

#### 4. MECHANIKA SOUSTAVY HMOTNÝCH BODU.

Nemusí být vždy postačující nahradit pohyb reálného objektu pohybem jediného hmotného bodu, např. když bude objekt současně konat pohyb posuvný (translační) i otáčivý (rotační). Proto je výhodné vytvořit model daného objektu pomocí soustavy hmotných bodů. **Soustavou hmotných bodů rozumíme soubor  $n$  hmotných bodů, které tvoří určitý celek.**

Příkladem soustavy hmotných bodů mohou být: sluneční soustava, molekula, vlaková souprava, granát a jeho střepiny po výbuchu, vozičky spojené pružinou, tuhé těleso jako soubor pevně vázaných částic (atomů, molekul) apod.

##### 4.1 Základní charakteristiky a silové působení v soustavě hmotných bodů, první impulsová věta.

Uvažujme soustavu  $n$  hmotných bodů, jejichž hmotnosti jsou  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Celková hmotnost soustavy je pak

$$m = \sum_{i=1}^n m_i \quad . \quad (4.1)$$

Síly, které mohou působit na každý hmotný bod, můžeme rozdělit na dvě skupiny:

**Vnější (externí) síly**, které mají původ ve hmotách (tělesech) mimo soustavu.

**Vnitřní (interní) síly**, vyvolané vzájemným působením hmotných bodů soustavy.

Zvolme si libovolný  $i$ -tý bod soustavy. Označíme  $\vec{F}_{i,ext}$  výslednici vnějších sil a  $\vec{F}_{i,int}$  výslednici vnitřních sil na něj působících.

Pohybová rovnice  $i$ -tého hmotného bodu soustavy má pak tvar

$$\begin{aligned} m_i \vec{a}_i &= \vec{F}_{i,ext} + \vec{F}_{i,int} \\ \text{resp.} \quad \frac{d\vec{p}_i}{dt} &= \vec{F}_{i,ext} + \vec{F}_{i,int} \end{aligned} \quad (4.2)$$

kde  $\vec{a}_i$  je okamžité zrychlení tohoto bodu a  $\vec{p}_i = m_i \cdot \vec{v}_i$  jeho hybnost. Pro každý z  $n$  hmotných bodů soustavy můžeme napsat pohybovou rovnici stejného tvaru. Provedeme-li součet levých a pravých stran těchto rovnic dostáváme

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_{i,ext} + \vec{F}_{i,int}) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,ext} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,int}$$

Upravíme levou stranu rovnice

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n) = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

kde  $\vec{p}$  je vektor celkové hybnosti soustavy, pro který platí

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i.$$

Postupně upravíme pravou stranu rovnice:

a)  $\sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,ext} = \vec{F}_{ext}$ , kde  $\vec{F}_{ext}$  je výslednice všech vnějších sil působících na soustavu hmotných bodů.

b) Jestliže

$$\vec{F}_{i,int} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_{i,k} \quad (\text{mimo } k=i, \text{ sám na sebe nepůsobí}), \quad (4.3)$$

kde  $\vec{F}_{i,k}$  je vnitřní síla, kterou  $k$ -tý hmotný bod působí na  $i$ -tý, pak můžeme psát

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,int} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \vec{F}_{i,k} = \vec{0} \quad (4.4)$$

Vektorový součet vnitřních sil soustavy je roven nulovému vektoru. Je-li totiž  $\vec{F}_{i,k}$  síla, kterou působí  $k$ -tý bod na  $i$ -tý, musí na základě třetího Newtonova pohybového zákona - akce a reakce – působit  $i$ -tý bod na  $k$ -tý silou  $\vec{F}_{k,i}$ , přičemž platí  $\vec{F}_{i,k} = -\vec{F}_{k,i}$  a v rámci soustavy  $\vec{F}_{i,k} + \vec{F}_{k,i} = \vec{0}$ . Všechny vnitřní síly tvoří dvojice, jejichž účinky se v soustavě vzájemně ruší.

Tak docházíme k **první větě impulsové**

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{ext}} \quad (4.5)$$

**Časová změna celkové hybnosti soustavy hmotných bodů je rovna výsledné vnější síle, na soustavu působící.**

Jestliže  $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ , plyne z rovnice (4.5)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = \text{konst.}} \quad (4.6)$$

Rovnice (4.6) vyjadřuje **zákon zachování hybnosti pro soustavu hmotných bodů**.

**Celková hybnost soustavy hmotných bodů, na kterou nepůsobí vnější síly nebo jejich výslednice je nulový vektor, zachovává stálý orientovaný směr i velikost.**

*Příklady na aplikaci vztahu (4.6):*

1. Střelné zbraně – při výstřelu vyletí střela o hmotnosti  $m_1$  rychlostí  $v_1$  a tím udělí zpětným nárazem zbrani o hmotnosti  $m_2$  rychlost  $v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2}$ .
2. Raketa, jejíž pohyb je způsoben spaliny unikajícími velkou rychlostí dozadu. Protože však raketa neustále zmenšuje svoji hmotnost, je její pohyb složitější a my si tento případ podrobněji probereme v části 4.2.

#### 4.2. Pohyb soustavy s proměnnou hmotností.

Předpokládejme, že celková hmotnost soustavy hmotných bodů se při pohybu mění (ne relativisticky, neboť  $v \ll c$ ) tím, že se od ní hmotné body oddělují nebo se k ní připojují (např. letící raketa, z níž proudí velkou rychlostí zplodiny při hoření paliva, které je částí rakety; padající kapka vody v nasycené páře – zvětšuje se její hmotnost srážením páry na jejím povrchu).

Vzhledem k inerciální vztažné soustavě  $S$  se pohybují těleso o hmotnosti  $m$  rychlostí  $\vec{v}$  a částice s hmotností  $dm$  rychlostí  $\vec{w}$ . Těleso a částice tvoří soustavu, jejíž celková hybnost je  $\vec{p} = m\vec{v} + \vec{w}dm$ . Když dopadne v určitém časovém okamžiku  $t$  částice na těleso a spojí se s ním, změní se rychlost tělesa v časovém intervalu  $\langle t, t + dt \rangle$  o  $d\vec{v}$  a jeho hybnost bude v čase  $t + dt$

$$\vec{p}_1 = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}).$$

Podle první impulsové věty je časová změna celkové hybnosti soustavy rovna výsledné vnější síle (4.5)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}}{dt} = \frac{1}{dt} [(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - (m\vec{v} + \vec{w}dm)] = \vec{F}$$

Za předpokladu, že  $dmd\vec{v} \rightarrow 0$ , můžeme psát

$$\frac{1}{dt} [m d\vec{v} + (\vec{v} - \vec{w}) dm] = \vec{F} \quad (4.7)$$

Rychlost částice vzhledem k pozorovateli v soustavě spojené s pohybujícím se tělesem bude  $\vec{u}$ . Tzn., že na základě vztahu pro skládání rychlostí v klasické mechanice (2.41) musí platit  $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$ . Dosazením do (4.7) a po úpravě dostáváme

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u} \frac{dm}{dt}, \quad (4.8)$$

což je **pohybová rovnice soustavy s proměnnou hmotností**.

Síla  $\vec{F}$  je výsledná vnější síla působící na soustavu. Člen  $\vec{u} \frac{dm}{dt}$  má charakter vnitřní síly soustavy, vyjadřuje silové působení uvnitř soustavy při připojení či odpojení částice,  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  vyjadřuje zrychlení tělesa vzhledem k inerciální soustavě S.

Pro  $\vec{F} = \vec{0}$  (izolovaná soustava – nastává v případě, že zanedbáváme pro zjednodušení řešení odpor prostředí, vliv tíhového pole, apod.) a  $\vec{u} \neq \vec{0}$  vyplývá z rovnice (4.8) pro okamžité zrychlení tělesa

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{u}}{m} \frac{dm}{dt} \quad (4.9)$$

Na obr. 4.1, jsou zobrazeny čtyři různé případy, při nichž mohou vzniknout nerovnoměrné pohyby tělesa (soustavy) s proměnnou hmotností (pro zjednodušení náčrtu  $\vec{u}$  je rovnoběžná s  $\vec{v}$ ). Na obr. 4.1 a) je uveden příklad zrychlování tělesa při zvětšování jeho hmotnosti ( $dm > 0$ ) nebo zmenšování ( $dm < 0$ ) a na obr. 4.1 b) dva případy brzdění tělesa.

Jeden z těchto čtyř případů si probereme podrobněji a to **pohyb letící rakety**. Letící raketa zmenšuje svoji hmotnost, protože z motoru uniká shořelé palivo rychlostí  $\vec{u}$  proti směru pohybu rakety (v případě jejího zrychlování). Je-li časová změna hmotnosti rakety stálá ( $\frac{dm}{dt} = \text{konst.}$ ), pak podle (4.9) zrychlení rakety roste (dokud se nespoteřebuje palivo), protože je nepřímo úměrné postupně zmenšující se hmotnosti  $m$  rakety. Upravíme rovnici (4.9) na tvar

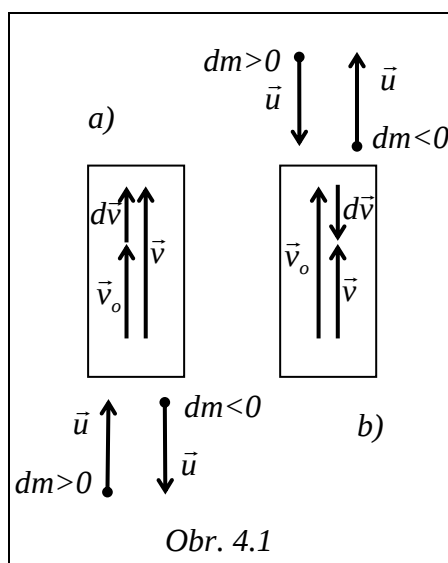
$$d\vec{v} = \vec{u} \frac{dm}{m}. \quad (4.10)$$

Integrací rovnice (4.10) v mezích od hmotnosti  $m_0$ , což je hmotnost rakety s palivem při rychlosti  $\vec{v}_0$ , do  $m < m_0$ , což je hmotnost rakety s palivem při rychlosti  $\vec{v}$ , dostaneme

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{u} \ln \frac{m}{m_0}$$

a po úpravě

$$\Delta \vec{v} = -\vec{u} \ln \frac{m_0}{m},$$



Obr. 4.1

což je **základní rovnice pohybu rakety** ( pro vzduchoprázdňý prostor bez tíhových sil ), tzv. **Ciolkovského rovnice**.

Je-li  $m_o$  počáteční hmotnost rakety s palivem a  $m$  konečná po spálení paliva, pak poměr hmotnosti paliva ke konečné hmotnosti

$$\frac{m_o - m}{m} = C$$

se nazývá **Ciolkovského číslo**. Maximální rychlost rakety, jejíž počáteční rychlost je nulová, se vypočítá

$$v = |u| \ln(1 + C).$$

Nejvýhodnější se jeví dosažení maximální rychlosti rakety zvětšením výtokové rychlosti spalín  $\vec{u}$ , ale také složením rakety z několika stupňů ( každý stupeň má vlastní pohonnou jednotku ).

#### 4.3. Hmotný střed ( těžiště ) soustavy hmotných bodů.

V rovnici ( 4.2 )  $\vec{F}_{ext}$  vyjadřuje výslednici všech vnějších sil na soustavu působících. Kde bude působíště této síly? Zdá se logické, nahradit celou soustavu hmotných bodů jediným hmotným bodem, tzv. hmotným středem ( těžištěm ). Tento pojem zavedl již Archimédes.

Provedeme odvození rovnic pro výpočet souřadnic hmotného středu ( těžiště ) soustavy hmotných bodů. Začneme nejjednodušším případem, tj. soustavou dvou hmotných bodů o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$  ( viz obr. 4.2 ). Hmotný střed  $T$  dvou hmotných bodů  $A$  a  $B$  je definován jako bod, který dělí spojnici bodů  $A$ ,  $B$  v obráceném poměru hmotností.

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \overline{AT}m_1 = \overline{TB}m_2$$

Pro pravoúhlý průmět úsečky  $AB$  do roviny  $xz$  opět platí

$$\overline{A'T'}m_1 = \overline{T'B'}m_2$$

nebo, pokud použijeme souřadnice bodů,

$$\begin{aligned} A(x_1, y_1, z_1), \quad B(x_2, y_2, z_2), \quad T(x_T, y_T, z_T) \\ (x_T - x_1)m_1 = (x_2 - x_T)m_2. \end{aligned}$$

Odtud

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

obdobně

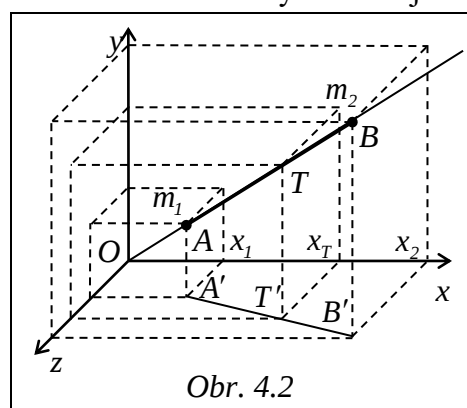
$$y_T = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \quad z_T = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}.$$

Stejně bychom mohli provést odvození pro soustavu tří hmotných bodů ( obr. 4.3 ). V těžišti  $T'$  je soustředěna hmotnost  $(m_1 + m_2)$  a třetí hmotný bod má hmotnost  $m_3$ .

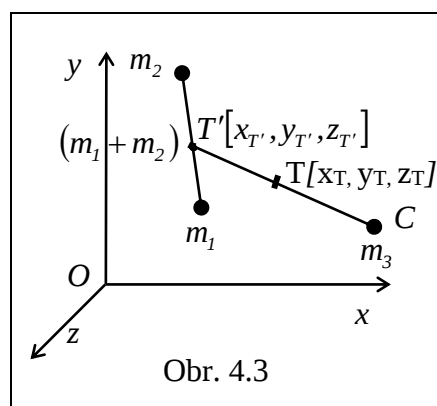
Platí:

$$\overline{T'T}(m_1 + m_2) = \overline{TC}m_3$$

$$x_T = \frac{(m_1 + m_2)x_{T'} + m_3 x_3}{(m_1 + m_2) + m_3} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$



Obr. 4.2



Obr. 4.3

$$y_T = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \quad z_T = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Výsledek lze zobecnit pro souřadnice hmotného středu  $T(x_T, y_T, z_T)$  soustavy  $n$  hmotných bodů

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_T = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z_T = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (4.11)$$

nebo pomocí polohového vektoru  $\vec{r}_T$  hmotného středu  $T$  soustavy  $n$  hmotných bodů

$$\vec{r}_T = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad (4.12)$$

kde  $\vec{r}_i$  je polohový vektor  $i$ -tého hmotného bodu soustavy.

V případě spojitého rozložení hmoty přechází rovnice (4.11) a (4.12) na tvar

$$x_T = \frac{1}{m} \int x dm, \quad y_T = \frac{1}{m} \int y dm, \quad z_T = \frac{1}{m} \int z dm$$

resp. 
$$\vec{r}_T = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm,$$

kde  $m$  je celková hmotnost soustavy  $n$  hmotných bodů [ viz (4.1) ],  $dm = \rho dV$  je hmotnost elementu o objemu  $dV$  a  $\rho$  je hustota.

Pro soustavu hmotných bodů platí první impulsová věta. Postupně upravujeme levou stranu rovnice (4.5)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \vec{p}_i \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \vec{v}_i \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i \right).$$

Použitím vztahů (4.5) a (4.1) pokračujeme dále

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} m \vec{r}_T \right) = m \frac{d^2 \vec{r}_T}{dt^2}.$$

Tedy

$$m \frac{d^2 \vec{r}_T}{dt^2} = \vec{F}_{ext} \quad (4.13)$$

To je ovšem pohybová rovnice pro jediný hmotný bod, jehož hmotnost  $m$  je celková hmotnost soustavy a jehož polohový vektor  $\vec{r}_T$  je polohový vektor hmotného středu soustavy a na nějž působí všechny vnější síly.

Tak docházíme k větě o pohybu hmotného středu (těžiště):

**Hmotný střed (těžiště) soustavy hmotných bodů se pohybuje jako hmotný bod, ve kterém je soustředěna celá hmotnost soustavy a do kterého jsou přeneseny všechny vnější síly.**

V případě, že  $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ , pak z rovnice (4.13) plyne

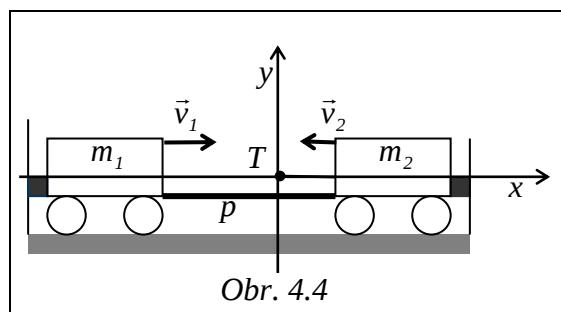
$$\frac{d^2 \vec{r}_T}{dt^2} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{r}_T}{dt} = \vec{v}_T = \overrightarrow{\text{konst}}} \quad (4.14)$$

Rovnice ( 4.14 ) je matematickým vyjádřením věty o zachování pohybu hmotného středu ( těžiště ) soustavy:

**Hmotný střed ( těžiště ) soustavy hmotných bodů, která nepodléhá vnějším silám, se pohybuje rovnoměrně přímočaře nebo je v klidu.**

*Příklady použití věty o zachování pohybu těžiště:*

- 1) Pro naši sluneční soustavu, když ji budeme považovat za izolovanou, platí zákon zachování hybnosti i věta o zachování pohybu hmotného středu, tzn. že hmotný střed sluneční soustavy ( který je blízko středu Slunce ) se pohybuje ( vzhledem k soustavě stálic ) rovnoměrně přímočaře.
- 2) Mezi dvěma vozíčky o hmotnostech  $m_1, m_2$ , které jsou u stěn přichyceny elektromagnety, je natažena pružina  $p$ . Po současném uvolnění obou vozíčků pružina odpadne a vozíčky se začnou pohybovat rychlostmi  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  ( obr. 4.4 ). Předpokládejme, že na počátku pohybu bylo těžiště této soustavy v počátku souřadnic, tedy pro  $x$ -ovou souřadnici těžiště platilo podle ( 4.11 )



Obr. 4.4

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 0,$$

kde  $x_1, x_2$  jsou souřadnice těžišť vozíčků. Jaká bude souřadnice  $x_{T1}$  těžiště této soustavy po uplynutí času  $t$  od začátku pohybu vozíčků? Vozíčky urazí dráhy  $s_1 = v_1 t, s_2 = v_2 t$ , poloha těžiště bude určena vztahem

$$x_{T1} = \frac{m_1(x_1 - v_1 t) + m_2(x_2 - v_2 t)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} - \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)t}{m_1 + m_2}$$

První člen podle předpokladu se rovná nule a v čitateli druhého aplikujeme zákon zachování hybnosti pro naši soustavu  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$ , takže platí  $x_{T1} = 0$ , což znamená, že poloha těžiště  $T$  soustavy dvou vozíčků se nemění, těžiště je v klidu.

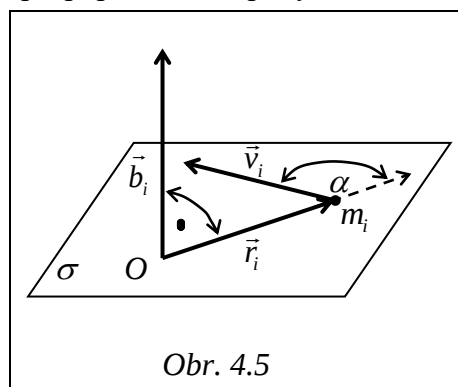
#### 4.4. Druhá impulsová věta.

Koná-li soustava hmotných bodů otáčivý ( rotační ) pohyb, pak nevystačíme s fyzikálními veličinami doposud v této kapitole definovanými při popisu tohoto pohybu.

Pohybová rovnice  $i$ -tého bodu soustavy hmotných bodů má tvar ( 4.2 ). Zvolme libovolný vztažný bod  $O$ . Poloha  $i$ -tého bodu soustavy je určena polohovým vektorem  $\vec{r}_i$  ( viz obr. 4.5 ). Násobme rovnici ( 4.2 ) vektorově zleva vektorem  $\vec{r}_i$

$$\vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,ext} + \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,int} \quad (4.15)$$

Pro popis rotačního pohybu hmotného bodu nestačí jen vektor hybnosti  $\vec{p}$ . Zavádíme další fyzikální veličinu tzv. **moment hybnosti ( točivost )**  $\vec{b}_i$   $i$ -tého bodu sou-



Obr. 4.5

stavy vzhledem k bodu  $O$ , která **vyjadřuje míru otáčivého pohybu**  $i$ -té částice. Platí

$$\vec{b}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (4.17)$$

Z obr. 4.5 je patrné, že vektor  $\vec{b}_i \perp \sigma \equiv \vec{r}_i, \vec{p}_i$ . Jeho velikost je  $b_i = r_i \cdot p_i \cdot \sin \alpha$ , kde  $r_i$  a  $p_i$  jsou velikosti vektorů  $\vec{r}_i, \vec{p}_i$  a  $\alpha$  je úhel sevřený vektory  $\vec{r}_i, \vec{v}_i$ . Moment hybnosti má jednotku  $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

Derivací momentu hybnosti  $i$ -tého bodu podle ( 4.9 ) obdržíme

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt},$$

neboť

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i = \vec{v}_i \times (m_i \vec{v}_i) = \vec{0},$$

protože oba vektory mají též směr ( jsou rovnoběžné,  $\sin 0^\circ = 0$  ).

Levá strana rovnice ( 4.15 ) má tedy tvar

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) \quad (4.16)$$

První člen pravé strany rovnice ( 4.15 ) definuje moment vnější síly, působící na  $i$ -tý bod, vzhledem k vztažnému bodu  $O$ :

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,ext}$$

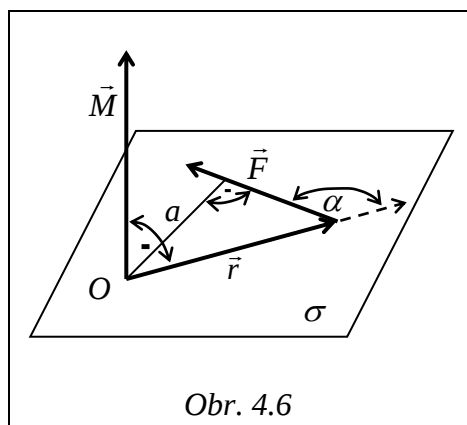
**Moment síly  $\vec{M}$  je mírou otáčivého účinku síly** vzhledem k libovolnému vztažnému bodu  $O$ . Je definován

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (4.18)$$

Vektor  $\vec{M}$  je kolmý k rovině  $\sigma$ , která je jednoznačně určena vektory  $\vec{r}$  a  $\vec{F}$  ( viz obr. 4.6 ). Jeho orientace je určena pravidlem určujícím orientaci vektoru, který je výsledkem vektorového součinu [ viz kap. 1., str. 11 ]. Velikost vektoru momentu síly je dána

$$M = Fr \sin \alpha,$$

kde  $r$  a  $F$  jsou velikosti vektorů  $\vec{r}, \vec{F}$  a  $\alpha$  je úhel jimi sevřený. Někdy se také velikost  $\vec{M}$  definuje  $M = Fa$ , kde  $a$  je tzv. rameno síly (  $a = r \sin \alpha$  ), což je kolmá vzdálenost vektorové přímky síly od bodu  $O$  ( viz obr. 4.6 ).



Obr. 4.6

Jestliže síla  $\vec{F}$  je výslednicí několika sil  $\vec{F}_i$ , pak moment výsledné síly  $\vec{F}$  je roven vektorovému součtu momentů jednotlivých složek  $\vec{F}_i$ .

Rovnici ( 4.15 ) můžeme tedy psát [ použijeme vztah ( 4.3 ) ]

$$\frac{d\vec{b}_i}{dt} = \vec{M}_i + \sum_k (\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,k}) \quad (4.19)$$

Rovnice ( 4.19 ) sečteme pro všechny body soustavy. Obdržíme

$$\sum_i \frac{d\vec{b}_i}{dt} = \sum_i \vec{M}_i + \sum_i \sum_k (\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,k}) \quad (4.20)$$

Dále platí

$$\sum_i \frac{d\vec{b}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{b}_i = \frac{d\vec{b}}{dt},$$

kde

$$\vec{b} = \sum_i \vec{b}_i$$

je **celkový moment hybnosti** celé soustavy. Obdobně je

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i$$

**celkový moment vnějších sil** na soustavu působících.

Ve dvojitém součtu na pravé straně rovnice ( 4.20 ) se vyskytují členy ve dvojicích

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,k} + \vec{r}_k \times \vec{F}_{k,i} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,k} - \vec{r}_k \times \vec{F}_{i,k} = (\vec{r}_i - \vec{r}_k) \times \vec{F}_{i,k} = \vec{r}_{i,k} \times \vec{F}_{i,k},$$

kde vektor  $\vec{r}_{i,k} = \vec{r}_i - \vec{r}_k$  má směr spojnice bodu i-tého a k-tého ( obr. 4.7 ).

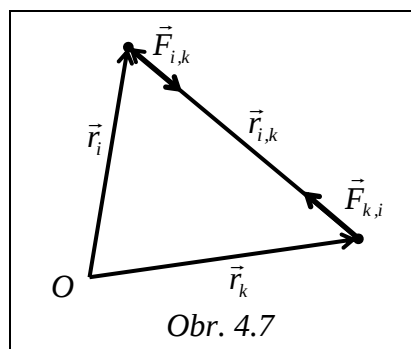
Budeme předpokládat, že vnitřní síly vzájemného působení dvou bodů jsou centrální, takže mají směr spojnice obou bodů. Pak platí

$$\vec{r}_{i,k} \times \vec{F}_{i,k} = \vec{0},$$

tzn., že vnitřní síly opět vypadnou z rovnice [ srovnej ( 4.4 )]

Z rovnice ( 4.20 ) po všech popsanych úpravách obdržíme

$$\boxed{\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{M}} \quad ( 4.21 )$$



To je matematické vyjádření druhé věty impulsové. Slovně ji můžeme vyjádřit:

**Časová změna celkového momentu hybnosti soustavy hmotných bodů vzhledem k bodu O je rovna celkovému momentu vnějších sil na soustavu působících vzhledem k bodu O.**

V případě, že  $\vec{M} = \vec{0}$ , plyne z rovnice ( 4.21 )

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{0}$$

a tedy

$$\boxed{\vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \dots + \vec{b}_n = \overrightarrow{\text{konst.}}}$$

To je **zákon zachování momentu hybnosti**:

**Celkový moment hybnosti soustavy zachovává svoji velikost, směr i orientaci, jestliže celkový moment vnějších sil na ni působících je nulový vektor.**

Podmínka  $\vec{M} = \vec{0}$  je splněna, když  $\vec{r}$  a  $\vec{F}_{ext}$  jsou rovnoběžné nebo  $\vec{r} = \vec{0}$ . Ale v případě, že  $\vec{F}_{ext} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$  může být celkový moment vnějších sil na soustavu působících

$\vec{M} \neq \vec{0}$ . Typickým příkladem je působení tzv. dvojice sil, tj. dvou rovnoběžných sil stejné velikých, opačně orientovaných, které neleží v jedné přímce.

S důsledky zákona zachování momentu hybnosti se seznámíme podrobněji v 5. kapitole, části 5.4, odstavci *Setrvačníky* ( především u volných setrvačnicků a jejich praktických využití ).

#### Kontrolní otázky ke kapitole 4.

1. Uveďte základní charakteristiky soustavy hmotných bodů.
2. Napište ( příp. odvoďte ) a vyslovte 1. impulsovou větu pro soustavu hmotných bodů.
3. Vyslovte zákon zachování hybnosti soustavy hmotných bodů.
4. Napište pohybovou rovnici soustavy hmotných bodů s proměnnou hmotností a proveďte diskusi této rovnice.
5. Ukažte, jak z pohybové rovnice soustavy s proměnnou hmotností získáme Ciolkovského rovnici pohybu rakety.
6. Vysvětlete pojem hmotný střed soustavy hmotných bodů.
7. Jak se vypočítá poloha hmotného středu v případě spojitého rozložení hmoty?
8. Vyslovte větu o pohybu hmotného středu soustavy hmotných bodů. Uveďte příklady použití.
9. Může být hybnost pohybujícího se tělesa nulová?
10. Definujte fyzikální veličiny moment síly a moment hybnosti.
11. Napište a vyslovte 2. impulsovou větu.
12. Ukažte, jak z 2. impulsové věty plyne zákon zachování momentu hybnosti.