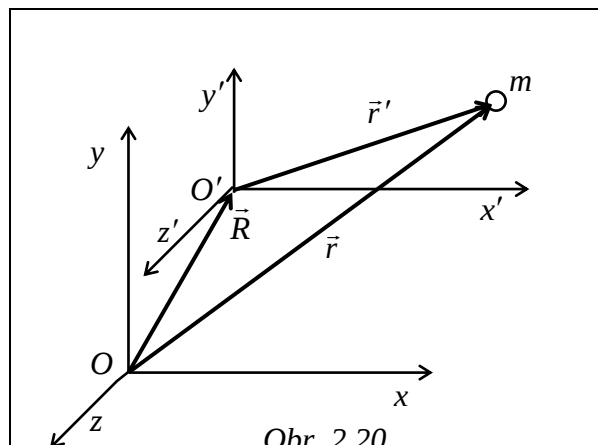


## 5. Pohyb v inerciálních a neinerciálních soustavách

Pohyb těles v inerciální vztažné soustavě určují Newtonovy pohybové zákony. Budeme se zabývat otázkou, zdali pohybové zákony platí také v soustavě, která se vzhledem k dané inerciální vztažné soustavě pohybuje. Uvažujme dvě vztažné soustavy ( viz obr. 2.20 ): inerciální soustavu  $Oxyz$  ( $S$ ) a soustavu  $O'x'y'z'$  ( $S'$ ), které jsou navzájem posunuty tak, že stejnojmenné osy jsou rovnoběžné. Poloha hmotného bodu  $m$  je v soustavě  $S$  určena polohovým vektorem  $\vec{r}(x,y,z)$ , v soustavě  $S'$  polohovým vektorem  $\vec{r}'(x',y',z')$ . Vzájemné posunutí obou



Obr. 2.20

soustav je určeno vektorem  $\vec{R}(p,q,s)$ , který udává polohu počátku  $O'$  vzhledem k nečárkovanému systému. Podle obr. 2.20 platí

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R} \quad (2.40)$$

Pohybuje-li se bod  $m$ , jsou vektory  $\vec{r}, \vec{r}'$  funkcemi času. Pohybuje-li se soustava  $S'$  vzhledem k  $S$ , je také vektor  $\vec{R}$  funkcí času.

V případě, že osy obou soustav jsou stále rovnoběžné (vzájemný pohyb obou soustav je posuvný), nezávisí jednotkové vektory  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  v obou soustavách na čase a derivací dostaneme

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt}$$

a tedy

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \quad , \quad (2.41)$$

kde  $\vec{v}$  je rychlost hmotného bodu vzhledem k  $S$ ,  $\vec{v}'$  je rychlost hmotného bodu vzhledem k  $S'$ ,  $\vec{u}$  je rychlost soustavy  $S'$  vzhledem k  $S$ .

Vztah (2.41) vyjadřuje pravidlo o skládání vektorů současných rychlostí, které v mechanice platí obecně (při libovolném vzájemném pohybu soustav).

### Inerciální soustavy

Předpokládejme, že  $\vec{u} = \overrightarrow{\text{konst}}$ , takže soustava  $S'$  se vzhledem k soustavě  $S$  pohybuje rovnoměrně přímočaře. Derivace rychlosti  $\vec{u}$  podle času představuje zrychlení  $\vec{a}_u$ . Při  $\vec{u} = \overrightarrow{\text{konst}}$  je  $\vec{a}_u = \vec{0}$  a z (2.41) plyne

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} \quad , \quad (2.42)$$

$$\vec{a} = \vec{a}' \quad ,$$

kde  $\vec{a}$  je zrychlení hmotného bodu v soustavě  $S$ ,  $\vec{a}'$  je zrychlení hmotného bodu v soustavě  $S'$ .

Protože podle uvedeného předpokladu je soustava  $S$  inerciální, tak jestliže na hmotný bod nepůsobí žádné vnější síly, je  $\vec{a} = \vec{0}$ . Protože  $\vec{a} = \vec{a}'$ , je také  $\vec{a}' = \vec{0}$ , tzn. že každý bod, na který nepůsobí žádné vnější síly se pohybuje rovnoměrně přímočaře i v  $S'$ . Soustava  $S'$  je tedy také inerciální a platí, že inerciální vztažné soustavy konají vzájemný rovnoměrný přímočarý pohyb. Kteroukoliv z nich si můžeme vybrat jako základní a považovat ji např. za klidovou.

Vynásobením (2.42) hmotností  $m$  vyšetřovaného hmotného bodu dostaneme

$$m\vec{a} = m\vec{a}'$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}' = \vec{F}' \quad (2.43)$$

V soustavě  $S'$  platí tedy stejná pohybová rovnice jako v soustavě  $S$ . Při vzájemném rovnoměrně přímočarém pohybu obou soustav probíhají mechanické děje v obou soustavách stejně.

**Žádnými mechanickými pokusy, provedenými uvnitř inerciální soustavy, nelze tedy rozhodnout, je-li soustava v klidu nebo se pohybuje rovnoměrně přímočaře.**

Tento výsledek se nazývá **mechanický ( Galileův ) princip relativity**.

### **Pohyb v neinerciálních soustavách**

Víme, že základní zákon mechaniky, vyjádřený pohybovou rovnicí  $\sum \vec{F}_i = m\vec{a}$  platí pouze v inerciálních soustavách. V některých případech je ale vhodné použít k popisu a vyšetřování mechanických dějů neinerciálních vztažných soustav, tj. soustav, které se vzhledem k dané inerciální vztažné soustavě pohybují se zrychlením. Ukážeme, jak je třeba pohybovou rovnici upravit, aby zůstala v platnosti i v neinerciálních soustavách. Omezíme se na jednoduché, ale často se vyskytující případy neinerciálních soustav.

**a) Neinerciální soustava  $S'$  koná vzhledem k inerciální soustavě  $S$  nerovnoměrný posuvný pohyb.**

V tomto případě již neplatí  $\vec{u} = \overrightarrow{\text{konst}}$  a derivací dostaneme

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_u, \quad (2.44)$$

kde  $\vec{a}$  je zrychlení hmotného bodu v soustavě  $S$ ,  $\vec{a}'$  je zrychlení hmotného bodu v soustavě  $S'$ ,  $\vec{a}_u$  je zrychlení soustavy  $S'$  vzhledem k soustavě  $S$ .

Z ( 2.44 ) plyne

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_u,$$

vy násobením rovnice hmotností  $m$  sledovaného hmotného bodu

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_u = \vec{F}' \quad (2.45)$$

Jestliže vycházíme z toho, že analogicky s inerciální soustavou i ve zrychlené soustavě je součin hmotnosti a zrychlení v této soustavě roven síle  $\vec{F}'$ , která toto zrychlení hmotnému bodu uděluje, zjišťujeme, že je to jiná síla než  $\vec{F} = m\vec{a}$ , která na bod působí v inerciální soustavě. Hmotný bod se v soustavě  $S'$  pohybuje tak, jako kdyby na něj kromě síly  $\vec{F} = m\vec{a}$  působila ještě síla  $\vec{F}^* = -m\vec{a}_u$ , která je opačně orientovaná než zrychlení soustavy  $S'$ . Velikost této síly je rovna součinu hmotnosti vyšetřovaného hmotného bodu a zrychlení soustavy  $S'$ . Síla  $\vec{F}^*$  se nazývá **zdánlivá setrvačná síla**. Tato síla se liší od sil, jejichž výslednici jsme označili  $\vec{F}$  tím, že necharakterizuje působení reálných objektů na hmotný bod, ale je způsobena zrychleným pohybem soustavy  $S'$ . **Pohybová rovnice v uvedené neinerciální soustavě má tedy tvar**

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}^* \quad (2.46)$$

a zdánlivá setrvačná síla je

$$\vec{F}^* = -m\vec{a}_u. \quad (2.47)$$

Zdánlivou setrvačnou sílu zná každý ze zkušenosti. Zjišťujeme ji často v dopravních prostředcích při jejich zrychleném pohybu. Jestliže sedíme ve vlaku, který se pohybuje rovnoměrně přímočaře (a bez otřesů), zjistíme jeho pohyb jen při pohledu z okna, kdy přibereme k pozorování další tělesa. Jestliže se však rychlost vlaku začne měnit, zjistíme okamžitě po-

hyb vlaku. Při zrychleném pohybu cítíme sílu, která nás tlačí na opěradlo, jestliže sedíme čelem ve směru pohybu. Při zpomaleném pohybu cítíme sílu, která nás naklání dopředu. Touto silou je zdánlivá setrvačná síla  $\vec{F}^*$ .

Zdánlivé setrvačné síly existují pouze v neinerciálních soustavách. Tuto sílu potřebuje zavést pouze pozorovatel v neinerciální soustavě, aby zachoval platnost Newtonova pohybového zákona i v této soustavě. Ukážeme to na konkrétním příkladě.

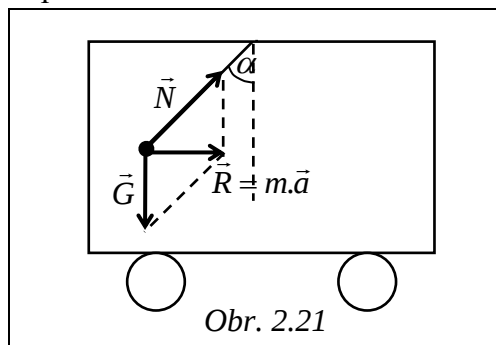
Ve vagóně vlaku je na vlákne, připevněném ke stropu, zavěšeno těleso (obr. 2.21). Jestliže se vagón rozjíždí se zrychlením  $\vec{a}$ , odkloní se vlákno s tělesem od svislého směru (v opačném směru než je směr vektoru  $\vec{a}$ ) o úhel  $\alpha$ .

*Stanovisko pozorovatele, který se nachází na Zemi, kterou považujeme za inerciální soustavu:*

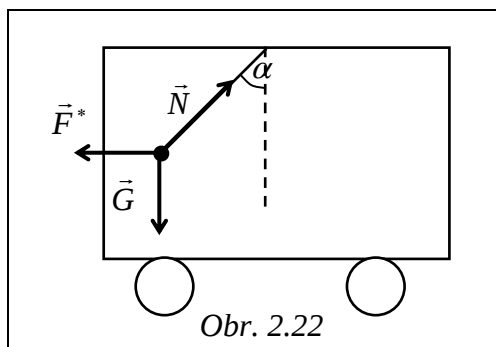
Těleso se pohybuje, stejně jako vagón, se zrychlením. Toto zrychlení uděluje tělesu výslednice sil  $\vec{G}, \vec{N}$ , která na těleso působí. Pohybová rovnice má tvar  $\vec{G} + \vec{N} = m\vec{a}$ . Pozorovatel tedy zjišťuje, že chování tělesa je ve shodě s pohybovým zákonem. Žádnou zdánlivou setrvačnou sílu nemusí zavádět.

*Stanovisko pozorovatele, který je ve vagónu (obr. 2.22):*

Zavěšené těleso je v klidu. Aby zachoval platnost pohybových zákonů, musí k silám  $\vec{G}, \vec{N}$ , které mají nenulovou výslednici, připojit ještě sílu  $\vec{F}^*$ , která je orientována tak, že  $\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}^* = \vec{0}$ .



Obr. 2.21

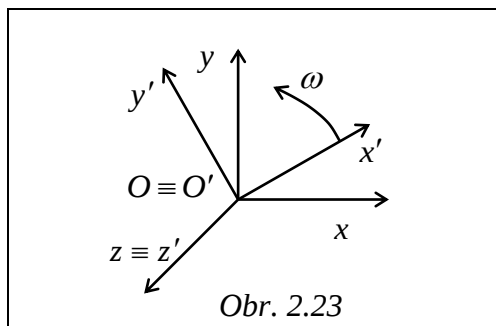


Obr. 2.22

#### b) *Neinerciální soustava $S'$ se vzhledem k inerciální soustavě $S$ otáčí.*

Probereme případ, kdy soustava  $S'$  má s inerciální soustavou  $S$  společný počátek  $O' \equiv O$  a osu  $z' \equiv z$ , kolem které se vzhledem k  $S$  otáčí s úhlovou rychlostí  $\omega$  (viz obr. 2.23). Uvedeme bez odvození, že v neinerciální soustavě  $S'$  má pohybová rovnice v tomto případě tvar

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$



Obr. 2.23

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}^* + \vec{F}_o^* + \vec{F}_c^* \quad (2.48)$$

Vidíme, že k síle  $\vec{F} = m\vec{a}$  přistupují v otáčivé soustavě další tři síly. Všimneme si jich jednotlivě:

$$a) \quad \vec{F}^* = -m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} = -m\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = -m\vec{a}_u$$

( Eulerova ) setrvačná síla,

kde  $\vec{a}_u$  je **zrychlení** soustavy  $S'$  v místě, kde se nachází hmotný bod. Tato síla je nulová, je-li otáčení soustavy  $S'$  rovnoměrné, tj. když  $\vec{\omega} = \text{konst.}$

$$b) \quad \vec{F}_o^* = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -m\vec{\omega} \times \vec{u}$$

**zdánlivá setrvačná odstředivá síla,**

kde  $\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  je **obvodová rychlost** v místě, kde se nachází hmotný bod. Zdánlivá setrvačná odstředivá síla  $\vec{F}_o^*$  působí na hmotný bod při jakémkoliv otáčení soustavy, je-li v konečné vzdálenosti od osy rotace. Označíme-li  $\vec{\rho}$  složku polohového vektoru  $\vec{r}$  v rovině kolmé k ose rotace a obsahující bod  $M$ , pak rychlost soustavy

$$\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

má velikost

$$u = \omega \rho.$$

Protože je kolmá k vektoru  $\vec{\omega}$ , má síla  $\vec{F}_o^*$  velikost

$$F_o^* = m\omega^2 \rho.$$

Ve vektorovém tvaru

$$\vec{F}_o^* = m\omega^2 \vec{\rho}.$$

Síla  $\vec{F}_o^*$  leží tedy v rovině kolmé k ose rotace a míří od osy rotace (obr. 2.24). Proto se nazývá síla odstředivá.

c)  $\vec{F}_c^* = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$  **setrvačná síla Coriolisova**

V tomto vztahu je  $\vec{v}'$  relativní rychlost hmotného bodu vzhledem k rotující soustavě. Tato síla je nulová, jestliže je hmotný bod vzhledem k rotující soustavě v klidu nebo jsou-li vektory  $\vec{\omega}, \vec{v}'$  rovnoběžné. Velikost této síly je  $F_c^* = 2m\omega v' \sin \alpha$ , kde  $\alpha$  je úhel mezi vektory  $\vec{\omega}, \vec{v}'$ .

### Vztažná soustava Země.

Ve vztažné soustavě pevně spojené se Zemí je pozorovaný průběh mechanických dějů v dobrém souhlasu s výpočty provedenými na základě Newtonových pohybových zákonů. Proto považujeme soustavu, pevně spojenou s povrchem Země, za inerciální. V některých případech však zjišťujeme odchylky, které lze vysvětlit vlastním pohybem Země vzhledem k inerciální soustavě, spojené se Sluncem.

Jestliže při vyšetřování některých mechanických dějů nemůžeme zanedbat rotaci Země kolem své osy, je vztažná soustava, spojená se Zemí, soustavou neinerciální. Důsledkem rotace Země je tedy výskyt setrvačných sil.

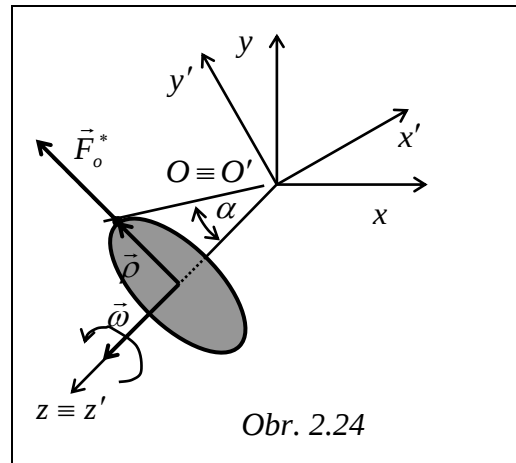
Eulerova setrvačná síla  $\vec{F}^* = -m\vec{a}_u$  je nulová, protože rotace Země je rovnoměrná. Projevují se ale setrvačná síla odstředivá  $\vec{F}_o^*$  a Coriolisova  $\vec{F}_c^*$ .

Na těleso hmotnosti  $m$  na povrchu Země v místě zeměpisné šířky  $\varphi$  působí kromě gravitační síly  $\vec{F}_g$  také odstředivá síla  $\vec{F}_o^*$ . Považujeme-li Zemi za homogenní kouli, je  $\vec{F}_g$  orientována do středu Země,  $\vec{F}_o^*$  je kolmá k ose rotace Země

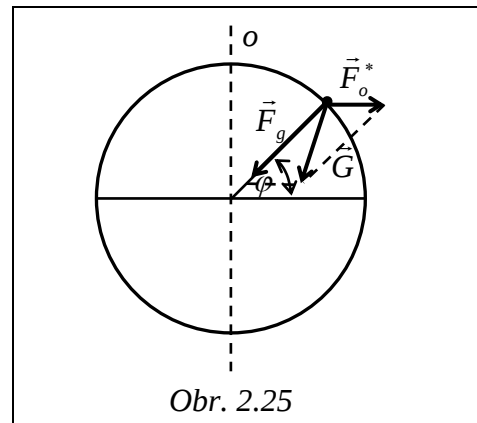
$$F_g = \kappa \frac{M_Z \cdot m}{R_Z^2}$$

$$F_o^* = m\omega^2 R_Z \cos \varphi.$$

Tíhová síla je výslednicí gravitační síly  $\vec{F}_g$  a setrvačné síly  $\vec{F}_o^*$  (obr. 2.25)



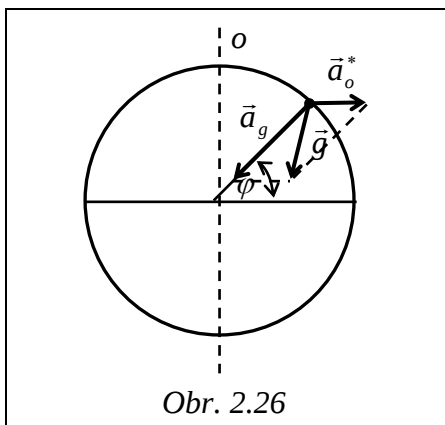
Obr. 2.24



Obr. 2.25

$$\vec{G} = \vec{F}_g + \vec{F}_o^*.$$

Směr tíhové síly  $\vec{G}$  se nazývá svislý. Na daném místě povrchu Země jej určuje směr niti volně zavěšené olovnice. Na zemském rovníku je  $\varphi = 0$ , síly  $\vec{F}_g$ ,  $\vec{F}_o^*$  jsou opačně orientované. Síla  $\vec{F}_o^*$  má maximální velikost  $m\omega^2 R_Z$ , tíhová síla je nejmenší. Na pólu Země je  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\vec{F}_o^* = 0$ . Tíhová síla je největší a je totožná s gravitační silou  $\vec{G} = \vec{F}_g$ . Odstředivé zrychlení ( $\vec{a}_o^*$ ), které odstředivá síla  $\vec{F}_o^*$  uděluje každému tělesu na Zemi, se vektorově skládá se zrychlením gravitačním ( $\vec{a}_g$ ) ve výsledné zrychlení tíhové ( $\vec{g}$ ) (obr. 2.26)

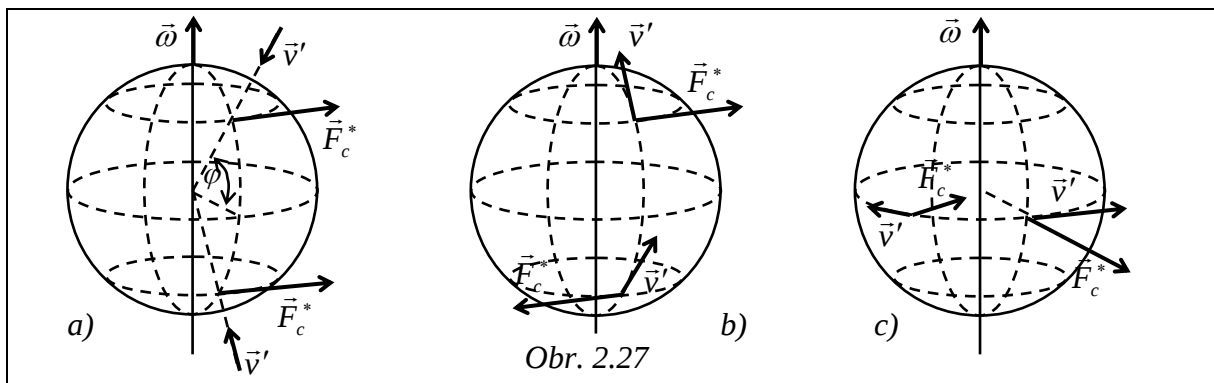


Obr. 2.26

$$\vec{g} = \vec{a}_g + \vec{a}_o^*.$$

Na rovníku je  $a_o^* = 0,034 \text{ m.s}^{-2}$ , na pólu je nulové.

Na těleso, jehož rychlost  $\vec{v}'$  nemá směr zemské osy rotace působí Coriolisova síla  $\vec{F}_c^*$ , která je kolmá k vektoru  $\vec{\omega}$ , takže stále leží v rovině kolmé k ose rotace Země. Coriolisova síla je také kolmá k vektoru rychlosti  $\vec{v}'$ , takže nekoná práci. Může měnit pouze směr vektoru  $\vec{v}'$ , ale ne jeho velikost. Na obr. 2.27 je znázorněno působení této síly na pohyb tělesa v blízkosti zemského povrchu. Při volném pádu způsobuje  $\vec{F}_c^*$  odchylku k východu (obr. 2.27 a). Tato odchylka je maximální na rovníku. Při volném pádu z výšky 30 m je východní odchylka 3,6 mm.



Obr. 2.27

S Coriolisovou silou musíme počítat při střelbě na větší vzdálenosti. Při střelbě severním směrem způsobí  $\vec{F}_c^*$  odklon k východu na severní polokouli a k západu na jižní polokouli. Z obr. 2.27 b je zřejmé, že  $\vec{F}_c^*$ , působící na těleso pohybující se podél poledníku severním směrem, míří vzhledem ke směru pohybu vpravo (na východ) na severní polokouli a vlevo (na západ) na jižní polokouli. Tak lze pozorovat, že řeky tekoucí přibližně severojižním směrem podemílají pravý břeh víc než levý, takže pravý břeh je strmý a na levém břehu se tvoří nános, který bývá rovinný a plochý.

Na základě výsledků, uvedených v této kapitole, si musíme uvědomit, že **při řešení úloh v mechanice můžeme postupovat dvojím způsobem:**

- jako vztažnou soustavu vybereme soustavu inerciální
- jako vztažnou soustavu vybereme soustavu neinerciální.

V případě a) zjistíme všechny síly  $\vec{F}_i$ , působící na vyšetřované těleso a sestavíme pohybovou rovnici

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a},$$

kde  $\vec{a}$  je zrychlení vzhledem k dané inerciální soustavě. Dále postupujeme podle pravidel, uvedených na str. 41.

V případě b) opět zjistíme všechny působící síly  $\vec{F}_i$  a dále všechny setrvačné síly  $\vec{F}_k^*$ , působící na těleso. Sestavíme pohybovou rovnici

$$\sum \vec{F}_i + \sum \vec{F}_k^* = m\vec{a}',$$

kde  $\vec{a}'$  je zrychlení hmotného bodu vzhledem ke zvolené neinerciální soustavě. Další postup je stejný jako v případě a).

### Kontrolní otázky k části 5.

1. Napište a vysvětlete zákon skládání rychlostí v mechanice.
2. Předpokládejte, že soustava  $S$  je inerciální. Které další soustavy jsou také inerciální?
3. Vyslovte mechanický princip relativity.
4. Sestavte pohybovou rovnici pro pohyb hmotného bodu v neinerciální soustavě, která vzhledem k dané inerciální soustavě koná nerovnoměrný posuvný pohyb.
5. Na vodorovné a dokonale hladké podlaze vagónu leží těleso. Vagón se pohybuje vzhledem k povrchu Země (soustava  $S$ ) se zrychlením  $\vec{a}$ . Vyšetřete pohyb tělesa v soustavách  $S$  a  $S'$ , kde  $S'$  je soustava spojená s vagónem.
6. Uveďte, které setrvačné síly se vyskytují v neinerciální soustavě  $S'$ , která se vzhledem k inerciální soustavě otáčí.
7. Těleso se pohybuje vzhledem k rotující soustavě  $S'$  rychlostí  $v' = \text{konst.}$  Působí na těleso Coriolisova síla?
8. Analyzujte působení setrvačné odstředivé síly na těleso na povrchu Země. Vysvětlete rozdíl mezi tíhovým a gravitačním zrychlením. Na kterém místě Země je tíhová síla totožná s gravitační silou?
9. Vysvětlete působení Coriolisovy síly na
  - a) těleso, které koná volný pád
  - b) náboj vystřelený na severní polokouli severním směrem
  - c) vodní tok, tekoucí severojižním směrem.
10. Vysvětlete, jak se liší postup při řešení úloh z mechaniky, jestliže jako vztažnou soustavu vybereme soustavu
  - a) inerciální
  - b) neinerciální.