

3. PRÁCE, VÝKON, ENERGIE.

3.1. Práce

Jestliže táhneme např. bednu nebo ji zvedáme nebo ji pilou rozřežeme, říkáme, že jsme konali fyzickou práci. Při těchto činnostech je charakter pohybu bedny či pily určen výslednicí všech sil, které na ně působí. Čím dále jsme bednu táhli, čím výše jsme ji zvedali, čím vícekrát jsme opakovali pohyb při řezání, tím máme pocit větší vykonané práce. Souvisí tedy pocit velikosti vykonané práce s velikostí dráhy, po které výsledná síla působila.

Ve fyzice hodnotíme **dráhový účinek síly pomocí skalární fyzikální veličiny práce** (značka **W**). Práce vykonaná při posunutí hmotného bodu po elementární dráze ds (které odpovídá elementární změna polohového vektoru $d\vec{r}$) je definována skalárním součinem:

$$dW = \vec{F} d\vec{r} \quad (3.1)$$

Celková vykonaná práce silou $\vec{F}$ při posunutí hmotného bodu z bodu M_1 , určeného polohovým vektorem $\vec{r}_1$, do bodu M_2 , určeného polohovým vektorem $\vec{r}_2$ po dané trajektorii (obr. 3.1) je dána určitým integrálem

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} \quad (3.2)$$

Jednotkou fyzikální veličiny práce je **joule [J]**.

$$[W] = \text{N.m} = \text{J}$$

Uvedená obecná definice práce (3.2) vyjadřuje práci vykonanou proměnnou silou působící na hmotný bod, která způsobí jeho posunutí po libovolné křivce. Mohou však nastat různé zvláštní případy, které dále diskutujeme.

1) Vztah (3.1) můžeme upravit:

a) pomocí souřadnic vektorů $\vec{F}$ a $d\vec{r}$

$$dW = \vec{F} d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

b) použitím elementární dráhy ds , kdy platí $ds = |d\vec{r}|$

$$dW = \vec{F} d\vec{r} = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos \alpha = F ds \cos \alpha ,$$

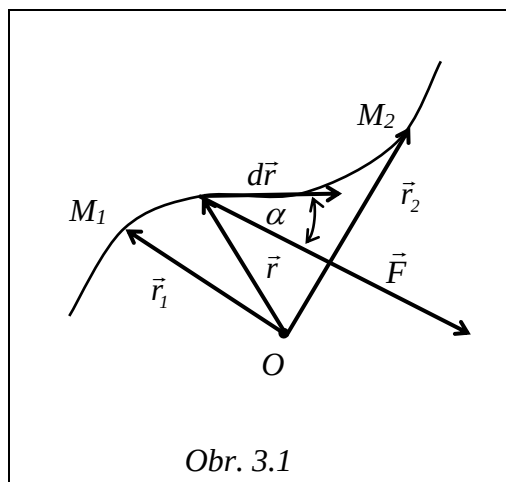
kde α je úhel mezi $\vec{F}$ a $d\vec{r}$.

2) Je-li $\vec{F} = \overrightarrow{\text{konst.}}$ a trajektorií je přímka, potom

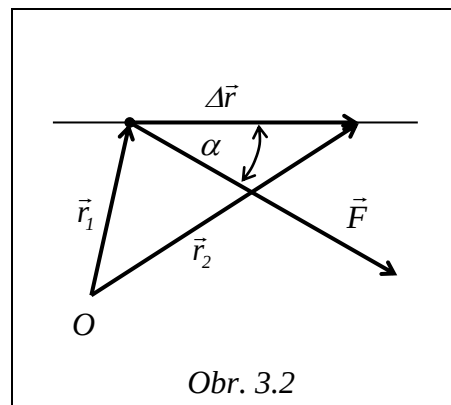
$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} = \vec{F} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F} \Delta\vec{r} = \\ &= |\vec{F}| |\Delta\vec{r}| \cos \alpha = F s \cos \alpha \end{aligned}$$

kde délka dráhy $s = |\Delta\vec{r}|$ (viz obr. 3.2).

3) Velikost vykonané práce závisí na úhlu α , který svírá vektor síly s tečnou k dráze. Ukažme si, jaké případy mo-



Obr. 3.1



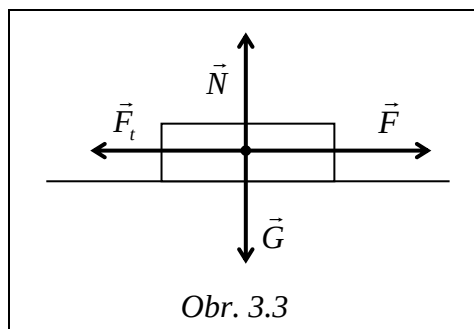
Obr. 3.2

hou nastat pro $\alpha \in \langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$:

- $\alpha = 0^\circ \Rightarrow W = Fs$, velikost vykonané práce je největší, jestliže je vektor síly rovnoběžný s posunutím.
- $\alpha = 90^\circ \Rightarrow W = 0 \Rightarrow$ síla kolmá k posunutí práci nekoná (např. neseme-li předmět stále ve stejné výši a pohybujeme se rovnoměrně, nekonáme práci, nebo normálová síla při pohybu rovnoměrném po kružnici nekoná práci).
- $\alpha < 90^\circ \Rightarrow$ pravoúhlý průmět síly ve směru pohybu a síla koná kladnou práci.
- $\alpha > 90^\circ \Rightarrow$ síla působí proti pohybu a koná zápornou práci.

Příklad: Pohyb tělesa po vodorovné podložce.

Na těleso na drsné rovině působí síly $\vec{F}, \vec{F}_t, \vec{G}, \vec{N}$ (viz obr. 3.3). Tažná síla $\vec{F}$ působí ve směru pohybu a koná kladnou práci. Síla tření $\vec{F}_t$ působí proti směru pohybu tělesa a koná zápornou práci. Práce sil $\vec{G}, \vec{N}$ je rovna nule.



Obr. 3.3

Řešme dále případ **pohybu hmotného bodu v homogenním tíhovém poli Země** (tzn., že v každém bodě pole je $\vec{G} = \text{konst.}$). Při pohybu hmotného bodu po dané trajektorii z bodu A do bodu B směrem k povrchu Země na něj působí jen tíhová síla $\vec{G}$ (odpor prostředí zanedbáváme) viz obr. 3.4. Práci, kterou vykoná síla $\vec{G}$ při přemístění hmotného bodu z A do B, vypočítáme

$$W = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B \vec{G} d\vec{r} = \int (G_x dx + G_y dy + G_z dz) \quad (3.3)$$

Vektor $\vec{G}$, který je rovnoběžný s osou y a má opačnou orientaci, má souřadnice

$$G_x = 0, G_y = -mg, G_z = 0.$$

Po dosazení do (3.7) dostaneme

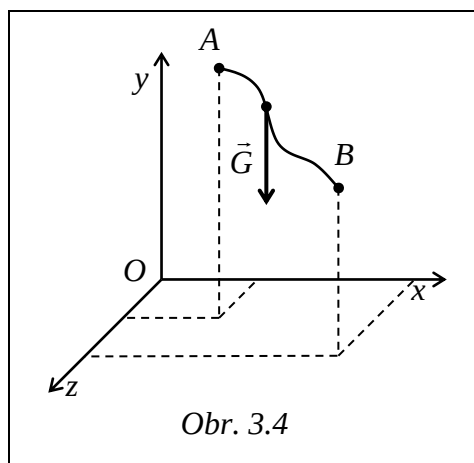
$$W = \int_{y_A}^{y_B} -mg dy = [-mgy]_{y_A}^{y_B} = mg(y_A - y_B)$$

Vidíme, že velikost vykonané práce silou $\vec{G}$ nezávisí na tvaru trajektorie mezi body A a B, ale závisí jen na poloze výchozího a koncového bodu. Přitom práce působící síly obecně závisí na tvaru a délce dráhy. Existují tedy síly, které nazýváme **konzervativní**, pro něž platí, že **velikost práce jimi vykonaná nezávisí na tvaru trajektorie, ale pouze na poloze výchozího a koncového bodu** (příklady – síla tíhová, gravitační, elastická, elektrostická, apod.). To znamená, že práci konzervativní síly je možno vyjádřit přírůstkem funkce závislé jen na prostorových souřadnicích. Tuto funkci nazveme potenciální energií (viz vztah 3.5).

Práce konzervativních sil po uzavřené křivce se rovná nule ($\oint \vec{F} d\vec{r} = 0$).

Síly, jejichž práce závisí nejen na poloze počátečního a koncového bodu, ale také na tvaru dráhy, nazýváme disipativní (příklady – tření, odpor prostředí apod.).

Pro nekonzervativní síly platí $\oint \vec{F} d\vec{r} \neq 0$ a pro disipativní síly platí $\oint \vec{F} d\vec{r} < 0$.



Obr. 3.4

3.2. Výkon, účinnost

V předchozí části jsme uvažovali konání práce při posunutí či zvednutí bedny nebo při jejím rozřezání. Budou-li dvě osoby posunovat či zvedat bednu stejně velkou silou po stejně dlouhé dráze nebo ji řezat, obě vykonají stejně velkou práci při posunutí, zvednutí či řezání. Avšak jedna osoba ji může vykonat v kratším časovém intervalu než druhá.

Zavádí se skalární fyzikální veličina **výkon**, která charakterizuje *rychlost konání práce*.

Střední (průměrný) výkon je definován

$$P_s = \frac{\Delta W}{\Delta t} ,$$

kde ΔW je práce vykonaná v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$, $\Delta t = t_2 - t_1$.

Okamžitý výkon je definován

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (3.4)$$

$$[P] = \text{J} \cdot \text{s}^{-1} = \text{W}$$

Číselně udává výkon práci vykonanou za časovou jednotku, pokud se výkon v tomto časovém intervalu nemění. Jednotkou výkonu je **watt (W)**.

Jestliže se práce v závislosti na čase koná rovnoměrně, tzn. že v libovolných avšak stejně dlouhých časových intervalech je přírůstek práce stejný, můžeme psát

$$P = \frac{W}{t} = \text{konst.}$$

Pohybuje-li se hmotný bod působením síly $\vec{F}$ v daném čase t rychlostí $\vec{v}$ v uvažované vztažné soustavě, pak můžeme výkon také vyjádřit

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v}$$
$$P = \vec{F} \vec{v}$$

Pro stroje, vykonávající konkrétní pracovní činnost zavádíme v souvislosti s výkonem také pojem **účinnosti** η . Vlivem ztrát, které jsou způsobeny různými odpory proti pohybu, je výkon každého stroje vždy menší, než tzv. **příkon** P_o , tj. energie, dodaná stroji za časovou jednotku.

Účinnost η stroje je definována jako poměr výkonu P stroje a potřebného příkonu P_o

$$\eta = \frac{P}{P_o}$$

Protože žádný stroj nepracuje beze ztrát, je vždy $\eta < 1$ ($\eta = 1$ platí pro ideální stroj). Účinnost je veličina bezrozměrná, ale obvykle se vyjadřuje v procentech

$$\eta = \frac{P}{P_o} \cdot 100 [\%]$$

3.3. Mechanická energie

Řada poznatků ukazuje na to, že je možné charakterizovat stav tělesa nebo soustavy parametrem jediným – souhrnným (který však nenahrazuje ostatní stavové parametry). Exis-

tuje fyzikální veličina, jejíž změna určuje práci tělesu či soustavě dodanou, a tato skalární fyzikální veličina se nazývá **energie**.

V kapitole 4. str. 61 jsou zavedeny pojmy vnitřní a vnější síly pro soustavu hmotných bodů. Jestliže budeme uvažovat, že na určitý bod v soustavě hmotných bodů působí vnitřní síla $\vec{F}_{int}$ (konzervativní) a vnější síla $\vec{F}_{ext}$, pak výsledná síla působící na tento hmotný bod je tedy

$$\vec{F} = \vec{F}_{int} + \vec{F}_{ext}.$$

Z toho plyne

$$\vec{F}_{ext} = \vec{F} - \vec{F}_{int}$$

Jestliže tuto rovnici násobíme skalárně vektorem $d\vec{r}$ a integrujeme, dostaneme

$$\underbrace{\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r}}_{\Delta E} = \underbrace{\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{\Delta E_k} + \underbrace{\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F}_{int} \cdot d\vec{r}}_{\Delta E_p} \quad (3.5)$$

(zavádíme v poli konzervativních sil)

Integrál na levé straně (3.5) představuje přírůstek mechanické energie hmotného bodu. První integrál na pravé straně (3.5) představuje přírůstek energie kinetické a druhý integrál přírůstek energie potenciální.

3.3.1. Kinetická energie

Obecně můžeme změnu kinetické energie definovat podle (3.5)

$$\Delta E_k = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Kinetická energie vyjadřuje energii hmotného bodu, který se pohybuje rychlostí v , a rovná se práci, kterou musí vykonat výslednice sil, působících na hmotný bod, aby hmotný bod byl uveden ze stavu klidu do daného pohybového stavu.

Uvažujeme hmotný bod, který se v důsledku působení celkové síly $\vec{F}$ se pohybuje po určité trajektorii rychlostí v (podstatně menší než je rychlost světla ve vakuu). V libovolném čase t se nachází v bodě $A(x, y, z)$ této trajektorie a po uplynutí času dt v bodě $B(x + dx, y + dy, z + dz)$. Za dobu dt urazil elementární dráhu ds , přičemž došlo ke změně polohového vektoru hmotného bodu o $d\vec{r}$ (orientovaná úsečka $\overline{AB}$). Pohybová rovnice hmotného bodu má tvar (viz. str. 34)

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a} \quad m = konst. \quad (3.6)$$

Jestliže souřadnice síly $\vec{F}$ označíme F_x, F_y, F_z , okamžité rychlosti $\vec{v}$ pak v_x, v_y, v_z a vektor $d\vec{r}$ má souřadnice dx, dy, dz (plyne z obr. 3.6), můžeme rovnici (3.1) rozepsat pomocí souřadnic

$$\begin{aligned}\frac{d(mv_x)}{dt} &= F_x & /.dx \\ \frac{d(mv_y)}{dt} &= F_y & /.dy \\ \frac{d(mv_z)}{dt} &= F_z & /.dz\end{aligned} \quad (3.7)$$

Provedeme-li naznačené násobení rovnic (3.7) a pravé a levé strany rovnic sečteme, dostaneme

$$m\left(\frac{dv_x}{dt}dx + \frac{dv_y}{dt}dy + \frac{dv_z}{dt}dz\right) = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (3.8)$$

Úpravou levé strany rovnice (aplikace komutativního zákona pro násobení a pravidla pro výpočet diferenciálu) obdržíme

$$\begin{aligned}m\left(\frac{dx}{dt}dv_x + \frac{dy}{dt}dv_y + \frac{dz}{dt}dv_z\right) &= m(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z) = \\ &= md\left(\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2}\right) = md\left(\frac{v^2}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)\end{aligned}$$

Pravá strana rovnice (3.8) vyjadřuje skalární součin vektorů $\vec{F}$ a $d\vec{r}$. Platí tedy:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}d\vec{r} \quad (3.9)$$

Pravá strana rovnice, vyjadřující práci výslednice sil, je podle (3.5) rovna změně kinetické energie dE_k . Můžeme tedy psát

$$dE_k = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

Odtud

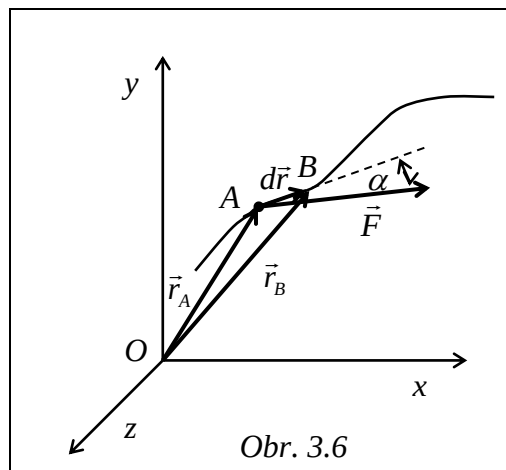
$$\Delta E_k = \int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{k2} - E_{k1}$$

V případě, že $E_{k1} = 0$, platí

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad [E_k] = J$$

Kinetická energie soustavy se může měnit působením vnitřních i vnějších sil a je rovna $\sum_i E_{ki}$.

Kinetická energie závisí na volbě souřadné soustavy. Při vzájemném silovém působení s jinými tělesy se kinetická energie uvažovaného hmotného bodu (tělesa) může zvětšovat (jeho rychlost roste) nebo zmenšovat.



Obr. 3.6

3.3.2. Potenciální energie

Podle vztahu (3.5) zavádíme potenciální energii tak, že

$$\Delta E_p = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{int} d\vec{r}$$

$$-\Delta E_p = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{int} d\vec{r}$$

(3.10)

Úbytek potenciální energie je roven práci konzervativních sil.

Při výpočtu potenciální energie volíme jeden z vektorů $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ tak, aby určoval polohu vztažného bodu, ve kterém je potenciální energie nulová.

Vzhledem k tomu, že vnitřní síly se vyskytují pouze v soustavě hmotných bodů (těles), má smysl mluvit pouze o potenciální energii soustavy nebo o potenciální energii v silovém poli vytvořeném jinými tělesy.

Výpočet potenciální energie ukážeme na dvou příkladech.

Příklad 1 : Výpočet potenciální energie hmotného bodu v homogenním tíhovém poli Země.

Tento příklad jsme řešili v kapitole 3.1., kde jsme počítali velikost práce vykonané tíhovou silou při přemístění hmotného bodu z bodu A do bodu B (viz obr. 3.4) v homogenním tíhovém poli Země. Velikost vykonané práce tíhovou silou $\vec{G}$ byla

$$W = m \cdot g(y_A - y_B)$$

Protože $\vec{G} = \vec{F}_{int}$, můžeme dle (3.10) psát

$$W = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) = mg(y_A - y_B). \quad (3.11)$$

Jestliže zvolíme $E_{pB} = 0$ pro $y_B = 0$, plyne z rovnice (3.11)

$$E_{pA} = mgy_A$$

Je třeba si uvědomit, že potenciální energie definovaná vztahem (3.10) vyjadřuje jen změnu E_p vzhledem ke vztažnému bodu, ve kterém $E_p = 0$ (v našem případě bod B), ne tedy hodnotu potenciální energie v daném bodě tíhového pole.

Příklad 2 : Výpočet potenciální energie hmotného bodu v poli pružné síly.

Na kuličku připevněnou k pružině, působí síla $\vec{F}_{int} = -kx\vec{i}$ (obr. 3.7). Podle (3.10)

$$-dE_p = -kx\vec{i} d\vec{r} = -kx\vec{i} dx\vec{i} = -kxdx. \quad (3.12)$$

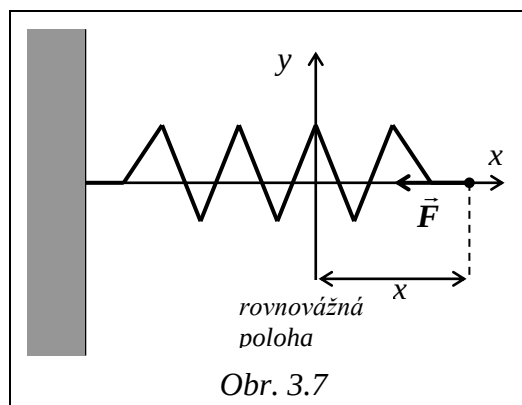
Potenciální energii dostaneme integrací (3.12)

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 + C$$

Jestliže zvolíme $E_p = 0$ pro $x = 0$, je $C = 0$ a

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

Potenciální energii můžeme zavést pouze v konzervativním silovém poli, kde práce nezávisí na tvaru dráhy. Jak víme z matematiky, integrál $W = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$ nezávisí



na integrační cestě tehdy a jen tehdy, je-li výraz za integrálem tzv. totálním (úplným) diferenciálem. Pro konzervativní síly tedy platí

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz \right)$$

a souřadnice konzervativní síly souvisí s potenciální energií vztahy

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}. \quad (3.12)$$

3.3.3. Zákon zachování mechanické energie

Mechanická energie má dvě formy, energii kinetickou a energii potenciální. Pro elementární přírůstek mechanické energie platí (3.5):

$$dE = dE_k + dE_p = d(E_k + E_p) \quad (3.13)$$

Jestliže budeme uvažovat soustavu hmotných bodů v konzervativním silovém poli ($\vec{F}_{ext} = \vec{0}$), pak elementární přírůstek mechanické energie soustavy $dE = 0$ a dále

$$d(E_k + E_p) = 0,$$

odtud

$$E_k + E_p = konst. \quad (3.14)$$

Vztah (3.14) vyjadřuje **zákon zachování mechanické energie**, který slovy vyjádříme:

Celková mechanická energie hmotného bodu, pohybujícího se v poli konzervativních sil, je podél celé trajektorie stálá (nemění se, zachovává se).

V případě, že na hmotný bod při jeho pohybu působí disipativní síly, zákon zachování mechanické energie pro tento pohyb neplatí. Dochází k částečné přeměně mechanické energie v jiné druhy energie, zejména v teplo.

Zákon zachování mechanické energie je pouze zvláštním případem **obecného zákona zachování energie**:

Úhrnná energie izolované soustavy hmotných bodů se při všech pohybech a dějích nemění, zachovává se.

Kontrolní otázky ke kapitole 3.

1. Napište a vysvětlete obecnou definici práce. Uveďte jednotku.
2. Jak se vypočítá práce síly $\vec{F} = \overrightarrow{konst.}$ po přímé dráze?
3. Diskutujte závislost vykonané práce na úhlu mezi vektorem síly a tečnou k trajektorii.
4. Vyjádřete definiční vztah pro práci pomocí souřadnic vektorů $\vec{F}$ a $d\vec{r}$.
5. Vysvětlete, co jsou konzervativní a disipativní síly.
6. Napište, jak je definován okamžitý a střední výkon. Uveďte jednotku.
7. Vyjádřete okamžitý výkon pomocí vektorů $\vec{F}$ (působící síla) a $\vec{v}$ (rychlost tělesa).
8. Definujte účinnost stroje.
9. Jak je definována celková mechanická energie tělesa?
10. Jak je definována kinetická energie hmotného bodu?
11. Napište a vysvětlete obecnou definici potenciální energie. Určete potenciální energii hmotného bodu v homogenním tíhovém poli.
12. Vyslovte zákon zachování mechanické energie. Uveďte příklady aplikace.
13. Jak se mění celková mechanická energie a její jednotlivé formy při pohybu tělesa v tíhovém poli Země, jestliže tření a odpor prostředí nepůsobí.