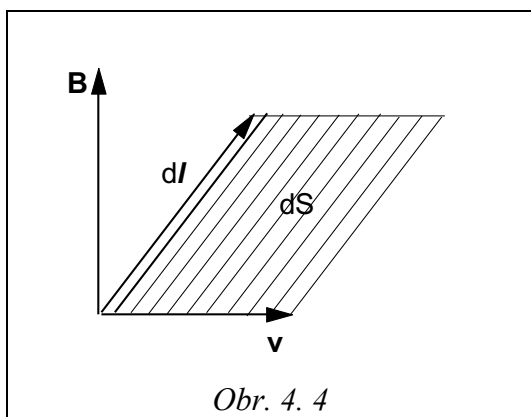
$$\mathcal{E}_0 I dt = R I^2 dt + I d\Phi$$

a proud v obvodu lze vyjádřit vztahem

$$I = \frac{\mathcal{E}_0 - \frac{d\Phi}{dt}}{R}.$$

Výraz v čitateli zlomku, představující celkové EMN v obvodu, se nyní skládá ze dvou členů: EMN zdroje $\mathcal{E}_0$ a veličiny $-d\Phi/dt$, která představuje indukované EMN v obvodu v důsledku pohybu části obvodu v magnetickém poli. Pro indukované EMN v obvodu tedy opět dostáváme

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$



Obr. 4. 4

Pohybuje-li se libovolný vodič v nehomogenním magnetickém poli, vyjádříme nejprve příspěvek $d\mathcal{E}_i$ k elektromotorickému napětí, které se indukuje v elementu vodiče dl a celkové $\mathcal{E}_i$ dostaneme integrací. Jestliže svírá délkový element vodiče dl s vektorem rychlosti v úhel α , pak plocha opsaná elementem při pohybu za čas dt je

$$dS = v dt dl \sin \alpha.$$

Vektor této plochy

$$d\mathbf{S} = (v dt \times dl) = (v \times dl) dt.$$

Pro přírůstek indukovaného EMN platí

$$d\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}{dt} = -\mathbf{B} \cdot (v \times dl).$$

Po úpravě s použitím identity $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}$ a integrací, obdržíme

$$\mathcal{E}_i = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (4.2)$$

Indukované EMN vzniká i v neuzavřeném vodiči (počáteční bod A , koncový B), který se pohybuje v magnetickém poli. Lorentzova síla způsobí přesun elektronů k jednomu konci vodiče a vznik elektrického pole. Indukované EMN mezi body A, B je

$$\mathcal{E}_i = \int_A^B (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (4.3)$$

Faradayův zákon elektromagnetické indukce platí nezávisle, na způsobu, jakým dochází k časové změně indukčního toku. Při úvahách, vedoucích k tomuto zákonu jsme zatím vycházeli ze situace, kdy vodivý obvod nebo jeho část se pohybovaly v magnetickém poli. V těchto případech dochází ke vzniku indukovaného EMN v důsledku působení Lorentzovy síly na elektrony ve vodiči. K časové změně indukčního toku dochází ale také tehdy, jestliže uzavřený obvod, který je v klidu, se nachází v časově proměnném magnetickém poli. I v tomto případě platí pro indukované EMN

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Symbol parciální derivace zde vyjadřuje skutečnost, že uzavřený obvod je nepohyblivý a indukční tok se mění pouze v důsledku závislosti magnetické indukce na čase. Úplná derivace $d\Phi/dt$ vyjadřuje působení všech možných příčin změny indukčního toku. Vznik indukovaného proudu v nepohyblivém obvodu, který se nachází v časově proměnném magnetickém poli nelze ale vysvětlit působením Lorentzovy síly, protože vzhledem k nepohyblivosti vodiče

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0.$$

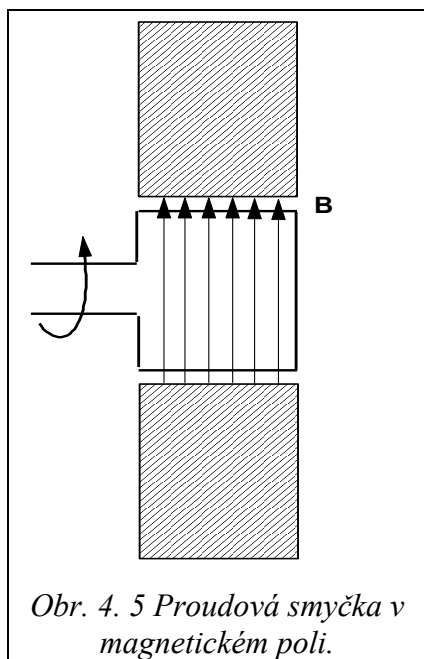
Podle Maxwella časově proměnné magnetické pole vždy způsobí vznik elektrického pole. Toto tzv. indukované elektrické pole existuje nezávisle na tom, jestli se v časově proměnném magnetickém poli nachází vodivý obvod. Tento obvod představuje pouze objekt, ve kterém se existence elektrického pole projeví vznikem indukovaného proudu. Indukované EMN v uzavřeném obvodu můžeme vyjádřit jako dráhový integrál z intenzity elektrického pole podél uzavřené křivky, takže

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (4.4)$$

Indukované elektrické pole se podstatně liší od pole elektrostatického, na kterém

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Takové pole se nazývá potenciálové, protože jeho intenzitu lze vyjádřit jako gradient skalárního potenciálu. V indukovaném elektrickém poli je dráhový integrál z intenzity pole od nuly různý, takové pole se nazývá vírové. Siločáry tohoto pole jsou uzavřené křivky.



Obr. 4. 5 Proudová smyčka v magnetickém poli.

Jako příklad použití Faradayova zákona vypočítáme indukované napětí, které vzniká ve smyčce, otáčející se v homogenním magnetickém poli (viz obr. 4. 5). Osa rotace je kolmá na vektor $\mathbf{B}$ tohoto pole.

V okamžiku, kdy normála roviny smyčky svírá s vektorem $\mathbf{B}$ úhel α , platí pro indukční tok

$$\Phi = B S \cos \alpha ,$$

kde S je plošný obsah smyčky.

Při rovnoměrném otáčení smyčky $\alpha = \omega t$, kde ω je úhlová rychlost otáčení. Pro indukované napětí platí

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(BS \cos \omega t) = BS \omega \sin \omega t.$$

V tomto případě je indukované napětí harmonickou funkcí času.

Otáčení závitů v magnetickém poli je základem zařízení pro získání střídavého elektrického napětí a proudu.

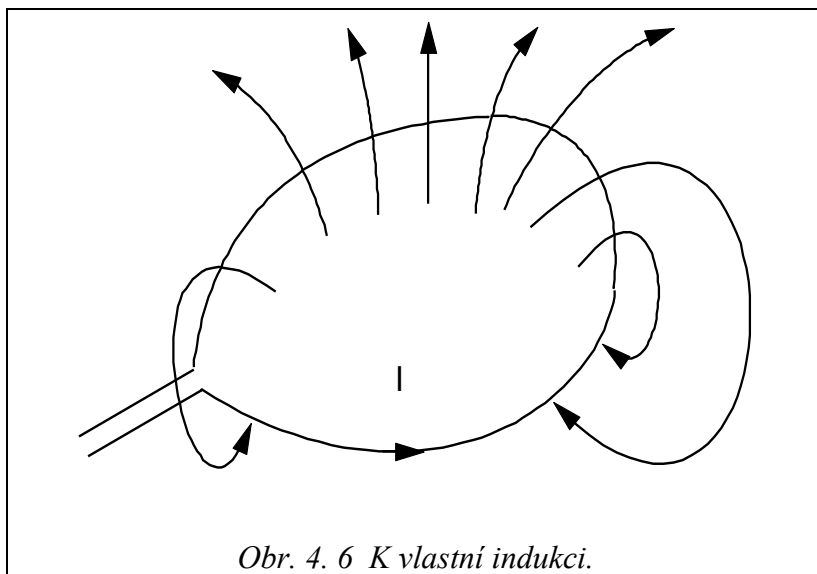
Zatím jsme uvažovali indukované proudy ve vodičích tvaru drátu, takže elektrický proud měl svoji přesně vymezenou cestu. Uvažujme nyní kovová tělesa libovolného tvaru. Mění-li se v takových tělesech indukční tok, jsou i zde splněny podmínky pro vznik indukovaných proudů. Nezáleží na tom, jde-li o změnu v důsledku pohybu těles nebo o časovou změnu magnetického pole. Indukované proudy tohoto typu se nazývají vířivé proudy. Podle Lencova pravidla mají vířivé proudy takový směr, že svými účinky brání změně, která je vyvolala. Jestliže byly vyvolány pohybem vodivého tělesa v magnetickém poli, potom tento pohyb brzdí. Často uváděnou demonstrací vířivých proudů je Waltenhofenovo kyvadlo. Je to měděná deska, kývající volně mezi póly elektromagnetu, pokud jím neprochází proud. Po zapnutí proudu se kyvadlo zastaví.

Praktické využití tohoto jevu je u elektromagnetických brzd a pro tlumení elektrických měřicích přístrojů. Vířivé proudy mají tím větší hodnotu, čím rychleji se mění magnetické pole, ve kterém se vodič nachází. Proto můžeme vznik vířivých proudů snadno pozorovat, vložíme-li vodič do dutiny cívky, ve které rychle se měnící proud vyvolá rychle se měnící magnetické pole. V tomto případě dosahují vířivé proudy takových hodnot, že vyvinuté teplo může masivní vodivé těleso rozžhavit. Této metody se používá ve vakuové technice k prohřátí a rozžhavení kovových částí uvnitř čerpacího zařízení.

Vířivé proudy mohou vznikat i v samostatném vodiči, kterým protéká střídavý proud a projevují se povrchovým jevem, který se nazývá skin - efekt. Prochází-li válcovým vodičem střídavý proud, mají vířivé proudy u povrchu vodiče směr původního proudu a u osy vodiče míří proti němu. Indukované vířivé proudy tedy vedou k nerovnoměrnému rozdělení proudu podél průřezu vodiče. Při rychle proměnných proudech je hustota proudu blízko osy vodiče prakticky nulová a proud prochází jen po povrchu vodiče. Tím se stane i magnetické pole uvnitř vodiče nulovým. Vířivé proudy u vodičů ve střídavém magnetickém poli se projevují také nepříznivě. Vzniklé teplo zhoršuje magnetické vlastnosti materiálu. Proto se v těchto případech vířivé proudy vhodným způsobem omezují. V tomto směru měl značný význam objev feritů, tj. magnetických materiálů s vysokým elektrickým odporem.

4. 2 Vlastní indukce

Z Faradayova zákona plyne, že v obvodě se indukuje EMN tehdy, mění-li se magnetický tok, který prochází obvodem. Tento magnetický indukční tok je však většinou způsoben proudem,



protékajícím v témže obvodě nebo v jiném blízkém obvodu. Proto je užitečné vyjadřovat $\mathcal{E}_i$ přímo jako funkci proudu, protékající obvodem.

Vyjádříme nejprve indukované EMN jako funkci proudu, protékajícího vlastním obvodem, v němž EMN vzniká. Uvažujeme elektrický obvod ve vakuu, kterým prochází proud I (obr. 4. 6). Proud vytváří magnetické pole, jehož indukce závisí na

tomto proudu. Z Biot-Savart-Laplaceova zákona ve tvaru $dB = k_1 I$ plyne totiž integrací $B = k_2 I$ a z definice indukčního toku

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

plyne

$$\Phi = k_3 I,$$

kde k_1, k_2, k_3 závisí jen na geometrickém uspořádání systému. Indukční tok plochou, která je ohraničena vodičem, lze tedy vyjádřit vztahem

$$\Phi = L I. \quad (4.5)$$

Konstanta úměrnosti L se nazývá vlastní indukčnost obvodu nebo stručně indukčnost. Ze vztahu pro indukčnost $L = \Phi / I$ plyne, že indukčnost obvodu se číselně rovná indukčnímu toku, který posílá jednotkový proud plochou, omezenou obvodem. Jednotkou indukčnosti je henry (značíme H)

$$[L] = \text{Wb A}^{-1} = \text{H}.$$

Indukčnost obvodu závisí na geometrickém uspořádání obvodu, jeho rozměrech a na magnetických vlastnostech prostředí. V jiných prostředích než ve vakuu závisí indukčnost na relativní permeabilitě prostředí μ_r , která však u feromagnetických látek je funkcí intenzity magnetického pole. V tomto případě je indukčnost funkcí proudu, který budí magnetické pole. Úměrnost indukčního toku procházejícímu proudem, vyjádřená vztahem $\Phi = L I$, kde L je pro daný obvod konstanta, je tedy splněna tehdy, jestliže v blízkosti obvodu nejsou feromagnetika.

Mění-li se proud v obvodu, mění se také indukční tok plochou, omezenou obvodem. Jestliže prostředí v okolí obvodu není feromagnetické, je indukčnost konstantní a v obvodu vzniká indukované EMN

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(L \cdot I) = -L \frac{dI}{dt}. \quad (4.6)$$

Na základě tohoto vztahu, můžeme indukčnost obvodu definovat takto: **indukčnost obvodu se číselně rovná EMN, vznikajícímu v obvodu při změně proudu o 1 A za 1 s.**

Jestliže proud roste $\left(\frac{dI}{dt} > 0\right)$, je jeho růst zpomalován, jestliže proud klesá $\left(\frac{dI}{dt} < 0\right)$, je zpomalován jeho pokles.

Indukčnost je důležitá konstanta obvodu, která má význam zejména u cívek s větším počtem závitů. Takové cívky mají velkou indukčnost, protože indukční tok postupuje všemi jejich závitů. Celkový indukční tok obvodem je v tomto případě určen součinem počtu závitů a toku plochou jednoho závitu.

Výpočet indukčnosti je obecně složitý. Určíme indukčnost v jednoduchém případě dlouhé tenké cívky bez jádra, kde pole uvnitř závitů je přibližně homogenní a pro magnetickou indukci platí

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}.$$

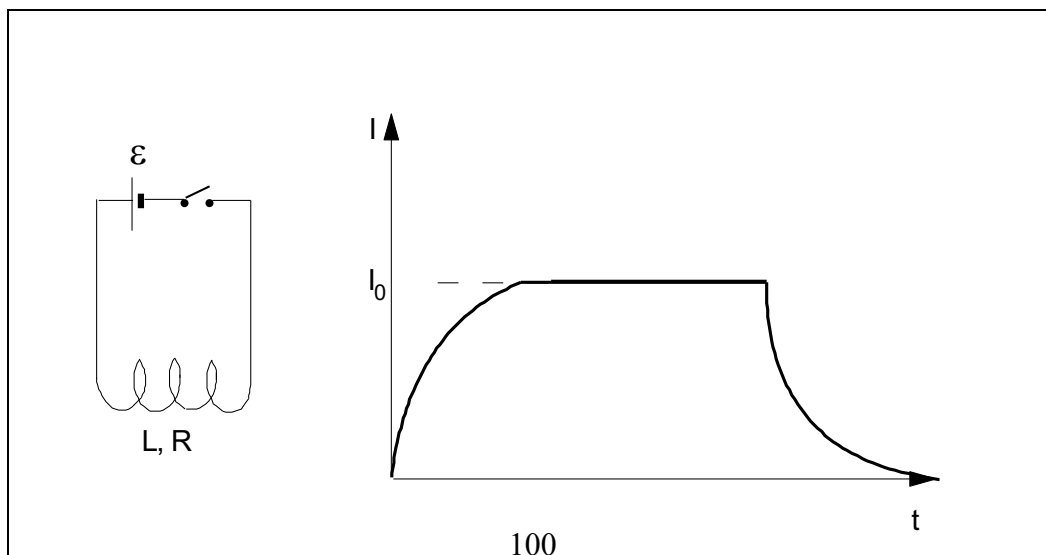
Celkový indukční tok

$$\Phi = NBS = \frac{\mu_0 N^2 IS}{l}$$

a indukčnost

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}.$$

Jev vlastní indukce se výrazně projevuje především při zapnutí a vypnutí proudu v obvodu s indukčností. Při zapnutí nenabude proud okamžitě plné hodnoty, určené Ohmovým zákonem, ale stoupá spojitě od nulové hodnoty na maximální. Podobně při vypnutí nevymizí proud okamžitě, ale klesá spojitě k nule. Tyto jevy můžeme vysvětlit také z hlediska energetického. Při zapnutí proudu se musí vytvořit magnetické pole. Na to se spotřebuje část energie dodávané zdrojem a proto proud nabude hodnoty určené Ohmovým zákonem až po jisté době, která závisí na indukčnosti obvodu. Podobně při vypnutí je třeba určitého času k vymizení magnetického pole. Určíme časový průběh proudu v obvodu s indukčností a odporem při zapnutí a vypnutí proudu (viz. obr. 4. 7).



Obr. 4. 7 Průběh proudu v cívce při zapojení a rozpojení elektrického obvodu.

Jestliže do obvodu zapojíme zdroj, jehož EMN je $\mathcal{E}_0$, pak vlivem vlastní indukce se indukuje EMN $\mathcal{E}_i$. Celkové EMN v obvodu je

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_i = \mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt}$$

a obvodem prochází proud

$$I = \frac{\mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt}}{R}.$$

Jelikož

$$\frac{\mathcal{E}_0}{R} = I_0,$$

obdržíme

$$I_0 - I = \frac{L}{R} \frac{dI}{dt}.$$

Separací proměnných a uplatněním $dI = -d(I_0 - I)$ dostaneme

$$\frac{d(I_0 - I)}{I_0 - I} = -\frac{R}{L} dt$$

a integrací levé a pravé strany dostaneme

$$\ln(I_0 - I) = -\frac{R}{L} t + \ln C.$$

Pro $t = 0$ je $I = 0$ a pak $\ln C = \ln I_0$, takže platí

$$\ln \frac{I_0 - I}{I_0} = -\frac{R}{L} t.$$

Poslední výraz upravíme a vyjádříme závislost proudu na čase

$$I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right).$$

Proud se asymptoticky blíží ustálené hodnotě $\frac{\mathcal{E}_0}{R} = I_0$, které teoreticky dosáhne až pro $t \rightarrow \infty$.

Po přerušení obvodu je proud určen indukovaným napětím $\mathcal{E}_i$ a má velikost

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{L}{R} \frac{dI}{dt}.$$

Poslední výraz upravíme na tvar

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt$$

a integrací obdržíme

$$\ln I = -\frac{R}{L} t + \ln C.$$

Pro $t = 0$ je $I = I_0$ a tedy $\ln C = \ln I_0$, takže platí

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L} t,$$

z čehož lze psát

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Po vypnutí se tedy proud opět asymptoticky blíží k nulové hodnotě. Prudký pokles proudu v okamžiku přerušení vyvolá značné elektromotorické napětí, které může způsobit výboj mezi kontakty klíče.

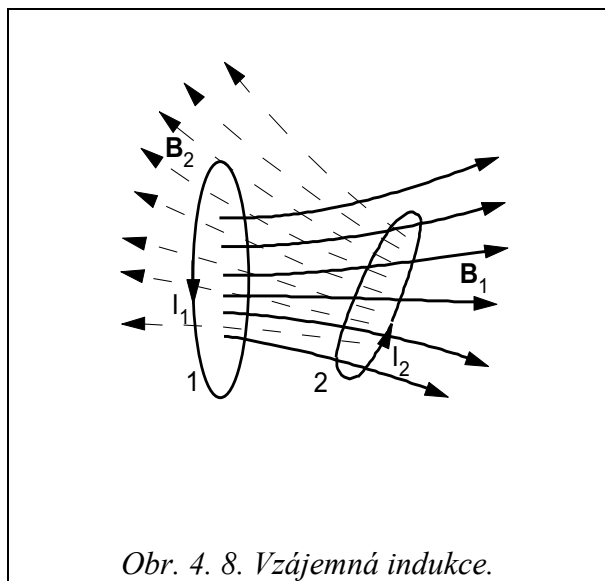
Průběh závislosti proudu na čase po zapnutí a vypnutí závisí na konstantách obvodu R , L , resp. na jejich poměru L/R . Tento poměr se nazývá časová konstanta obvodu $\tau = L/R$. Závislost proudu na čase po zapnutí pak můžeme vyjádřit ve tvaru

$$I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Obvod, který má větší časovou konstantu se dostane později do ustáleného stavu.

4.3 Vzájemná indukce

Vzájemné induktivní působení jednoho obvodu na druhý nazýváme vzájemnou indukcí. Uvažujme dva obvody, např. smyčky 1 a 2 ve vzájemně pevné poloze (viz *obr. 4. 8*).



Obr. 4. 8. Vzájemná indukce.

Jestliže smyčkou 1 prochází proud I_1 , je indukční tok smyčkou 2 úměrný proudu I_1 , nebo-li platí

$$\phi_{21} = M_{21}I_1,$$

kde jsme konstantu úměrnosti označili M_{21} .

Protéká-li smyčkou 2 proud I_2 , je indukční tok smyčkou 1 úměrný proudu I_2 , nebo-li platí

$$\phi_{12} = M_{12}I_2.$$

Jestliže okolní prostředí není feromagnetické, lze pro libovolné dvě

smyčky dokázat, že platí

$$M_{21} = M_{12} = M.$$

Vzájemné induktivní působení dvou obvodů můžeme tedy charakterizovat jednou veličinou

$$M = \frac{\phi_{21}}{I_1} = \frac{\phi_{12}}{I_2}, \quad (4.7)$$

která se nazývá vzájemná indukčnost. Jednotkou je opět henry $[M] = \text{WbA} = \text{H}$. Vzájemná indukčnost závisí na geometrickém uspořádání obvodů, jejich velikostí a magnetických vlastnostech prostředí.

Číselně se rovná indukčnímu toku, který vytváří jednotkový proud v jednom obvodu a prochází druhým obvodem. Jestliže se proud I_1 mění s časem, bude časově závislý i tok Φ_{21} a indukované napětí v obvodu 2 bude při $M = \text{konst.}$

$$\mathcal{E}_{i2} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -\frac{d}{dt}(MI_1) = -M\frac{dI_1}{dt}. \quad (4.8)$$

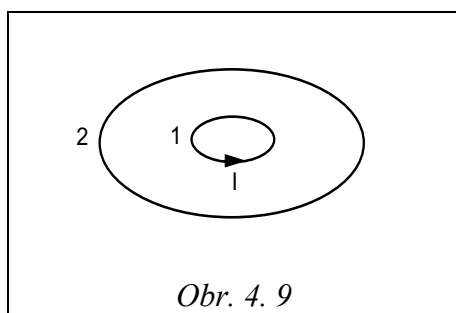
Podobně pro indukované napětí v obvodě 1 platí

$$\mathcal{E}_{i1} = -M\frac{dI_2}{dt}.$$

Vzájemná indukčnost dvou obvodů se tedy číselně rovná indukovanému elektromotorickému napětí v jednom obvodu při změně proudu v druhém obvodu. Vztah $M_{21} = M_{12}$, který jsme použili při výpočtu indukovaného EMN v obvodech 1, 2, vyjadřuje důležitou vlastnost vzájemné indukce. Smysl tohoto vztahu spočívá v tom, že v libovolném případě indukční tok Φ_{12} obvodem 1, vytvořený proudem I v obvodě 2 je roven indukčnímu toku Φ_{21} obvodem 2, vytvořenému stejným proudem I v obvodě 1. Tento výsledek je užitečný v řadě případů při výpočtu indukčních toků.

Uvedeme příklad.

V rovině leží dvě smyčky ve tvaru soustředných kružnic o poloměrech r_1, r_2 ($r_1 < r_2$).



Smyčkou 1 prochází proud I . Je třeba určit indukční tok Φ_{21} procházející plochou, omezenou smyčkou 2. Přímý výpočet toku Φ_{21} je obtížný vzhledem ke složitému magnetickému poli. Určíme tedy tok Φ_{12} , vyvolaný stejným proudem I , protékajícím smyčkou 2. Vzhledem k podmínce ($r_1 < r_2$) vypočteme tento tok snadno jako součin magnetické indukce ve středu smyčky 2

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2r_2}$$

a plošného obsahu $S_1 = \pi r_1^2$. Tento výsledek $\Phi_{12} = B_2 S_1$ zároveň určuje hledaný tok Φ_{21} protože $\Phi_{21} = \Phi_{12}$.

Jako příklad výpočtu vzájemné indukčnosti určíme vzájemnou indukčnost dvou cívek s počtem závitů N_1, N_2 , které jsou při stejném průřezu S těsně navinuty (jedna na druhou) na válec o stejné délce. Proud I_1 v první cívce vytváří v druhé cívce indukční tok Φ_{21} , proud I_2 v druhé cívce vytváří v první cívce tok Φ_{12} . Za předpokladu, že délka cívek je mnohem větší, než jejich poloměr, platí

$$\Phi_{21} = B_1 S N_2 = N_2 \frac{\mu N_1 I_1}{l} S,$$

$$\Phi_{12} = B_2 S N_1 = N_1 \frac{\mu N_2 I_2}{l} S.$$

Indukovaná EMN v cívkách jsou

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -\frac{\mu N_1 N_2 S}{l} \frac{dI_1}{dt},$$

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{\mu N_1 N_2 S}{l} \frac{dI_2}{dt}.$$

Pro vzájemnou indukčnost uvedených cívek tedy platí

$$M = \frac{\mu N_1 N_2 S}{l}.$$

Z výsledku je zřejmé, že vzájemná indukčnost závisí jen na geometrických vlastnostech obvodů a na magnetických vlastnostech prostředí. Zároveň vidíme, že $M_{21} = M_{12} = M$. Jestliže je ale válec, na kterém jsou navinuty cívky, z feromagnetické látky, dostaneme stejným postupem pro indukční toky

$$\Phi_{21} = \mu_1 \frac{N_1 N_2 S}{l} I_1, \quad \Phi_{12} = \mu_2 \frac{N_1 N_2 S}{l} I_2$$

a tedy

$$M_{21} = \mu_1 \frac{N_1 N_2 S}{l}, \quad M_{21} = \mu_2 \frac{N_1 N_2 S}{l}.$$

Protože obecně $\mu_1 \neq \mu_2$ (ve feromagnetických látkách závisí permeabilita na proudech I_1, I_2) je v tomto případě $M_{21} \neq M_{12}$.

Jev vzájemné indukce je základem činnosti transformátoru, kde se prostřednictvím indukčního toku přenáší elektrická energie z vinutí vstupního (primárního) do vinutí výstupního (sekundárního).

4. 4 Energie magnetického pole

Při studiu elektrického pole jsme ukázali, že elektrické pole má energii. Pro hustotu energie elektrického pole platí

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}.$$

Také magnetické pole má energii, jak plyne například z dějů při vypnutí a zapnutí proudu, z přenosu energie elektromagnetickými vlnami apod. energii magnetického pole určíme z energetické bilance obvodu, ve kterém je zdroj elektromotorického napětí $\mathcal{E}_0$, jehož vnitřní odpor je r , cívka indukčnosti L a klíč. Je-li klíč rozpojen, je proud v obvodu nulový a magnetické pole je rovněž nulové. Po zapnutí klíče proud narůstá a jeho okamžitá hodnota I souvisí s $\mathcal{E}_0$ a indukovaným elektromotorickým napětím $\mathcal{E}_i$ vztahem

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_i = (R + r)I.$$

Násobíme-li tuto rovnici $I dt$, dostaneme

$$\mathcal{E}_0 I dt + \mathcal{E}_i I dt = (R + r) I^2 dt.$$

Po úpravě, kdy

$$\mathcal{E}_i = -L \frac{dI}{dt},$$

obdržíme

$$\mathcal{E}_0 I dt = (R + r) I^2 dt + L I dI.$$

Výraz $\mathcal{E}_0 I dt$ představuje energii, dodanou zdrojem do obvodu v časovém intervalu dt , $(R + r) I^2 dt$ představuje Joulovo teplo, vyvinuté v obvodu v téže době. Energie dodaná zdrojem je tedy větší než vzniklé teplo. Část této energie se proto nutně uplatní jinak a to k vytvoření magnetického pole. Toto pole se vytváří během růstu proudu. Výraz $L I dI$ tedy představuje přírůstek energie magnetického pole při změně proudu dI .

$$dW_m = L I dI.$$

Celkovou energii dostaneme integrací

$$W_m = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2. \quad (4.9)$$

Energie magnetického pole je v tomto vztahu vyjádřena parametry, charakterizujícími proudový obvod. Můžeme ji ale také vyjádřit veličinami, charakterizujícími jen magnetické pole (tj. $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$) a objemem prostředí, které pole zaujímá. Vyjdeme z magnetického pole dlouhé tenké cívky, kde můžeme pole považovat přibližně za homogenní a kde platí

$$H = \frac{NI}{l}.$$

Úpravou dostaneme

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi}{I} I^2 = \frac{1}{2} INBS = \frac{1}{2} HBV,$$

kde $V = Sl$ je objem vnitřku cívky.

Pro hustotu energie magnetického pole, tj. energii magnetického pole v jednotkovém objemu tedy platí

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} HB.$$

Vyjádření hustoty energie magnetického pole, odvozené pro pole homogenní, platí i pro pole nehomogenní. Obecněji je w_m určena skalárním součinem vektorů $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}. \quad (4.10).$$

Pro celkovou energii magnetického pole v objemu V potom platí

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV. \quad (4.11)$$

Kontrolní otázky ke kapitole 4. Elektromagnetická indukce

1. Vysvětlete podstatu jevu elektromagnetická indukce. Objasněte různé případy vzniku indukovaného elektromotorického napětí.
2. Vlastními slovy vyjádřete Lencovo pravidlo a vysvětlete jeho fyzikální obsah.
3. Napište (případně odvoďte) a vysvětlete Faradayův zákon pro indukované elektromotorické napětí.
4. Naznačte, jak lze odvodit Faradayův zákon pomocí zákona zachování energie.
5. Uveďte, jak se vypočítá indukované elektromotorické napětí mezi počátečním a koncovým bodem vodiče, který se pohybuje v magnetickém poli.
6. Vysvětlete vznik indukovaného elektromotorického napětí v uzavřeném obvodu, který je v klidu a nachází se v časově proměnném magnetickém poli.
7. Vysvětlete, co jsou vířivé proudy a jak se projevují.
8. Jaký průběh má indukované elektromotorické napětí, které vzniká v závitu, který se otáčí stálou rychlostí v homogenním magnetickém poli.
9. Vysvětlete podstatu jevu vlastní indukce.
10. Definujte indukčnost obvodu a uveďte jednotku.
11. Uveďte, jak se vypočítá indukované elektromotorické napětí v obvodu s konstantní indukčností.
12. Vysvětlete, jak se projevuje vlastní indukce při změně proudu v obvodu.
13. Znázorněte a vysvětlete závislost proudu na čase při zapnutí a vypnutí zdroje v obvodu.
14. Vypočítejte indukčnost dlouhé tenké cívky.
15. Vysvětlete jev vzájemné indukce.
16. Definujte vzájemnou indukčnost dvou obvodů.
17. Vypočítejte vzájemnou indukčnost dvou cívek, které jsou těsně navinuty na válci jedna na druhou.
18. Uveďte, jak se vypočítá energie a hustota energie magnetického pole.