

## 5. MECHANIKA TUHÉHO TĚLESA

Doposud jsme se zabývali pohybem těles, která bylo možno považovat za hmotný bod, nebo pohybem soustavy hmotných bodů. Tento druhý případ (pohyb soustavy hmotných bodů) vede při definování vlastností soustavy hmotných bodů k popisu pohybu **dokonalé tuhé tělesa** nebo krátce **tuhého tělesa**.

**Tuhé těleso** je soustava hmotných bodů, které jsou spolu vázány takovými silami, že se vzájemné vzdálenosti bodů nemění při působení vnějších sil, fyzikálních polí, vlivem změny teploty atd. Jinými slovy, tuhé těleso zachovává svůj tvar, není deformovatelné. Je-li uvedeno do pohybu, pohybuje se jako neměnný celek. Tuhé těleso je idealizované těleso.

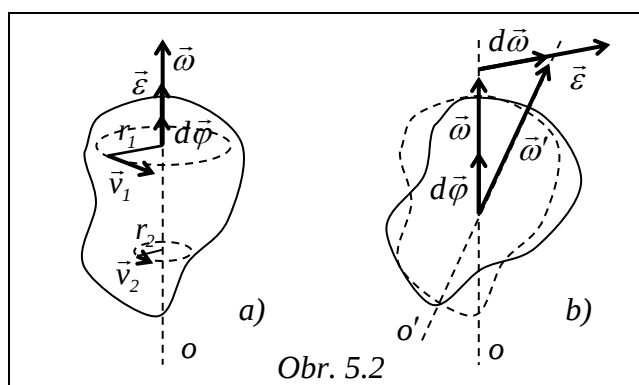
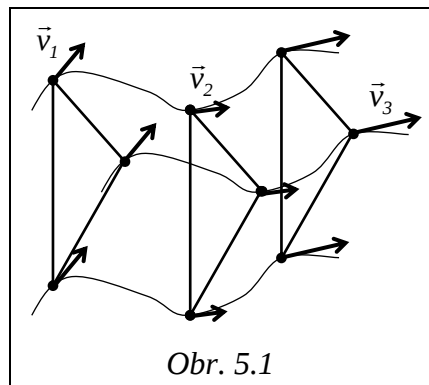
Jestliže upevníme tuhé těleso v jeho třech bodech, které neleží v přímce (tvoří trojúhelník), pak těleso nemá možnost se pohybovat. Jeho poloha v prostoru je tedy jednoznačně určena polohou těchto tří bodů. Každý z těchto bodů má tři souřadnice ve zvolené vztahné soustavě, tzn. že máme celkem devět čísel. Protože však tyto tři body musí se nacházet v rámci tuhé tělesa (nelze je umístit kamkoli do prostoru), existují mezi devíti souřadnicemi tři vztahy (vyjadřující stálost délek stran trojúhelníka). K určení polohy tuhé tělesa, které není omezeno žádnými dalšími podmínkami, tedy stačí šest nezávislých veličin, a proto mu přisuzujeme šest **stupňů volnosti** (Stupně volnosti se nazývají nezávislé veličiny, které určují polohu tělesa vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic.). Tuhé těleso upevněné v jednom bodě má jen tři stupně volnosti (souřadnice bodu upevnění jsou pevně určené), tuhé těleso upevněné ve dvou bodech má jen jeden stupeň volnosti (těleso se může jen otáčet kolem osy určené těmito dvěma body).

Obecný pohyb tuhé tělesa, jehož všechny body mají stálé vzájemné polohy, je jednoznačně určen pohybem jeho tří bodů, které neleží v jedné přímce. Lze ho rozložit na dva základní druhy pohybů: **pohyb posuvný (translační)** a **pohyb otáčivý (rotační)**.

Tuhé těleso koná **posuvný pohyb**, jestliže každá přímka a rovina pevně s ním spojená zůstává při tomto pohybu rovnoběžná se svou počáteční polohou. Všechny body tuhé tělesa opisují stejné trajektorie a mají v určitém okamžiku stejné rychlosti a stejná zrychlení co do velikosti i orientovaného směru (obr. 5.1). Posuvný pohyb tuhé tělesa je popsán pohybem kteréhokoli jeho bodu, obvykle volíme k popisu pohyb hmotného středu (těžiště) tělesa.

Tuhé těleso koná **otáčivý pohyb kolem pevné osy**, jestliže body na ose otáčení jsou v klidu a ostatní body tělesa opisují kružnice se středy na ose otáčení. Roviny těchto kružnic jsou kolmé na osu otáčení. V určitém okamžiku mají všechny body stejnou úhlovou rychlost a stejné úhlové zrychlení (kromě bodů ležících na ose). Obvodové rychlosti bodů závisí na jejich vzdálenosti od osy otáčení (obr. 5.2 a).

Je-li tuhé těleso upevněno v jednom bodě, může se otáčet kolem tohoto bodu. Každý bod tělesa se může pohybovat po kulové ploše se středem v pevném bodě. V tomto případě osa otáčení, která prochází pevným bodem  $O$ , nemá již pevnou polohu v prostoru, ale mění svůj směr. Mluvíme potom o **okamžité ose otáčení**. Vektor úhlové rychlosti  $\vec{\omega}$ , který leží



vždy v okamžité ose otáčení, mění tedy svoji polohu v prostoru. Přírůstek vektoru  $d\vec{\omega}$  nemá též směr a vektor úhlového zrychlení  $\vec{\varepsilon}$  tedy neleží v ose otáčení ( obr. 5.2 b ).

### 5.1. Skládání sil působících na tuhé těleso. Těžiště.

Skládat síly působící na hmotný bod znamenalo nalézt jejich výslednici, která má stejný pohybový účinek jako všechny síly dohromady.

Řešit skládání sil působících na tuhé těleso je složitější z těchto důvodů:

- jednotlivé síly mohou působit v různých bodech tělesa;
- je nutné určit nejen velikost a orientovaný směr výslednice, ale také její působíště;
- musí se přihlídnout k tomu, že síly mohou mít účinek posuvný i otáčivý.

Budeme postupně řešit jednotlivé případy, které mohou nastat.

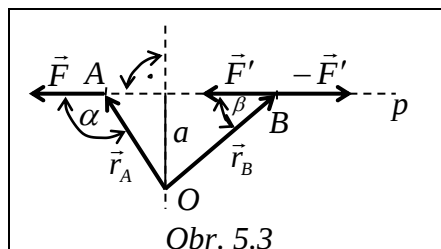
#### 1. Síly působící v jednom bodě.

V tomto případě postupujeme jako při sčítání vektorů působících v jednom bodě ( kapitola 1.2., str. 8, obr. 1.6 ).

#### 2. Síly působící v přímce.

Působí-li v téže přímce dvě stejně velké síly opačně orientované, pak se ruší. Jejich jediný možný účinek je protažení nebo zkrácení spojnice jejich působíšť a to je v tuhém tělese nemožné. Tohoto poznatku použijeme při důkazu věty:

*Působíště síly  $\vec{F}$  lze přenést do kteréhokoli bodu tuhého tělesa, který leží na vektorové přímce  $p$  síly  $\vec{F}$ .*



Obr. 5.3

*Sílu  $\vec{F}$  působící v bodě A chceme přenést do bodu B, který leží na vektorové přímce  $p$  této síly. Do bodu B umístíme dvě síly stejně velké a opačně orientované, pro které platí  $\vec{F} = \vec{F}'$  a  $|\vec{F}'| = |-\vec{F}'|$  ( obr. 5.3 ). Pak síly  $\vec{F}$  a  $-\vec{F}'$  se vzájemně ruší a v bodě B zůstane síla  $\vec{F}' = \vec{F}$ .*

Při takovém posunutí působíště se nezmění ani moment síly  $\vec{F}$  vzhledem k bodu O, neboť platí ( viz obr. 5.3 ):  $\vec{r}_A \times \vec{F} = \vec{r}_B \times \vec{F}'$ ,  $F r_A \sin \alpha = F' r_B \sin \beta = F a$ , kde  $a$  je kolmá vzdálenost vztažného bodu O od vektorové přímky  $p$  síly  $\vec{F}$ .

#### 3. Síly působící v rovině.

##### a) Síly různoběžné.

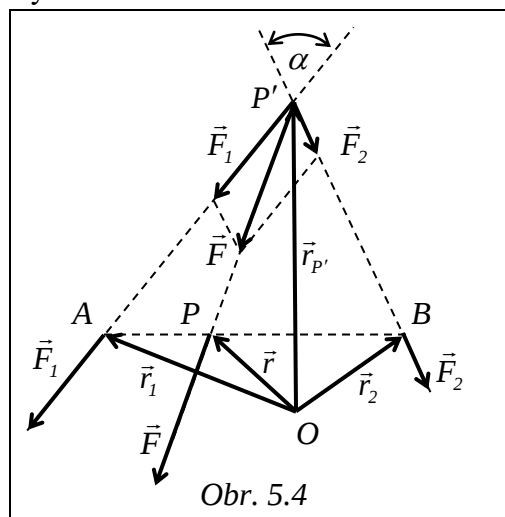
Síly různoběžné  $\vec{F}_1$  a  $\vec{F}_2$  přeneseme do průsečíku  $P'$  jejich vektorových přímk, kde je vektorově sečteme ( obr. 5.4 ). Pro velikost výslednice plyne ( podle kosinové věty )

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha,$$

kde  $\alpha$  je úhel sevřený vektorovými přímkami jednotlivých sil. Výslednici  $\vec{F}$  obvykle přenášíme do působíště  $P$  ležícího na spojnici působíšť A a B.

Pro dílčí síly a výslednici těchto sil platí momentová věta:

*Moment výslednice sil  $\vec{F}$  vzhledem k libovolnému bodu roviny určené silami  $\vec{F}_1$  a  $\vec{F}_2$  se rovná vektorovému součtu momentů sil  $\vec{F}_1$  a  $\vec{F}_2$  vzhledem k tomuto bodu.*



Obr. 5.4

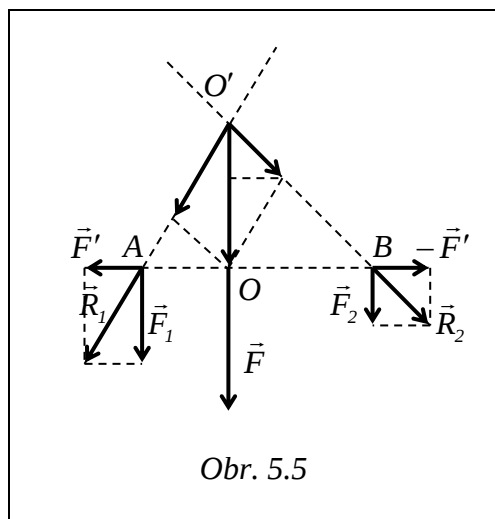
Podle obr. 5.4 můžeme tedy psát  $\vec{r}_A \times \vec{F}_1 = \vec{r}_{p'} \times \vec{F}_1$  a také  $\vec{r}_B \times \vec{F}_2 = \vec{r}_{p'} \times \vec{F}_2$ . Protože pro vektorový součin platí distributivní zákon, je

$$\vec{r}_{p'} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{p'} \times \vec{F}_2 = \vec{r}_{p'} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{r}_{p'} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

b) *Síly rovnoběžné.*

*α) souhlasně orientované.*

Skládání těchto sil převedeme na předchozí případ tím, že v působistích sil  $\vec{F}_1$  a  $\vec{F}_2$  připojíme dvě stejně velké opačně orientované síly  $\vec{F}'$  a  $-\vec{F}'$ , které se vzájemně ruší (obr. 5.5). Síly  $\vec{F}_1, \vec{F}'$  a  $\vec{F}_2, -\vec{F}'$  vektorově sečteme a jejich výslednice  $\vec{R}_1, \vec{R}_2$  přeneseme do průsečíku  $O'$  jejich vektorových přímk. Dále postupujeme stejně jako v bodě 3. a). Z konstrukce plyne pro výslednici  $\vec{F}$ , že je rovnoběžná s dílčími silami a má stejnou orientaci. Její velikost je  $F = F_1 + F_2$ . Z momentové věty lze odvodit, že pro polohu působistě  $O$  výslednice platí  $\overline{AO} : \overline{OB} = F_2 : F_1$ .



Obr. 5.5

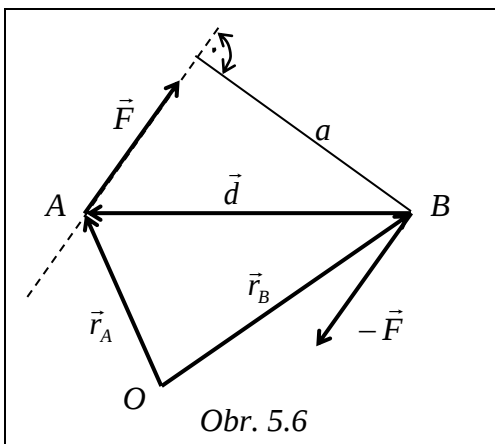
*β) nesouhlasně orientované.*

Postupujeme stejně jako v předchozím případě *α*). Pokud bychom zvolili opačnou orientaci u síly  $\vec{F}_2$ , pak by pro výslednici platilo: je rovnoběžná se silami  $\vec{F}_1$  a  $\vec{F}_2$  a má orientaci větší z nich ( $\vec{F}_1$ ), její velikost je  $F = F_1 - F_2$ , její působistě  $O$  leží vně spojnice  $AB$  na straně větší síly a opět z momentové věty plyne  $\overline{AO} : \overline{OB} = F_2 : F_1$ .

*γ) Dvojice sil.*

Při skládání dvou stejně velkých sil, stejného směru, ale opačné orientace, které nemají totožné vektorové přímky, nastává konstrukčně neřešitelný případ. Výslednicí je nulový vektor, jehož působistě by bylo v nekonečnu, ale součet momentů těchto sil je nenulový. Taková soustava dvou sil působících na tuhé těleso se nazývá **dvojice sil**.

Jestliže označíme  $\vec{r}_A$  polohový vektor síly  $\vec{F}$  vzhledem k počátku  $O$  soustavy souřadnic, pak moment této síly vzhledem k  $O$  je  $\vec{M}_A = \vec{r}_A \times \vec{F}$  (obr. 5.6). Obdobně moment síly  $-\vec{F}$  je  $\vec{M}_B = \vec{r}_B \times (-\vec{F})$ . Moment dvojice sil je pak



Obr. 5.6

$$\vec{M} = \vec{M}_A + \vec{M}_B = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}$$

Vektor  $\vec{d} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$  spojuje působistě obou sil a jeho orientaci volíme tak, aby směřoval k působistě té z obou sil, s níž vektorovým násobením v pořadí

$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F}$$

vytvoří **moment dvojice sil**. Snadno si ověříme, že ať zvolíme vztažný bod  $O$  kdekoli, tak vektory  $\vec{F}$  a  $\vec{d}$  se nezmění. To znamená, že u momentu dvojice sil nemusíme uvažovat o bodu, vůči kterému je počítán.

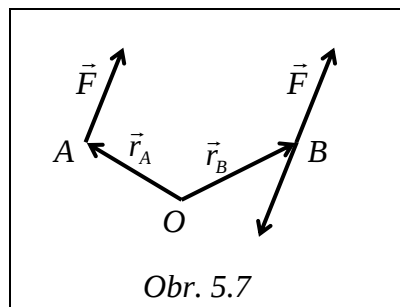
Velikost momentu dvojice sil lze vyjádřit

$$M = aF ,$$

kde  $a$  je kolmá vzdálenost vektorových přímkou obou sil ( obr. 5.6 ).

Pomocí dvojice sil lze řešit důležitou úlohu přenosu síly  $\vec{F}$  z působiště  $A$  do působiště  $B$ , které leží mimo vektorovou přímku síly  $\vec{F}$ . Aby se přenosem síly  $\vec{F}$  nezměnil její dynamický účinek na tuhé těleso ( tedy její moment  $\vec{M}_A$  ), je nutné k síle  $\vec{F}$  v bodě  $B$  přidat takovou dvojici sil o momentu  $\vec{M}$  ( obr. 5.7 ), aby platilo:

$$\vec{M} + \vec{M}_B = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F} + \vec{r}_B \times \vec{F} = \vec{r}_A \times \vec{F} = \vec{M}_A$$



#### 4. Síly působící v prostoru.

Předpokládejme, že v různých bodech tuhého tělesa působí síly  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ . Jejich pohybový účinek na těleso určíme tak, že zvolíme v tělese libovolný bod  $O$  ( redukční bod ), do kterého přeneseme všechny síly a vektorově je sečteme. Obdržíme výslednici

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Přenášíme-li však sílu  $\vec{F}_i$  do působiště ležícího mimo její vektorovou přímku, musíme přenos kompenzovat dvojicí sil, jejíž moment  $\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$  je rovný momentu síly vzhledem k bodu  $O$ . Výsledný moment se rovná vektorovému součtu všech těchto jednotlivých momentů

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i$$

Uvedené výsledky můžeme shrnout větou:

*Prostorovou soustavu sil, které působí na tuhé těleso v různých bodech, můžeme nahradit jedinou silou, která působí v libovolném předem zvoleném bodě, a jedinou dvojicí sil.*

#### 5. Těžiště tuhého tělesa.

Tíhové pole Země vzhledem k nepatrným rozměrům tělesa vůči poloměru Země lze považovat v místě, kde se těleso nachází, za homogenní.

Jestliže budeme tuhé těleso považovat za soustavu  $n$  hmotných bodů o hmotnostech  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , pak tíhové síly  $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \dots, \vec{G}_n$  působící na jednotlivé body tvoří soustavu rovnoběžných sil ( obr. 5.8 ). Podle předchozích odstavců určíme výslednici těchto sil

$$\vec{G} = \sum_{i=1}^n \vec{G}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{g} = \vec{g} \sum_{i=1}^n m_i = m \vec{g} ,$$

což je celková tíhová síla působící na tuhé těleso o hmotnosti  $m$ . Při libovolné orientaci tuhého tělesa v prostoru leží působiště tíhové síly vždy ve stejném bodu, který nazýváme **těžiště**  $m_i$  tuhého tělesa. Vzhledem k tomu, že tíhová síla  $\vec{G}$  je vždy úměrná hmotnosti tělesa  $m$ , lze si představit v těžišti soustředěnou i celou hmotnost tělesa. Těžiště splývá s hmotným středem tuhého tělesa ( platí pokud je uvažované tíhové pole homogenní ).

K výpočtu souřadnic polohového vektoru  $\vec{r}_T$  těžiště tuhého tělesa zavedeme soustavu souřadnic pevně spojenou s tělesem ( obr. 5.8 ) a pro soustavu rovnoběžných sil použijeme momentovou větu. Jestliže  $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$  je polohový vektor  $i$ -tého hmotného bodu, pak lze pro daný případ zapsat momentovou větu vektorovou rovnicí

$$\vec{r}_T \times \vec{G} = \vec{r}_1 \times \vec{G}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{G}_2 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{G}_n$$

$$\text{tedy } \vec{r}_T \times m\vec{g} = \vec{r}_1 \times m_1\vec{g} + \vec{r}_2 \times m_2\vec{g} + \dots + \vec{r}_n \times m_n\vec{g}.$$

Protože hmotnosti jsou skalární veličiny, můžeme psát

$$m\vec{r}_T \times \vec{g} = m_1\vec{r}_1 \times \vec{g} + m_2\vec{r}_2 \times \vec{g} + \dots + m_n\vec{r}_n \times \vec{g}$$

Odtud použitím distributivního zákona pro vektorové součiny na pravé straně rovnice a vydělením celé rovnice celkovou hmotností  $m$  obdržíme

$$\vec{r}_T = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_n\vec{r}_n}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i\vec{r}_i}{m} \quad (5.1)$$

Pro jednotlivé souřadnice těžiště z rovnice ( 5.1 ) plyne

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m} \quad y_T = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m} \quad z_T = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{m} \quad (5.2)$$

Pokud mají tuhá tělesa svoji hmotnost spojitě rozloženu v celém objemu, pak nahradíme jednotlivé hmotné body nekonečně malými objemovými elementy o hmotnosti  $dm$ , na něž celé tuhé těleso rozdělíme. Polohový vektor libovolného elementu  $dm$  označíme  $\vec{r} = (x, y, z)$ . Pak rovnice ( 5.1 ) a ( 5.2 ) můžeme psát ve tvaru

$$\vec{r}_T = \frac{\int \vec{r} dm}{m} \quad x_T = \frac{\int x dm}{m} \quad y_T = \frac{\int y dm}{m} \quad z_T = \frac{\int z dm}{m} \quad (5.3)$$

Rovnice ( 5.1 ), ( 5.2 ) jsou totožné s rovnicemi ( 4.11 ), ( 4.12 ), které určovali souřadnice hmotného středu soustavy hmotných bodů.

## 5.2. Rovnovážná poloha tuhého tělesa. Stabilita.

Rovnováhou tuhého tělesa nazýváme stav, kdy je těleso vůči inerciální vztahné soustavě v klidu nebo pohybu rovnoměrném posuvném či otáčivém. Dvě základní podmínky rovnováhy lze matematicky vyjádřit

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F} = \vec{0} \quad (5.4)$$

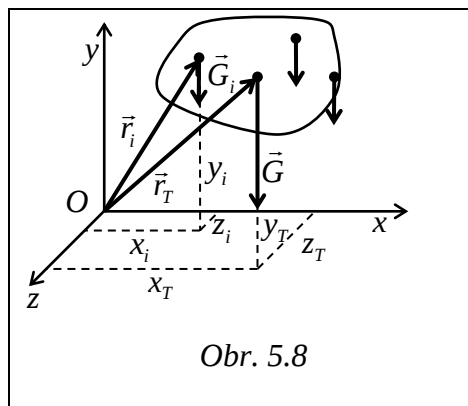
$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{M} = \vec{0} \quad (5.5)$$

a slovně

*Tuhé těleso je v rovnováze, když výslednice vnějších sil  $\vec{F}$  působících na těleso a moment  $\vec{M}$  výsledné dvojice sil jsou rovny nulovému vektoru.*

Podmínky ( 5.4 ) a ( 5.5 ), které musí být obě splněny, jsou vzájemně nezávislé, tzn. je-li  $\vec{F} = \vec{0}$ , není tím dáno, že je také  $\vec{M} = \vec{0}$ , a obráceně.

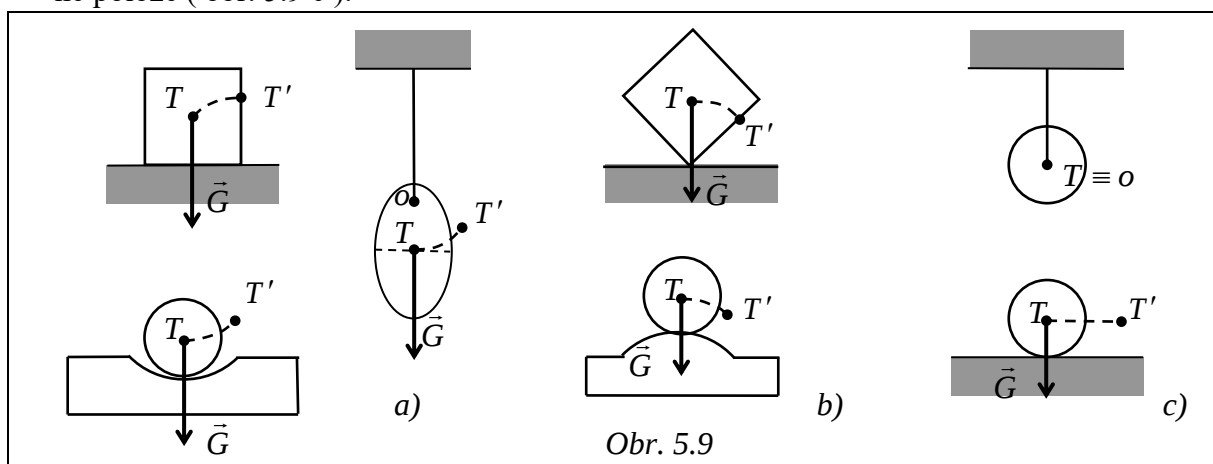
Stálost rovnovážné polohy tuhého tělesa závisí na tom, jak se při vychylování tělesa z jeho rovnováhy posouvají působíště vnějších sil a jak se v důsledku toho mění i velikosti je-



Obr. 5.8

jich momentů. Na každé tuhé těleso v tíhovém poli působí tíhová síla, jejímž působištěm je těžiště tělesa. Proto se jeví jako vhodné kritérium stálosti rovnovážné polohy tělesa při jeho vychýlení z této polohy určení velikosti a směru posuvu těžiště tělesa. Podle tohoto kritéria rozlišujeme tři rovnovážné polohy tuhého tělesa:

- Stálá ( stabilní ) rovnovážná poloha** je charakterizována tím, že při vychýlení tělesa se těžiště zvedá a vznikající momenty sil nutí těleso k návratu do rovnovážné polohy ( obr. 5.9 a).
- Vratká ( labilní ) rovnovážná poloha** se vyznačuje tím, že dochází při vychýlení tělesa k poklesu těžiště a vzniklé momenty sil způsobí zvětšování výchylky z rovnováhy ( obr. 5.9 b ).
- Volná ( indiferentní ) rovnovážná poloha** je dána tím, že při vychýlení tělesa se výška těžiště nezmění a rovnováha se neporuší, takže těleso samovolně setrvá v nové rovnovážné poloze ( obr. 5.9 c ).



Často bývá rovnovážná poloha tuhého tělesa hledána jako extrém jeho potenciální energie ( stálá rovnovážná poloha – potenciální energie je minimální, vratká –  $E_p$  je maximální, volná -  $E_p$  se při vychýlení tělesa nemění ).

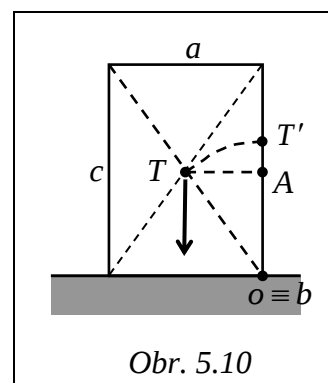
Z uvedených tří druhů rovnovážných poloh je technicky nejdůležitější rovnovážná poloha stálá. Pro praxi je závažné určení velikosti **stability tělesa** v takové rovnovážné poloze. Stabilita tuhého tělesa se dá vyjádřit různými veličinami, např. momentem stability, mírou bezpečnosti proti převržení, maximální rychlostí větru, maximálním úhlem naklonění ( kdy vektor tíhové síly ještě nesměruje mimo obrys základny tělesa ) nebo velikostí práce potřebné k převržení tuhého tělesa. Toto poslední kritérium si rozebereme podrobněji na příkladu.

*Příklad:* Kvádr, jehož rozměry jsou  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , stojí na vodorovné rovině ( obr. 5.10 ). Jakou práci vykonáme, jestliže ho chceme překloupit kolem hrany  $b$  ( kolmé k nákresně v obr. 5.10 )?

K překlopení kváдру je třeba zvednout jeho těžiště  $T$  do polohy  $T'$ . Přitom se vykoná práce, která je rovna změně potenciální energie tělesa. Platí tedy

$$W = -\Delta E_p = -E_{pT} - (-E_{pA}) = mg(h_A - h_T) = mg \frac{1}{2} (\sqrt{a^2 + c^2} - c)$$

Podle tohoto výsledku je stabilita kváдру tím větší, čím má kvádr větší hmotnost, čím je níž jeho těžiště a čím delší je hrana podstavu  $a$ .



### 5.3. Pohybová energie tuhého tělesa. Moment setrvačnosti.

Obecný pohyb tuhého tělesa lze vyjádřit jako pohyb složený z posuvného pohybu, při němž všechny částice tělesa, včetně těžiště  $T$ , mají v daném okamžiku stejnou rychlost  $\vec{u}$ , a z otáčivého pohybu kolem okamžité osy rotace procházející těžištěm  $T$  tělesa, v níž leží vektor okamžité úhlové rychlosti  $\vec{\omega}$ .

Zvolíme vztahnou soustavu tak, že počátek  $O$  leží libovolně na okamžité ose rotace  $o$ , která splývá s osou  $y$  ( obr. 5.11 ). Libovolný hmotný bod  $m_i$  tuhého tělesa, jehož polohový vektor je  $\vec{r}_i$ , se pohybuje rychlostí  $\vec{v}_i$ , pro níž platí

$$\vec{v}_i = \vec{u} + \vec{u}_i,$$

kde  $\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$  je obvodová rychlost hmotného bodu. Kinetická energie tohoto hmotného bodu je

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i [(\vec{u} + \vec{u}_i)(\vec{u} + \vec{u}_i)] = \frac{1}{2} m_i u^2 + m_i \vec{u}_i \vec{u} + \frac{1}{2} m_i u_i^2$$

Celková kinetická energie tuhého tělesa je pak součtem kinetických energií všech hmotných bodů tělesa

$$E_k = \sum_{i=1}^n E_{ki} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i u^2 + \sum_{i=1}^n m_i \vec{u}_i \vec{u} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i u_i^2 = \frac{1}{2} u^2 \sum_{i=1}^n m_i + \vec{u} \sum_{i=1}^n m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i r_{i\perp}^2$$

Vyšetříme jednotlivé členy v tomto součtu:

První člen, v němž  $m$  je celková hmotnost tuhého tělesa, vyjadřuje kinetickou energii posuvného pohybu tělesa

$$E_{kp} = \frac{1}{2} m u^2$$

Lze si ji představit jako kinetickou energii hmotného bodu – těžiště, s hmotností  $m$  celého tělesa, který koná posuvný pohyb s rychlostí  $\vec{u}$ .

Druhý člen ještě upravíme, neboť z obr. 5.11 plyne, že  $\vec{r}_i = \vec{r}_T + \vec{s}_i$

$$\vec{u} \left[ \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_T + \vec{s}_i) \right] = \vec{u} \left[ \left( \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_T \right) + \left( \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^n m_i \vec{s}_i \right) \right]$$

Protože  $\vec{\omega}$  a  $\vec{r}_T$  leží na téže přímce je jejich vektorový součin roven nulovému vektoru. Při

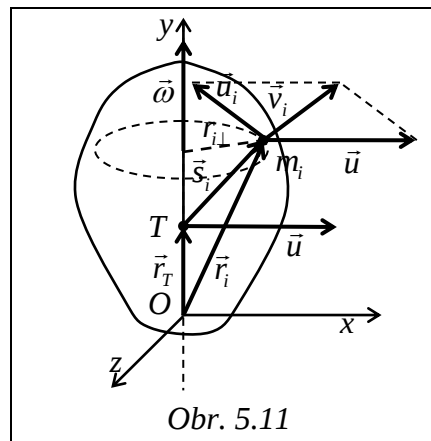
úpravě výrazu  $\vec{\omega} \times \sum_{i=1}^n m_i \vec{s}_i$  využijeme výsadního postavení těžiště tělesa  $T$ , které představuje střed soustavy rovnoběžných sil ( tíhových ). Vektorový součet momentů všech rovnoběžných sil vzhledem ke středu soustavy  $T$  je vždy roven nulovému vektoru. Platí tedy

$$\sum_{i=1}^n (\vec{s}_i \times m_i \vec{g}) = \sum_{i=1}^n (m_i \vec{s}_i \times \vec{g}) = \left( \sum_{i=1}^n m_i \vec{s}_i \right) \times \vec{g} = \vec{0}$$

Tato podmínka může být splněna jen tehdy, když

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{s}_i = \vec{0}, \quad (5.6)$$

protože  $\vec{g} \neq \vec{0}$ . Tzn. že i výraz  $\vec{\omega} \times \sum_{i=1}^n m_i \vec{s}_i = \vec{0}$  a tím celý druhý člen je roven nule.



Obr. 5.11

V třetím členu součet

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_{i\perp}^2 \quad (5.7)$$

nazýváme **moment setrvačnosti tuhého tělesa** vzhledem k rotační ose procházející těžištěm (  $r_{i\perp}$  je kolmá vzdálenost hmotného bodu od osy otáčení ). Dostáváme

$$E_{kr} = \frac{1}{2} J \omega^2 ,$$

což vyjadřuje kinetickou energii otáčivého pohybu tuhého tělesa kolem osy, která prochází těžištěm.

Celková kinetická energie tuhého tělesa se tedy rovná součtu kinetické energie posuvného pohybu tělesa a kinetické energie otáčivého pohybu tělesa

$$E_k = E_{kp} + E_{kr} = \frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 .$$

Samostatnost obou pohybů, z nichž se skládá obecný pohyb tuhého tělesa, vede k závěru, že pohyb těžiště soustavy hmotných bodů nemá vliv na rotační pohyb hmotných bodů kolem osy procházející těžištěm. Toto platí obecně pro soustavu hmotných bodů volných i vázaných ( tuhé těleso ). Proto 1. a 2. impulsová věta uvedené v kapitole 4. [ vztahy ( 4.5 ) a ( 4.21 ) ] pro soustavu hmotných bodů platí rovněž i pro pohyb tuhého tělesa.

1. impulsová věta: *Časová změna hybnosti tuhého tělesa je rovna výsledné vnější síle, která na těleso působí.*

2. impulsová věta: *Časová změna momentu hybnosti tuhého tělesa je rovna celkovému momentu vnějších sil na těleso působících.*

### **Moment setrvačnosti tuhého tělesa.**

Z definičního vztahu ( 5.7 ) vyplývá, že moment setrvačnosti tuhého tělesa závisí na poloze rotační osy vzhledem k tělesu a na rozložení hmotnosti v tělese. Čím větší jsou vzdálenosti  $r_{i\perp}$  hmotných bodů  $m_i$  od osy rotace, tím je moment setrvačnosti větší.

V případě spojitého rozložení hmoty v tělese nahradíme sumační znak integrálem a místo hmotných bodů zavedeme hmotný element  $dm$ . Pro moment setrvačnosti pak platí

$$J = \int_m r^2 dm , \quad [ J ] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \quad (5.8)$$

kde  $r$  je kolmá vzdálenost elementu  $dm$  od osy rotace. Je-li hustota tělesa  $\rho = \text{konst.}$  můžeme psát

$$J = \rho \int_V r^2 dV ,$$

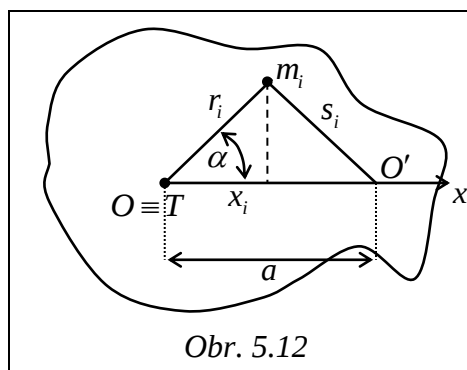
kde  $dV$  je objemový element tělesa. Při výpočtu momentu setrvačnosti osově symetrických těles je možné element  $dm$  (  $dV$  ) volit tak, aby vzdálenost  $r$  kteréhokoli z jeho bodů od osy rotace byla stejná. V obecném případě se výpočet provede pomocí objemového integrálu.

Známe-li moment setrvačnosti tuhého tělesa vzhledem k libovolné ose procházející těžištěm, můžeme určit moment setrvačnosti tohoto tělesa ke každé ose, která je s ní rovnoběžná.

Moment setrvačnosti tuhého tělesa vzhledem k ose  $o$ , která prochází těžištěm  $T$  ( kolmo k nákresně – obr. 5.12 ) je

$$J_T = \sum_i m_i r_i^2 .$$

Zvolíme osu  $o'$  rovnoběžnou s osou  $o$  ve vzdálenosti  $a$ . Moment setrvačnosti vzhledem k této ose je



$$J = \sum_i m_i s_i^2 . \quad (5.9)$$

Podle kosinové věty je  $s_i^2 = r_i^2 + a^2 - 2r_i a \cos \alpha$ . Dosadíme za  $s_i^2$  do (5.9)

$$J = \sum_i m_i (r_i^2 + a^2 - 2r_i a \cos \alpha) = \sum_i m_i r_i^2 + \sum_i m_i a^2 - \sum_i 2a m_i r_i \cos \alpha = J_T + a^2 \sum_i m_i - 2a \sum_i m_i r_i \cos \alpha$$

Zvolíme vztažnou souřadnou soustavu tak, že její počátek je totožný s těžištěm tělesa a osa  $x$  prochází bodem  $O'$ . Pak  $r_i \cos \alpha = x_i$  a podle definice souřadnic těžiště a námi zvolené sou-

stavy platí  $x_T = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = 0$ . Proto  $\sum_i m_i r_i \cos \alpha = 0$  a pro  $J$  můžeme psát

$$J = J_T + ma^2 \quad (5.10)$$

Tento vztah je matematickým vyjádřením **Steinerovy věty**:

*Moment setrvačnosti tuhého tělesa vzhledem k ose neprocházející těžištěm se rovná momentu setrvačnosti vzhledem k rovnoběžné ose procházející těžištěm, zvětšenému o součin hmotnosti tělesa a čtverce kolmé vzdálenosti obou os.*

#### 5.4. Pohybová rovnice tuhého tělesa rotujícího kolem pevné osy. Setrvačníky.

Tuhé těleso se otáčí kolem pevné osy  $o$ . Uvažujme jeden jeho hmotný bod o hmotnosti  $m_i$ , jehož kolmá vzdálenost od osy  $o$  je určena vektorem  $\vec{r}_i$  a který má okamžitou rychlost  $\vec{v}_i$  (obr. 5.13). Hmotný bod koná pohyb po kružnici o poloměru  $r_i$ , jejíž rovina  $\sigma$  určená vektory  $\vec{r}_i$  a  $\vec{v}_i$  je kolmá k ose otáčení tělesa. Na základě rovnice (4.19) můžeme pro pohyb tohoto hmotného bodu psát

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \vec{M}_i , \quad (5.11)$$

kde  $\vec{M}_i$  je moment vnější síly, působící na hmotný bod, který způsobuje jeho rotaci. Vektor  $\vec{M}_i$  nemá obecně směr

osy rotace. Můžeme jej však vždy rozložit na složku kolmou k ose rotace, která se snaží otáčet tělesem kolem osy kolmé k ose rotace, čemuž brání pevné uložení rotační osy (tedy nepřispívá k uvažovanému rotačnímu pohybu), a na složku ve směru osy rotace, která otáčí tělesem kolem rotační osy.

Vektor úhlové rychlosti  $\vec{\omega}$  leží v rotační ose a jeho orientace je daná orientací rotace tuhého tělesa. Pro okamžitou rychlost hmotného bodu platí  $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ . Po dosazení do (5.11) dostaneme

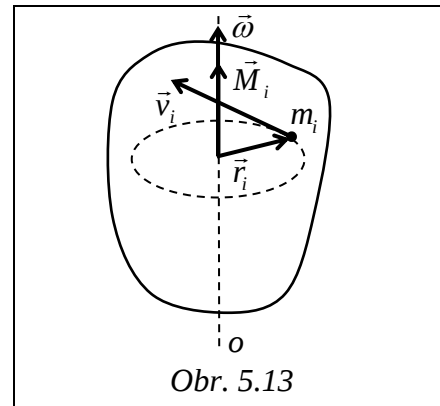
$$m_i \frac{d}{dt} [\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)] = \vec{M}_i .$$

Protože  $\vec{r}_i \perp \vec{\omega}$ , platí  $\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{\omega} r_i^2$  a tak můžeme dále psát

$$m_i \frac{d}{dt} (r_i^2 \vec{\omega}) = m_i r_i^2 \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_i . \quad (5.12)$$

Vektory  $\vec{\omega}$  a  $\vec{M}_i$  leží v rotační ose a proto můžeme sečíst rovnice (5.12) pro všechny body tělesa

$$\sum_i m_i r_i^2 \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i \quad (5.13)$$



Podle ( 5.7 ) je  $\sum_i m_i r_i^2 = J$  moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose rotace a  $\sum_i \vec{M}_i = \vec{M}$

je výsledný moment způsobující rotaci tělesa. Protože  $J$  tuhého tělesa je vzhledem k dané ose rotace konstantní, píšeme rovnici ( 5.13 ) ve tvaru

$$\frac{d(J\vec{\omega})}{dt} = \vec{M} \quad (5.14)$$

Užijeme-li definičního vztahu pro úhlové zrychlení  $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ , můžeme rovnici ( 5.14 ) psát

$$\text{ve tvaru} \quad \boxed{J\vec{\varepsilon} = \vec{M}}, \quad (5.15)$$

což je **pohybová rovnice tuhého tělesa** vzhledem k pevné ose rotace.

V rovnici ( 5.14 ) výraz v závorce představuje **moment hybnosti tuhého tělesa**

$$\boxed{\vec{b} = J\vec{\omega}}$$

Je-li moment působících vnějších sil roven nulovému vektoru, pak

$$\frac{d}{dt}(J\vec{\omega}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{J\vec{\omega} = \text{konst.}} \quad (5.16)$$

Vztah ( 5.16 ) vyjadřuje **zákon zachování momentu hybnosti** pro tuhé těleso. Při změně momentu setrvačnosti se mění úhlová rychlost otáčení tak, aby moment hybnosti zůstal konstantní co do velikosti i orientovaného směru.

## Setrvačníky.

V každém tuhém tělese existují tři tzv. hlavní osy setrvačnosti procházející těžištěm a k nim příslušné tři hlavní momenty setrvačnosti  $J_1, J_2, J_3$ . Jedna z hlavních os je určena tím, že má největší moment setrvačnosti, druhá k ní kolmá má nejmenší moment setrvačnosti a třetí je kolmá k oběma předchozím. Moment setrvačnosti vzhledem k jiné ose, která prochází těžištěm a svírá s hlavními osami úhly  $\alpha, \beta, \gamma$ , je definován

$$J = J_1 \cos^2 \alpha + J_2 \cos^2 \beta + J_3 \cos^2 \gamma.$$

Má-li homogenní tuhé těleso osu souměrnosti, leží v ní jedna z hlavních os setrvačnosti. Symetrický setrvačník má dva hlavní momenty setrvačnosti stejné ( válec, kotouč ), kulový setrvačník má všechny tři hlavní momenty setrvačnosti stejné.

Otáčí-li se tuhé těleso kolem osy pevné v prostoru, působí každý jeho hmotný bod na osu odstředivou silou kolmou k rotační ose. Tyto síly mají určitou výslednici  $\vec{F}$  kolmou k ose a určitou výslednou dvojici sil. Osa, má-li zůstat pevná, musí být upevněna v ložiskách. Síla  $\vec{F}$  působí na ložiska tlaky a silová dvojice se snaží vychýlit osu z její polohy ( osa „se hází“, ložiska se časem vytlučou ).

Osa otáčení, která prochází těžištěm a nepodléhá přitom vlivu odstředivých sil, takže zachovává svou orientaci jak v prostoru, tak v tělese, i kdyby to nebyla fyzická osa ( hřídel ) uložená v ložiskách ( odmyslíme si působení tíhové síly nebo podepřeme těleso jen v jeho těžišti nebo upevníme v Cardanově závěsu apod. ), se nazývá **volná osa**.

Volná osa může být jen jedna ze tří hlavních os, které procházejí těžištěm. U homogenního tělesa je volnou osou jeho osa souměrnosti ( pokud ji má ) – ke každému hmotnému bodu  $m_i$  existuje hmotný bod souměrně sdružený podle osy, tzn. že odstředivé síly těchto dvou bodů se vzájemně ruší, platí tedy  $\vec{F} = \vec{0}$  a neexistuje silová dvojice.

**Setrvačníky jsou tělesa s volnou osou, vzhledem k níž mají velký moment setrvačnosti.**

**a) Volný setrvačnick.**

Nepůsobí-li na volný setrvačnick vnější síla ani vnější dvojice sil, udržuje se rotace setrvačností a rotační osa zachovává svou polohu i směr, tj.  $\vec{b} = J\vec{\omega} = \text{konst.}$ . Příkladem volného setrvačnicku jsou: setrvačnick v Cardanově závěsu, symetrický setrvačnick postavený hrotem osy svisle na vodorovnou rovinu, Maxwellův setrvačnick podepřený v těžišti a k demonstracím se používá např. bicyklové kolo. Prudce roztočený volný setrvačnick je v rovnovážné poloze stálé. Při malém nárazu se nepřekotí, nýbrž se jen posune. Jeho osa klade stáčení zřetelný odpor.

**b) Setrvačnick podrobený vnějšímu působení.**

Působí-li na roztočený setrvačnick silová dvojice, která se snaží vychýlit osu setrvačnicku z její polohy, neskání se osa setrvačnicku ve směru působení vnější silové dvojice, ale začne opisovat plášť kužele – koná tzv. **precesní pohyb**.

Demonstrovat takové silové působení na setrvačnick můžeme, když setrvačnick roztočený kolem své osy, volně bez počátečního nárazu postavíme na podložku tak, aby se o ni opíral svou fyzickou osou v bodě A ležícím mimo jeho těžiště a osa přitom svírala se svislicí úhel  $\alpha$  ( obr. 5.14 ). Tíhová síla setrvačnicku spolu s reakcí v opěrném bodě A dává dvojici sil, jejíž moment  $\vec{M}$  je kolmý k svislé rovině proložené osou setrvačnicku a dvojicí sil, a snaží se sklopit jeho osu směrem dolů. Výpočet reakce setrvačnicku na toto vnější působení je snadný jen za zjednodušujícího předpokladu, že vlastní rotace setrvačnicku je velmi rychlá a že působení vnější dvojice je slabé. Setrvačnick se otáčí kolem volné osy úhlovou rychlostí  $\vec{\omega}$  a má moment hybnosti  $\vec{b} = J\vec{\omega}$ . Podle 2. impulsové věty změni se vlivem momentu  $\vec{M}$  směr vektoru  $\vec{b}$  v prostoru. Při velmi rychlé rotaci setrvačnicku lze předpokládat, že nedojde ke změně polohy osy rotace vzhledem k setrvačnicku, takže směr osy setrvačnicku se prakticky měni stejně jako směr vektoru momentu hybnosti  $\vec{b}$ . 2. impulsovou větu pro daný pohyb setrvačnicku můžeme psát ve tvaru

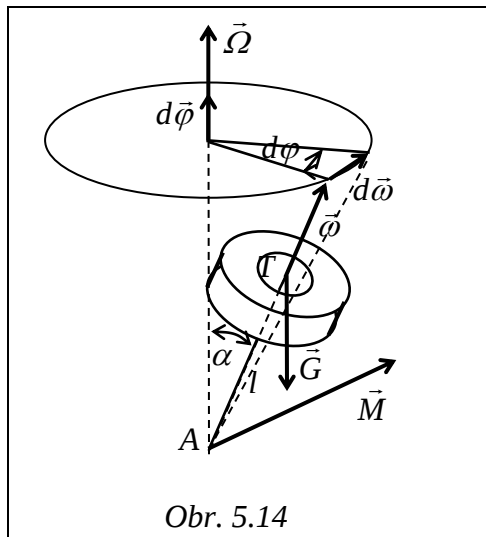
$$\vec{M} = \frac{d\vec{b}}{dt} \approx J \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (5.17)$$

Přírůstek úhlové rychlosti  $d\vec{\omega}$  má stejný orientovaný směr jako  $\vec{M}$ . Svislá rovina proložená okamžitou polohou osy rotace a svislicí  $o$  v bodě A se potočí o úhel  $d\varphi$  kolem svislice  $o$ . O stejný úhel se potočí také vektor  $\vec{M}$ , z čehož vyplývá, že osa setrvačnicku se nesklopí kolem bodu A, ale bude opisovat plášť kužele kolem svislice v bodě A, bude konat precesní pohyb. Snadno vypočítáme úhlovou rychlost  $\vec{\Omega}$  precesního pohybu. Protože vektor úhlu pootočení rotační osy  $\vec{\varphi}$  leží v  $o$ , musí zde ležet i přírůstek  $d\vec{\varphi}$ . Pak z obr. 5.14 plyne  $d\vec{\omega} = d\vec{\varphi} \times \vec{\omega}$ . Po dosazení do ( 5.17 ) dostaneme

$$\vec{M} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times J\vec{\omega} = \vec{\Omega} \times J\vec{\omega},$$

protože  $\vec{\Omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$  je úhlová rychlost precese. Označíme-li  $l$  vzdálenost těžiště  $T$  setrvačnicku od bodu A, pak  $M = mgl \sin\alpha = \Omega J \omega \sin\alpha$  a odtud pro velikost úhlové rychlosti precese vychází

$$\Omega = \frac{mgl}{J\omega}.$$

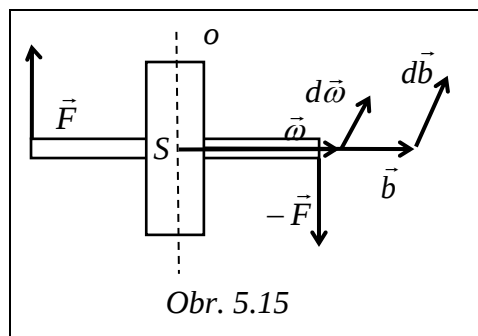


Obr. 5.14

Směr precesního pohybu setrvačníku je dán pravidlem:

Působí-li na setrvačnick rušivá dvojice sil, snaží se jeho osa rotace po nejkratší cestě splynout s osou rušivé dvojice sil ( setrvačnick vnějšímu působení uhýbá ).

Na rychle roztočený symetrický setrvačnick začne působit dvojice sil  $\vec{F}, -\vec{F}$ , které jsou kolmé k ose symetrie setrvačnicku ( obr. 5.15 ). Moment  $\vec{M}$  dvojice sil je kolmý k rovnoběžným silám  $\vec{F}, -\vec{F}$ . Z druhé impulsové věty plyne, že změna celkového momentu hybnosti  $d\vec{b}$  musí být také kolmá k rovině určené touto dvojicí sil. Jelikož předpokládáme stabilitu rotace kolem osy symetrie setrvačnicku, zůstávají vektor  $\vec{b}$ , vektor úhlové rychlosti setrvačnicku  $\vec{\omega}$  a směr osy symetrie setrvačnicku rovnoběžné. Kromě vektoru  $d\vec{b}$  je kolmá na rovinu určenou dvojicí sil  $\vec{F}, -\vec{F}$  také změna vektoru úhlové rychlosti  $d\vec{\omega}$ . V obr. 5.15 je znázorněna osa  $o$ , kolem které se osa symetrie setrvačnicku začne otáčet. Tohoto efektu stáčení rotační osy setrvačnicku se říká **gyroskopický** a momentu dvojice sil, který to způsobil se říká **gyroskopický moment**. Uvedený efekt je třeba brát v úvahu např. v jednomotorovém letadle, kde rotující vrtule zvedá nebo stlačuje špičku letadla podle vzájemného poměru smyslu rotace a směru zatáčky. Obdobné problémy nastávají při konstruování lodí a automobilů.



c) *Použití setrvačnicků.*

Stabilita rotace setrvačnicků kolem jejich osy symetrie bývá technicky využívána např. u letadel, kde setrvačnick poháněný elektromotorem slouží jako umělý horizont a zatáčkoměr k určování polohy letadla za snížené viditelnosti, nebo stabilita rotujících kol umožňuje jízdu na kole a motocyklu, dále střely se roztáčejí v hlavních zbraních, aby po dobu letu lépe zachovávaly směr své osy v prostoru, do osobních námořních lodí se montují velké setrvačnick, aby vyrovnávaly náklony lodě při velkých vlnách, v motorech jsou setrvačnick kvůli jejich rovnoměrnějšímu chodu, u dětských hraček obstarávají pohon atd.

## Kontrolní otázky ke kapitole 5.

1. Vysvětlete, jak definujeme tuhé těleso a co jsou stupně volnosti tuhé těleso.
2. Jak lze rozložit obecný pohyb tuhé těleso a charakterizujte jeho jednotlivé složky.
3. Ukažte na příkladech skládání sil působících na tuhé těleso v případech:
  - a) síly působí v jednom bodě
  - b) síly působí v přímce.
4. Rozeberte skládání sil působících na tuhé těleso v rovině.
5. Objasněte pojem dvojice sil a definujte její moment.
6. Pojednejte o těžišti tuhé těleso a napište vztahy pro výpočet jeho souřadnic.
7. Jaké znáte rovnovážné polohy tuhé těleso? Čím jsou charakterizované?
8. Na čem závisí stabilita tuhé těleso?
9. Odvoďte vztah pro výpočet kinetické energie rotujícího tuhé těleso!
10. Definujte moment setrvačnosti tuhé těleso a uveďte jeho jednotku.
11. Vyslovte Steinerovu větu a vysvětlete k čemu se používá.
12. Odvoďte pohybovou rovnici tuhé těleso rotujícího kolem pevné osy!
13. Definujte moment hybnosti tuhé těleso a vyvoďte zákon zachování momentu hybnosti pro rotující tuhé těleso.
14. Co je setrvačnick? Charakterizujte volný setrvačnick a setrvačnick podrobený vnějšímu působení.
15. Objasněte pojem gyroskopický moment a uveďte příklady použití setrvačnicků v praxi.