

6. GRAVITAČNÍ POLE.

Už v dávných dobách byly předmětem pozorování pohyby Slunce, Měsíce, planet. Zdály se být značně složité, pokud byla za střed vesmíru brána Země. Teprve Koperníkův heliocentrický názor způsobil obrat. Na základě dlouhodobých pozorování pohybů planet (zvláště Marsu), které konal dánský hvězdář Tycho de Brahe, formuloval Johan Kepler (1571-1630) tři zákony, kterými se řídí tyto pohyby v inerciální soustavě spojené se Sluncem a stálicemi (Slunce se nachází v počátku souřadného systému a osy míří ke stálicím).

1. zákon Keplerův:

Planety obíhají kolem Slunce po elipsách o malé výstřednosti (málo se lišících od kružnic), v jejichž společném ohnisku je Slunce.

Výstřednost elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší b se udává buď vzdáleností ohniska e ohniska F od středu S ,

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (\text{délková nebo lineární výstřednost}), \text{ nebo}$$

výstižněji poměrem $\varepsilon = \frac{e}{a}$ (číselná nebo numerická ex-

centricita) (obr. 6.1). Platí $\varepsilon = 0$ pro kružnice, $1 > \varepsilon > 0$ pro elipsy. Např. pro Zemi je $\varepsilon = 0,017$, pro Merkur $\varepsilon = 0,02$, Halleyova kometa má pro svoji dráhu $\varepsilon = 0,97$. Při svém pohybu je planeta nejbližší k Slunci v přísluní (periheliu) P a nejdále v odsluní (afeliu) A .

2. zákon Keplerův:

Plochy opsané průvodičem planety za stejné doby jsou stejné.

Průvodič je úsečka spojující planetu se Sluncem. Oběžné rychlosti nejsou v jednotlivých okamžicích stejné (obr. 6.2), největší rychlost je v periheliu a nejmenší v afeliu (důsledkem je nestejná délka slunečních dnů během roku – zavádí se střední sluneční den). Z tohoto zákona také vyplývá, že při pohybu planety na ni působí síla (jejíž velikost určil Newton), která stále směřuje do středu Slunce (centrální síla).

3. zákon Keplerův:

Poměr druhých mocnin oběžných dob planet je roven poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich oběžných drah.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

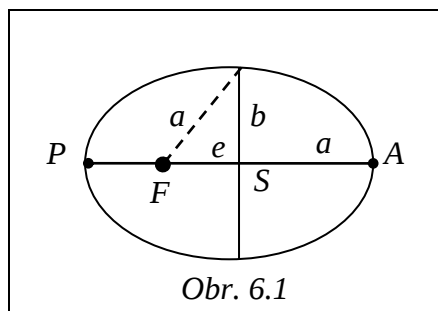
nebo také

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \frac{T_3^2}{a_3^3} = \text{konst.} = k \quad (6.1)$$

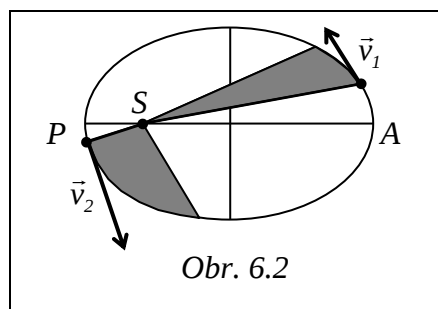
Ze známé oběžné doby planety lze vypočítat velikost hlavní poloosy její oběžné dráhy. Třetí Keplerův zákon souvisí s normálovým (dostředivým) zrychlením planetárního pohybu. Podle 1. a 2. Keplerova zákona můžeme pohyb planety velmi přibližně považovat za pohyb rovnoměrný kruhový. Při něm je normálové zrychlení [použijeme při úpravě vztahu (6.1)]

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{a} = \frac{1}{a} \left(\frac{2\pi a}{T} \right)^2 = \frac{4\pi^2 a^2}{a T^2} = \frac{4\pi^2}{a^2} \frac{a^3}{T^2} = \frac{4\pi^2}{k a^2} \quad (6.2)$$

Zákony Keplerovy (lze je také odvodit z Newtonových pohybových zákonů) tvoří vlastně základ kinematiky planetárních pohybů. Jejich dynamiku rozřešil Newton.



Obr. 6.1



Obr. 6.2

6.1. Newtonův gravitační zákon.

Newton na základě svých pohybových zákonů a Keplerových zákonů odvodil v r.1666 vztah pro výpočet síly, která působí na planetu při jejím pohybu po oběžné dráze.

Myšlená planeta o hmotnosti m_2 se pohybuje po kruhové dráze o poloměru r rychlostí v a s normálovým zrychlením a_n . Podle 2. Newtonova pohybového zákona musí na ni působit síla $\vec{F}$, která směřuje do středu kružnice. Pohybová rovnice planety má tvar

$$F = m_2 a_n,$$

dosadíme za a_n ze vztahu (6.2), kde $a = r$

$$F = \frac{4\pi^2}{k} \frac{m_2}{r^2} \quad (6.3)$$

Podle Newtonova zákona akce a reakce musí stejně velkou silou působit i Slunce na planetu, tzn. že velikost této síly musí být přímo úměrná také hmotnosti Slunce m_1 , tedy

$$F = C \frac{m_1}{r^2}, \quad (6.4)$$

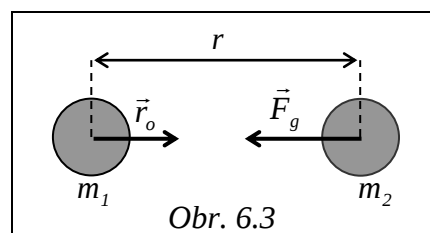
kde C je konstanta úměrnosti. Rovnost pravých stran rovnic (6.3) a (6.4) je splněna volbou $\frac{4\pi^2}{k} = \kappa m_1$ a $C = \kappa m_2$, kde κ je gravitační konstanta nezávislá na m_1 a m_2 . Velikost síly, kterou působí Slunce na planetu je

$$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Zobecněním tohoto vztahu na libovolné dva hmotné body o hmotnostech m_1 a m_2 dospěl Newton k obecnému vyjádření **gravitačního zákona**

$$\vec{F}_g = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_o, \quad (6.5)$$

kde r je vzdálenost těchto bodů, $\vec{r}_o$ je jednotkový vektor vzdálenosti a κ je gravitační konstanta. Znaménko mínus vyjadřuje ve vztahu opačnou orientaci vektoru gravitační síly $\vec{F}_g$ vzhledem k jednotkovému vektoru vzdálenosti $\vec{r}_o$ (obr. 6.3).



Gravitační zákon ve tvaru (6.5) platí přesně pro hmotné body, tj. tělesa, jejichž lineární rozměry jsou zanedbatelně malé vzhledem k jejich vzdálenosti, a pro koule, v nichž je hmotnost rozložena s kulovou symetrií, jejichž středy jsou vzdáleny r . Jestliže chceme určit gravitační sílu mezi dvěma tělesy obecného tvaru, musíme tato tělesa rozdělit na tak malé elementy, které mohou být považovány za hmotné body. Určíme gravitační síly, kterými elementy na sebe působí, a pak vektorovým součtem těchto sil (v případě spojitého rozložení hmoty integrací) získáme výslednou gravitační sílu (v obecném případě je tento postup matematicky velmi náročný).

Hodnota gravitační konstanty κ je

$$\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}.$$

Jako první změřil hodnotu gravitační konstanty anglický fyzik Cavendish v r. 1798 pomocí torzních vah a olovených koulí o velkých hmotnostech.

Newtonův gravitační zákon je jedním z nejdůležitějších obecných přírodních zákonů. Kvantitativně vyjádřil poznatky plynoucí z pozorování a experimentů, že všechny materiální objekty vytváří ve svém okolí i uvnitř (v případě prostorových útvarů) **gravitační pole**. Jeho

existenci lze dokázat pomocí silových účinků, kterými působí na jiné hmotné objekty v něm umístěné. Gravitační pole sahá teoreticky do nekonečna a nelze je odstínit. Vzájemné silové působení materiálních objektů prostřednictvím gravitačních polí se **nazývá gravitační interakce** (je ze známých čtyř základních působení hmotných objektů nejslabší – viz kap. 2.3 str. 31). Síla vyjadřující gravitační interakci je centrální.

Obecně platí: Působí-li na hmotný bod síla, která při jeho pohybu míří stále do jednoho místa (centra) a její velikost závisí pouze na vzdálenosti od centra, říkáme, že na částici působí **centrální síla**. Prostorové rozložení takové síly tvoří kolem centra **centrální silové pole**. Centrální síla může být úměrná (se zápornou konstantou úměrnosti) vzdálenosti částice od centra (elastická síla) nebo častěji nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti od centra. Typickým centrálním polem je tedy **gravitační pole**, jehož zdrojem je hmotný bod nebo koule složená z homogenních soustředných kulových vrstev, nebo také **elektrostatické pole**, jehož zdrojem je nabitá částice nebo nabitá vodivá koule.

6.2. Intenzita gravitačního pole, gravitační zrychlení.

Zkoumejme vlastnosti gravitačního pole, které je kolem hmotného bodu A o hmotnosti m_1 , a to tak, že do stejné vzdálenosti r od hmotného bodu A budeme vkládat hmotné body o hmotnostech $m_2, m_3, m_4, \dots$ (obr. 6.4). Na hmotné body bude gravitační pole působit silami $\vec{F}_{g2}, \vec{F}_{g3}, \vec{F}_{g4}, \dots$, pro jejich velikosti platí

$$F_{g2} : F_{g3} : F_{g4} : \dots = m_2 : m_3 : m_4 : \dots$$

neboli

$$\frac{F_{g2}}{m_2} = \frac{F_{g3}}{m_3} = \frac{F_{g4}}{m_4} = \dots = konst.$$

Poměr gravitační síly $\vec{F}_g$, kterou působí gravitační pole na hmotný bod v něm se nacházející, a hmotnosti m tohoto hmotného bodu, nezávisí na jeho hmotnosti. Závisí však na hmotnosti hmotného bodu, který vytváří toto gravitační pole. Vektorová veličina $\frac{\vec{F}_g}{m}$ představuje vhodnou fyzikální veličinu pro charakteristiku gravitačního pole. Tato fyzikální veličina se nazývá **intenzita gravitačního pole** a značíme ji $\vec{K}$. Platí

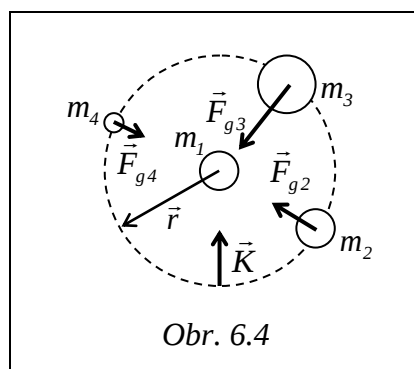
$$\vec{K} = \frac{\vec{F}_g}{m}$$

(6.6)

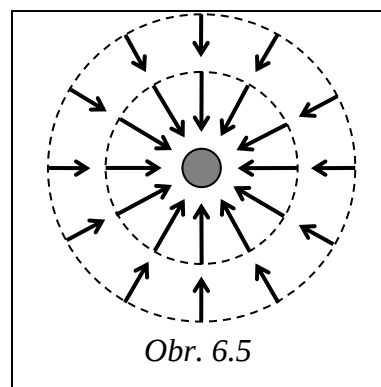
Jednotkou je:

$$[K] = \text{N.kg}^{-1} = \text{m.s}^{-2}$$

Intenzita gravitačního pole $\vec{K}$ má stejný směr a orientaci jako $\vec{F}_g$. Pomocí $\vec{K}$ můžeme znázornit charakter gravitačního pole, např. na obr. 6.5 je zobrazeno centrální gravitační pole hmotného bodu. Gravitační pole, v jehož všech bodech platí $\vec{K} = \text{konst.}$, se nazývá **homogenní**. Za homogenní považujeme např. gravitační pole v okolí malé části povrchu Země a v malém intervalu vzdálenosti od jejího povrchu. Pokud se $\vec{K}$ s časem nemění, nazývá se takové gravitační pole **stacionární**.



Obr. 6.4



Obr. 6.5

Ukažme si na příkladech, jak se v určitém bodě gravitačního pole intenzita vypočítá:

a) *Výpočet intenzity gravitačního pole hmotného bodu.*

Hmotný bod A o hmotnosti m_1 vytváří centrální gravitační pole (obr. 6.6). Na hmotný bod B o hmotnosti m_2 , který je ve vzdálenosti r od bodu A, působí toto pole silou [podle (6.5)]

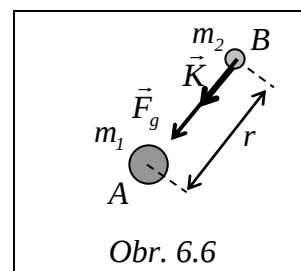
$$\vec{F}_g = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_o$$

Podle definice (6.6) je intenzita gravitačního pole v bodě B

$$\vec{K} = \frac{\vec{F}_g}{m_2} = -\kappa \frac{m_1}{r^2} \vec{r}_o$$

Velikost intenzity gravitačního pole v bodě B je

$$K = \kappa \frac{m_1}{r^2}$$

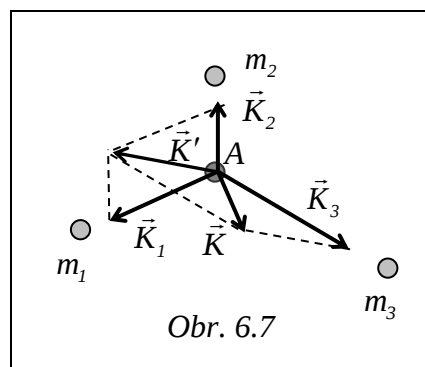


Obr. 6.6

b) *Výpočet intenzity gravitačního pole soustavy hmotných bodů.*

Každý hmotný bod ze soustavy hmotných bodů vytváří ve svém okolí gravitační pole. V libovolném bodě A se tato pole skládají. Na hmotný bod o hmotnosti m , který vložíme do bodu A, bude gravitační pole vytvořené hmotným bodem o hmotnosti m_1 působit silou $\vec{F}_{g1}$, gravitační pole vytvořené hmotným bodem o hmotnosti m_2 silou $\vec{F}_{g2}$, atd. (obr. 6.7). Výsledná síla působící v bodě A bude dána vektorovým součtem působících sil (zákon superpozice)

$$\vec{F}_g = \vec{F}_{g1} + \vec{F}_{g2} + \vec{F}_{g3} + \dots + \vec{F}_{gn} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{gi} \quad (6.7)$$



Obr. 6.7

Ze vztahu (6.6) plyne, že $\vec{F}_g = m\vec{K}$ a tedy $\vec{F}_{gi} = m_i\vec{K}_i$, kde $\vec{K}$ je intenzita výsledného gravitačního pole a $\vec{K}_i$ intenzita gravitačního pole vytvořeného hmotným bodem o hmotnosti m_i . Dosazením do (6.7) dostaneme

$$\vec{K} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2 + \vec{K}_3 + \dots + \vec{K}_n = \sum_{i=1}^n \vec{K}_i$$

Intenzita gravitačního pole soustavy hmotných bodů v libovolném bodě se rovná vektorovému součtu intenzit gravitačních polí, vytvořených jednotlivými hmotnými body soustavy v tomto bodě.

Na každé těleso v gravitačním poli působí gravitační síla, která podle Newtonova zákona síly udělí tělesu zrychlení. Pokud je soustava, ve které gravitační působení zkoumáme, inerciální a jestliže na toto těleso nepůsobí žádné jiné síly kromě gravitační, pak zrychlení tělesa o hmotnosti m způsobené gravitační silou $\vec{F}_g$ vypočítáme

$$\vec{a}_g = \frac{\vec{F}_g}{m}. \quad (6.8)$$

Takto definované **zrychlení** nazýváme **gravitační**. Srovnáme-li rovnici (6.8) s rovnicí (6.6) vidíme, že pravé strany rovnic jsou stejné, tzn. že i levé strany rovnic se musí rovnat. Platí tedy

$$\vec{a}_g = \vec{K}$$

Gravitační zrychlení $\vec{a}_g$ v každém bodě gravitačního pole je rovno co do velikosti i orientovaného směru intenzitě gravitačního pole v tomto bodě.

6.3. Potenciální energie a potenciál gravitačního pole.

Hmotný bod (těleso), který se nachází v gravitačním poli má potenciální energii. Podle obecné definice potenciální energie (3.10) můžeme pro potenciální energii gravitačního pole psát

$$-dE_p = \vec{F}_g d\vec{r} = m\vec{K}d\vec{r}, \quad (6.9)$$

kde m je hmotnost hmotného bodu nacházejícího se v libovolném bodě B gravitačního pole. Při jeho přemístění z bodu B do bodu A vykonají gravitační síly práci

$$-\int_B^A dE_p = \int_B^A \vec{F}_g d\vec{r} = m \int_B^A \vec{K} d\vec{r} = W$$

$$W = -(E_{pA} - E_{pB}) = m \int_B^A \vec{K} d\vec{r}, \quad (6.10)$$

kde E_{pA}, E_{pB} jsou potenciální energie hmotného bodu v bodech A, B. Tento vztah umožňuje určit úbytek potenciální energie mezi dvěma body, který se rovná vykonané práci gravitačními silami. Chceme-li určit velikost E_p v určitém bodě gravitačního pole, musíme stanovit pevný vztažný bod a hodnotu E_p v tomto bodě. Obvykle (v centrálním silovém poli) se vztažný bod volí v nekonečnu a hodnotu E_p zde klademe rovnou nule, protože tak je výraz pro potenciální energii nejjednodušší. Jestliže $B \rightarrow \infty$, pak pro potenciální energii v bodě A plyne ze vztahu (6.10)

$$-E_{pA} = m \int_{\infty}^A \vec{K} d\vec{r}$$

nebo

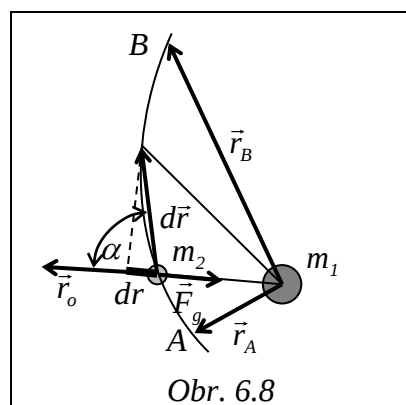
$$E_{pA} = m \int_A^{\infty} \vec{K} d\vec{r}$$

(6.11)

Potenciální energie hmotného bodu o hmotnosti m v určitém bodě centrálního gravitačního pole se číselně rovná práci, kterou vykonají síly pole při přemístění tohoto hmotného bodu z daného bodu do nekonečna.

Ukažme si na příkladě výpočet práce v gravitačním poli, kterou vykonají gravitační síly při přemístění hmotného bodu o hmotnosti m_2 z bodu A do bodu B. Uvažujme gravitační pole vytvořené hmotným bodem o hmotnosti m_1 (obr. 6.8). Práci vykonanou gravitační silou vypočítáme podle (6.10)

$$W = m_2 \int_A^B \vec{K} d\vec{r} = m_2 \int_A^B \left(-\kappa \frac{m_1}{r^2} \vec{r}_o \right) d\vec{r} = -\kappa m_1 m_2 \int_A^B \frac{\vec{r}_o d\vec{r}}{r^2}$$



Protože skalární součin vektoru $d\vec{r}$ a jednotkového vektoru $\vec{r}_o$ je pravoúhlý průmět vektoru $d\vec{r}$ do jednotkového vektoru $\vec{r}_o$ (viz kapitola 1. část 1.2), představuje tento pravoúhlý průmět dr a pokračujeme dále

$$W = -\kappa m_1 m_2 \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = -\kappa m_1 m_2 \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = \kappa m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Práce vykonaná gravitačními silami při přemístění hmotného bodu z bodu A do bodu B závisí pouze na r_A, r_B (tedy na poloze bodů A,B), nezávisí na tvaru trajektorie mezi body A, B.

Tzn. že gravitační síly jsou konzervativní a gravitační pole je konzervativní silové pole (důkaz proveden v kap. 3.1 na str. 54).

Ze vztahu (6.11) plyne, že potenciální energie hmotného bodu o hmotnosti m v gravitačním poli závisí na hmotnosti m . Jestliže vyjádříme podíl potenciální energie a hmotnosti m , dostaneme fyzikální veličinu, která nezávisí na hmotnosti hmotného bodu vloženého do gravitačního pole a která je vhodná k popisu gravitačního pole. Tato fyzikální veličina se nazývá **potenciál gravitačního pole** a je definovaná

$$\varphi = \frac{E_p}{m} \quad (6.13)$$

a její jednotka je $[\varphi] = \text{J.kg}^{-1}$. Pro potenciál v bodě A gravitačního pole vzhledem k (6.11) platí

$$\varphi_A = \int_A^{\infty} \vec{K} d\vec{r} \quad (6.14)$$

Potenciál v určitém bodě centrálního gravitačního pole se číselně rovná práci, kterou vykonají síly pole při přemístění hmotného bodu o jednotkové hmotnosti z tohoto bodu do nekonečna.

Pokud gravitační pole není centrální, volí se bod nulového potenciálu tak, aby výraz pro výpočet potenciálu byl co nejjednodušší.

Ukážeme si opět na příkladech výpočet potenciálu gravitačního pole.

a) *Výpočet potenciálu v gravitačním poli vytvořeném hmotným bodem.*

Gravitační pole je vytvořeno hmotným bodem o hmotnosti m_1 a v tomto poli vypočítáme hodnotu potenciálu ve vzdálenosti r od hmotného bodu. Podle (6.14)

$$\varphi = \int_r^{\infty} \vec{K} d\vec{r} = \int_r^{\infty} \left(-\kappa \frac{m_1}{r^2} \vec{r}_o \right) d\vec{r} = -\kappa m_1 \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = -\kappa m_1 \left[-\frac{1}{r} \right]_r^{\infty} = -\kappa \frac{m_1}{r}$$

b) *Výpočet potenciálu gravitačního pole soustavy hmotných bodů.*

Výpočet se provádí na základě principu superpozice: Potenciál gravitačního pole soustavy hmotných bodů se rovná algebraickému součtu potenciálů polí, vytvořených jednotlivými hmotnými body

$$\varphi = \sum_i \varphi_i$$

Potenciál v různých bodech prostoru, v němž existuje gravitační pole, má obecně různou hodnotu. Platí tedy $\varphi = \varphi(x, y, z)$. Všechny body prostoru, v nichž má potenciál stejnou hodnotu, tvoří tzv. **hladinu potenciálu (ekvipotenciální plochu)** gravitačního pole. Pomocí ekvipotenciálních ploch můžeme znázornit průběh gravitačního pole. V gravitačním poli

hmotného bodu jsou ekvipotenciálními plochami soustředné kulové plochy kolem hmotného bodu.

Dělíme-li rovnici (6.9) hmotností m dostaneme

$$\frac{dE_p}{m} = -\frac{\vec{F}_g d\vec{r}}{m},$$

což vzhledem k (6.6) a (6.13) je

$$d\varphi = -\vec{K} d\vec{r}.$$

Protože $\varphi = \varphi(x, y, z)$, můžeme psát

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = -(K_x dx + K_y dy + K_z dz)$$

Odtud

$$K_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad K_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad K_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (6.15)$$

$$\vec{K} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right),$$

kde

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} = \overrightarrow{\text{grad} \varphi}$$

Souhrnně můžeme tyto rovnice vyjádřit jednou vektorovou rovnicí

$$\boxed{\vec{K} = -\overrightarrow{\text{grad} \varphi}} \quad (6.16)$$

Gradient potenciálu je vektor rovnoběžný s orientovaným směrem největšího růstu potenciálu. Jeho absolutní hodnota se rovná přírůstku potenciálu na jednotku délky v tomto směru.

Intenzita pole má tedy směr a orientaci nejrychlejšího úbytku potenciálu. Rovnice (6.16) nebo (6.15) umožňují určit intenzitu gravitačního pole, známe-li jeho potenciál, který můžeme jako skalární veličinu vypočítat zpravidla jednodušeji než intenzitu.

Analogický vztah [ke vztahu (6.16)] platí také mezi gravitační silou $\vec{F}_g$ a potenciální energií [viz. (3.12)] ($\vec{F}_g = \overrightarrow{\text{grad} E_p}$) a stejně tak vždy pro konzervativní sílu a E_p .

6.4. Gravitační pole Země.

V této kapitole budeme při řešení všech situací uvažovat tzv. **ideální Zemi**, tj. nerotující kulově souměrné těleso o poloměru $R_Z = 6,378.10^6 m$ a s rovnoměrně rozloženou hmotou.

Gravitační sílu, kterou působí gravitační pole Země na hmotný bod nacházející se ve výšce h nad povrchem Země, můžeme vyjádřit

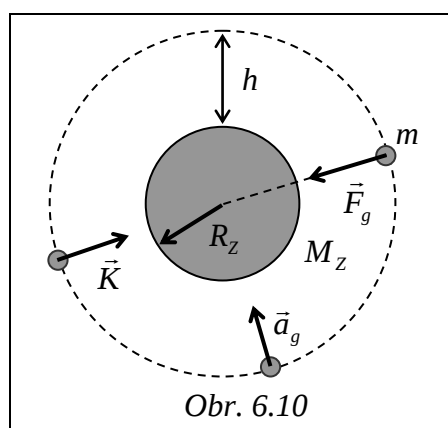
$$\vec{F}_g = -\kappa \frac{mM_Z}{(R_Z + h)^2} \vec{r}_o,$$

kde M_Z je hmotnost Země, m hmotnost hmotného bodu.

Tato síla je v našem ideálním případě centrální a míří přesně do středu Země (obr. 6.10).

Intenzita gravitačního pole Země ve výšce h nad povrchem je

$$\vec{K} = -\kappa \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2} \vec{r}_o.$$



Stejný vztah platí i pro gravitační zrychlení gravitačního pole Země ve výšce h nad povrchem Země

$$\vec{a}_g = -\kappa \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2} \vec{r}_o$$

Směr gravitačního zrychlení je opět přesně do středu Země (u reálné Země to tak nemusí být). Velikost gravitačního zrychlení klesá s rostoucí výškou h (tedy i nadmořskou výškou). Tuto závislost můžeme jednoduše odvodit

$$a_g = \kappa \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2} = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2} \frac{R_Z^2}{(R_Z + h)^2} = a_{go} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R_Z}\right)^2}$$

Při použití binomické věty obdržíme

$$a_g = a_{go} \left(1 + \frac{h}{R_Z}\right)^{-2} \approx a_{go} \left(1 - \frac{2h}{R_Z}\right),$$

kde $a_{go} \approx 9,80 \text{ m.s}^{-2}$ je hodnota gravitačního zrychlení na povrchu Země. Např. ve výšce 3,2 km klesne hodnota a_g o 1 promile. Proto lze v malých výškách nad povrchem Země považovat $\vec{a}_g$ za konstantní a gravitační pole za homogenní.

V kapitole 2. části 2.5. odstavci *Vztažná soustava Země* je vysvětlen vliv rotace Země na silové působení na těleso v gravitačním poli Země. Je zde objasněn rozdíl mezi gravitačním a tíhovým zrychlením, gravitační a tíhovou silou. Konstatujme pouze, že pro přibližné výpočty můžeme brát $a_g \approx g$ (hodnota gravitačního zrychlení v daném místě gravitačního pole Země je přibližně rovna hodnotě tíhového zrychlení v témže místě).

Pro potenciální energii hmotného bodu o hmotnosti m ve výšce h nad povrchem Země a pro potenciál v tomto místě můžeme obdobně psát

$$E_p = -\kappa \frac{mM_Z}{(R_Z + h)^2} \quad \varphi = -\kappa \frac{M_Z}{(R_Z + h)}$$

Uvedené vztahy používáme k řešení různých příkladů v gravitačním poli Země. Uveďme některé.

a) *Výpočet hmotnosti Země.*

Vydeme ze vztahu pro výpočet gravitačního zrychlení na povrchu Země

$$a_{go} = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2} \approx g_o. \quad (6.17)$$

Odtud je hmotnost Země

$$M_Z = \frac{g_o R_Z^2}{\kappa} \approx 6.10^{24} \text{ kg}$$

a její střední hustota

$$\rho = \frac{M_Z}{\frac{4}{3}\pi R_Z^3} \approx 5,52.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$$

b) *Výpočet dostředivého zrychlení Měsíce při jeho oběhu kolem Země.*

Měsíc obíhá kolem Země po dráze přibližně kruhové o poloměru $r_M = 60,27 R_Z$. Jeden oběh trvá $2,361.10^6$ s. Dostředivé zrychlení tohoto kruhového pohybu je

$$a_n = \omega^2 r_M = \frac{4\pi^2 r_M}{T^2} = 2,72.10^{-3} \text{ m.s}^{-2}.$$

Toto zrychlení se musí rovnat gravitačnímu zrychlení gravitačního pole Země v místě, kde se pohybuje Měsíc

$$a_g = \kappa \frac{M_Z}{r_M^2} = 2,70 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-2}$$

Souhlas je velmi dobrý, v čemž viděl Newton první důkaz správnosti své gravitační teorie.

Pohyb hmotného bodu (družice) v centrálním gravitačním poli Země.

Země a hmotný bod (družice), který se nachází ve výšce h nad jejím povrchem, tvoří soustavu, jejíž těžiště je v blízkosti středu Země, prakticky je těžiště totožné se středem Země pro $m \ll M_Z$. Pohyb tohoto hmotného bodu v centrálním gravitačním poli Země lze vyšetřit pomocí Newtonova gravitačního zákona a Newtonova zákona síly. Budeme řešit jednotlivé případy v inerciální vztažné soustavě, v níž těžiště soustavy je v klidu (počátek soustavy). Celkovou energii hmotného bodu vyjádříme

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - \kappa \frac{m M_Z}{(R_Z + h)} \quad (6.18)$$

Trajektoriemi pohybujícího se hmotného bodu jsou kuželo-sečky – elipsy (zvláštní případ kružnice), paraboly, hyperboly (ve zvláštním případě i přímky), jejichž jedním ohniskem (středem) je těžiště soustavy.

Trajektorií je:	elipsa nebo kružnice	$\Leftrightarrow$	$E < 0$
	parabola	$\Leftrightarrow$	$E = 0$
	hyperbola	$\Leftrightarrow$	$E > 0$

Tvar trajektorie tedy závisí na počáteční poloze a počáteční rychlosti hmotného bodu (obr. 6.11).

Rozebereme si podrobněji tři význačné případy pohybu tělesa (hmotného bodu) v gravitačním poli Země resp. Slunce, související s velikostí počáteční rychlosti $\vec{v}_o$, udělené tělesu ve výšce h nad povrchem Země ve směru rovnoběžném s povrchem Země.

a) *První kosmická rychlost* v_I .

Pokud je počáteční rychlost $v_o < v_I$, pak těleso dopadne zpět na povrch Země. Teprve až těleso dosáhne první kosmické rychlosti v_I začne se pohybovat po kruhové trajektorii v těsné blízkosti povrchu Země. Odvodíme její velikost.

Těleso o hmotnosti m se pohybuje v centrálním gravitačním poli ideální Země po kruhové dráze ve vztažné soustavě, kterou je možné přibližně považovat za inerciální (zanedbáme gravitační sílu Slunce a dalších planet). Pohybová rovnice tělesa má tvar

$$\begin{aligned} \vec{F}_g &= m \vec{a}_n \\ -\kappa \frac{m M_Z}{(R_Z + h)^2} \vec{r}_o &= m \frac{v_I^2}{R_Z + h} \vec{n}_o \end{aligned}$$

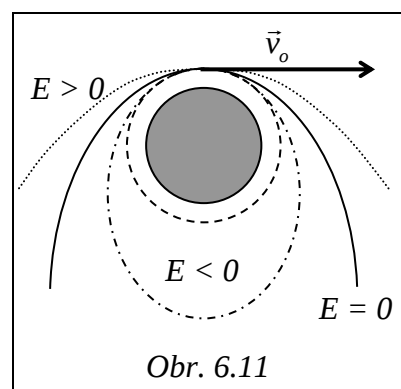
Protože v centrálním poli mají jednotkové vektory opačnou orientaci můžeme pokračovat dále

$$v_I = \sqrt{\kappa \frac{M_Z}{R_Z + h}}$$

Použijeme-li vztah (6.17) dostáváme pro $h \ll R_Z$

$$v_I = \sqrt{g \cdot (R_Z + h)} \approx 7,9 \text{ km.s}^{-1}$$

1. kosmická rychlost



b) *Druhá kosmická rychlost* v_{II} .

Pokud pro počáteční rychlost platí $v_I < v_o < v_{II}$, pak se těleso pohybuje po eliptické trajektorii. Při $v_o = v_{II}$ těleso se pohybuje po parabolické trajektorii a uniklo by do nekonečna, kdyby nebylo působení Slunce a planet. Jakou hodnotu má tedy v_{II} ?

Vyjdeme z podmínky pro parabolickou dráhu $E = 0$ a z rovnice (6.18). Platí

$$\frac{1}{2}mv_{II}^2 - \kappa \frac{mM_z}{R_z + h} = 0$$

Odtud

$$v_{II} = \sqrt{2\kappa \frac{M_z}{R_z + h}} = \sqrt{2}v_I \approx 11,2 \text{ km.s}^{-1}$$

Kontrolní otázky ke kapitole 6.

1. Vyslovte a komentujte Keplerovy zákony.
2. Napište Newtonův gravitační zákon ve vektorovém tvaru a uveďte meze jeho platnosti. Znázorněte na obrázku.
3. Definujte intenzitu gravitačního pole $\vec{K}$. Pomocí vektoru $\vec{K}$ znázorněte centrální gravitační pole hmotného bodu.
4. Vypočítejte intenzitu gravitačního pole hmotného bodu a soustavy hmotných bodů.
5. Vyjádřete slovy, čemu se číselně rovná potenciální energie hmotného bodu v určitém místě gravitačního pole.
6. Uveďte (příp. odvoďte) jaká podmínka musí být splněna, aby dané silové pole bylo konzervativní.
7. Definujte potenciál v určitém místě gravitačního pole.
8. Určete potenciál gravitačního pole, vytvořeného hmotným bodem. Jak se vypočítá potenciál gravitačního pole soustavy hmotných bodů?
9. Vysvětlete, co jsou hladiny potenciálu. Uveďte příklady.
10. Napište a vysvětlete vztah mezi intenzitou a potenciálem gravitačního pole.
11. Určete hmotnost Slunce, znáte-li poloměr Slunce a gravitační zrychlení na povrchu Slunce.
12. Určete celkovou energii hmotného bodu, který se pohybuje v centrálním gravitačním poli Země a uveďte možné trajektorie bodu v závislosti na hodnotě této energie.
13. Odvoďte vztahy pro 1. a 2. kosmickou rychlost.