

7.3. Lorentzova transformace.

Hledáme transformaci pro přechod od jedné inerciální vztažné soustavy (S) k druhé (S'), která je obecnější než transformace Galileova. Transformace musí vyhovovat Einsteinovým principům speciální teorie relativity.

- 1) Požadavek rovnocennosti obou soustav vede k tomu, že transformační funkce musí být lineární. Potom budou vztahy pro přechod od jedné soustavy k druhé symetrické vzhledem k oběma soustavám. Jestliže soustava S' se pohybuje vzhledem k S pouze ve směru osy x ($v_x = v$), pak pevný bod v S' se pohybuje vzhledem k S rychlostí v a obráceně pevný bod v S se vzhledem k S' pohybuje rychlostí $-v$.
- 2) Rychlost šíření světla ve vakuu musí být stejná v obou soustavách.

Jestliže se soustava S' pohybuje vzhledem k S pouze ve směru osy x , týkají se transformace jen souřadnic x, t , protože platí $y' = y$ a $z' = z$.

Dále opustíme předpoklad $t' = t$, který byl v klasické fyzice považován za samozřejmý.

Obecné lineární transformace x a t mají tvar

$$x' = \alpha x + \beta t \quad (7.4)$$

$$t' = \gamma x + \delta t \quad (7.5)$$

Koeficienty β a γ , které spojují spolu souřadnice a čas, musí měnit znaménko spolu s rychlostí v . V opačném případě by při obráceném smyslu os x , x' nezachovávaly vztahy svůj tvar, což je nepřipustné. Vztahy obráceného přechodu od S k S' mají tedy tvar

$$x = \alpha x' - \beta t' \quad (7.6)$$

$$t = -\gamma x' + \delta t' \quad (7.7)$$

Souřadnice x a t ale můžeme také vypočítat z (7.4) a (7.5). Po elementárních algebraických úpravách dostaneme

$$x = \frac{\delta x' - \beta t'}{\alpha \delta - \beta \gamma} \quad t = \frac{\gamma x' - \alpha t'}{\beta \gamma - \alpha \delta} \quad (7.8)$$

Porovnáním koeficientů u x' a t' v těchto rovnicích a v (7.6), (7.7) dostaneme vztahy mezi konstantami

$$\alpha \delta - \gamma \beta = 1 \quad \alpha = \delta \quad (7.9)$$

Použijeme vztahy (7.4) k počátku souřadnic čárkované soustavy $x' = 0$. Vzhledem k S se tento bod pohybuje rychlostí v a tedy $x = vt$. Do (7.4) dosadíme $x' = 0$, $x = vt$ a po dělení rovnice t dostaneme

$$\alpha v + \beta = 0 \quad (7.10)$$

Použitím druhého ze vztahů (7.9) a vztahu (7.10) můžeme (7.4) a (7.5) přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x - \alpha v t \\ t' &= \gamma x + \alpha t \end{aligned} \quad (7.11)$$

Světlo, které vyšleme směrem osy x v čase $t = t' = 0$, kdy oba počátky souřadných soustav splývají, dorazí za čas t do bodu x a za čas t' do bodu x' , přičemž rychlost světla je v obou soustavách stejná, takže

$$c = \frac{x}{t} = \frac{x'}{t'}$$

Použitím (7.11)

$$\frac{x'}{t'} = \frac{\alpha x - \alpha v t}{\gamma x + \alpha t} = \frac{\alpha c - \alpha v}{\gamma c + \alpha} = c$$

Odtud

$$\gamma = -\frac{\alpha v}{c^2}$$

Podle (7.9) s použitím (7.10) lze γ také vyjádřit

$$\gamma = \frac{1 - \alpha^2}{\alpha v}$$

Srovnáním těchto dvou výrazů dostaneme

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Dosazením vypočtených hodnot $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ do transformačních vztahů (7.4), (7.5) dostaneme **Lorentzovu transformaci**. Zpětné transformace získáme dosazením do (7.6) a (7.7).

$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	$y' = y$	$z' = z$	$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	(7.12)
$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	$y = y'$	$z = z'$	$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	(7.13)

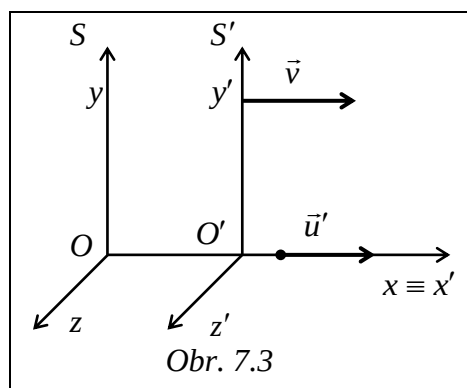
Pro $v \geq c$ nemá tato transformace fyzikální smysl. Pro $v \ll c$ přechází Lorentzova transformace v transformaci Galileovu.

Lorentzova transformace je matematickým základem speciální teorie relativity. Probereme důsledky, které z této transformace plynou

7.4. Důsledky Lorentzovy transformace.

a) Skládání rychlostí.

Předpokládejme těleso, které se pohybuje vzhledem k inerciální soustavě S' podél osy $O'x'$. Jeho souřadnice x' v soustavě S' je funkcí času t' , tj. $x'(t')$, souřadnice x v soustavě S je funkcí času t , tj. $x(t)$.



Vzhledem k orientaci os podle obr. 7.3 je $y' = y = konst.$, $z' = z = konst.$ a rychlost $\vec{u}$ tělesa v soustavě S má stejný směr jako rychlost $\vec{u}'$ v soustavě S' . Pro velikosti těchto rychlostí platí $u_x = u = \frac{dx}{dt}$, $u'_x = u' = \frac{dx'}{dt'}$. Odvodíme vztah mezi u a u' . Přitom vyjdeme z transformačních vztahů Lorentzovy transformace (7.13)

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Rychlost tělesa vzhledem k soustavě S je

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{dx'}{dt'} \frac{v}{c^2}}$$

$$\boxed{u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}} \quad (7.14).$$

Tento vztah vyjadřuje **zákon skládání rychlostí v teorii relativity**. Je zobecněním klasického zákona skládání rychlostí $u = u' + v$, ve který přechází pro $u'v \ll c^2$.

Zavedme čísla p, q tak, že $0 < p \leq 1, 0 < q \leq 1$. Výrazy $u' = (1-p)c, v = (1-q)c$ potom představují jakékoliv hodnoty rychlostí u', v menší než je c . Dosazením do (7.14)

$$u = \frac{(1-p)c + (1-q)c}{1 + \frac{(1-p)c(1-q)c}{c^2}} = \frac{2-p-q}{2-p-q+pq} c.$$

Rychlost u je tedy vždy menší než c .

Pozorujeme-li v soustavě S' foton s rychlostí $u' = c$, jeho rychlost v soustavě S je

$$u = \frac{c+v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = \frac{c+v}{c+v} c = c,$$

což je ve shodě s druhým Einsteinovým postulátem. Pozorovatelé v obou soustavách zjistí, že foton má rychlost c i když se vůči sobě pohybují rychlostí v .

b) Kontrakce délek.

Předpokládejme, že v soustavě S' je podél osy x' položena tuhá tyč, která je vzhledem k S' trvale v klidu. Její délka je určena rozdílem souřadnic koncových bodů tyče $l' = x'_2 - x'_1$. Chceme určit, jaká bude délka tyče l pro pozorovatele v soustavě S . Koncové body tyče mají v S souřadnice x_1, x_2 a zřejmě $l = x_2 - x_1$. Použijeme Lorentzovy transformace k výpočtu souřadnic x_1, x_2 odpovídajících souřadnicím x'_1, x'_2 pro tentýž okamžik počítaný v soustavě S . Z transformačního vztahu (7.12), který spojuje souřadnice x, x' a čas t soustavy S dostaneme

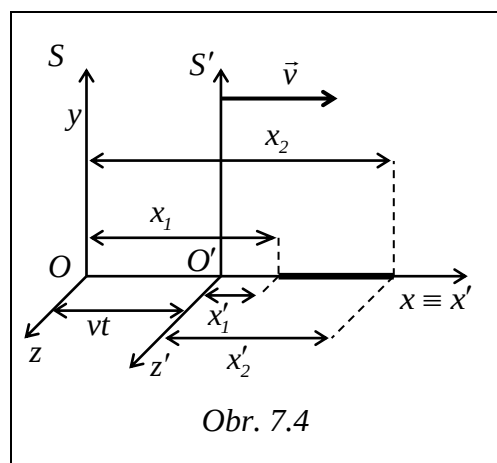
$$x_1 = x'_1 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt \quad x_2 = x'_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt$$

Délka tyče v soustavě S je tedy

$$l = (x_2 - x_1) = (x'_2 - x'_1) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\boxed{l = l' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (7.15).$$

Protože $v < c$, je $l < l'$. V soustavě, vzhledem k níž se tyč pohybuje rychlostí v , je tedy délka tyče menší.

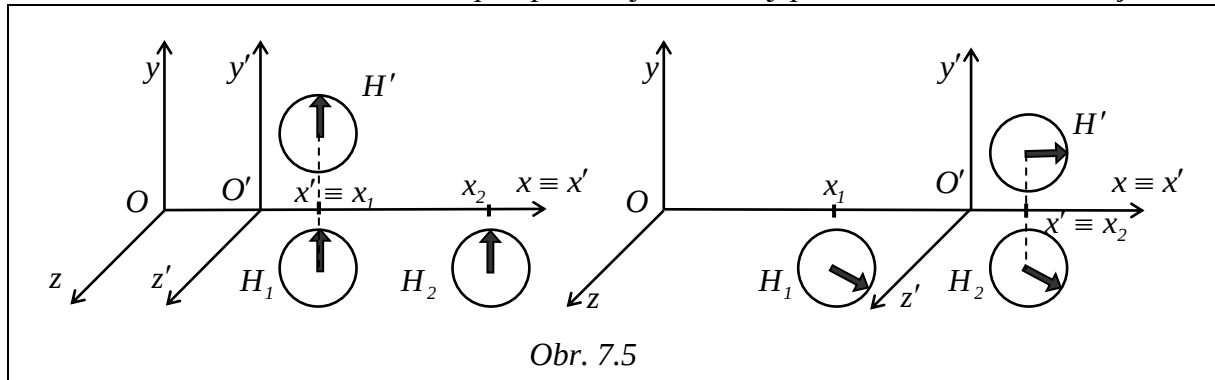


Délka tyče je největší v té soustavě, vzhledem k níž je tyč v klidu. Tato délka se nazývá vlastní délka.

V jiných soustavách se projevuje zkrácení (kontrakce) délky. Rozměry těles ve směru kolmém ke směru jejich pohybu se však nemění. Pro $v \ll c$ je $l = l'$, což je výsledek, který jsme dostali v klasické mechanice při použití Galileovy transformace.

c) Dilatace času.

Uurčíme, jak se jeví délka časového intervalu v soustavách S, S' . Předpokládejme, že v soustavě S' probíhá nějaký fyzikální děj, který lze pozorovat a měřit délku jeho trvání pozorovateli v obou soustavách. Dále předpokládejme, že děj probíhá v soustavě S' v jednom



bodě o souřadnici x' . Přístroje, kterými průběh děje sledujeme jsou tedy vzhledem k S' v klidu, ale vzhledem k S se pohybují rychlostí v . Pro sledování časového průběhu děje v S' stačí jedny hodiny, umístěné v bodě x' . Na sledování trvání děje v S potřebujeme dvoje hodiny a to v bodě x_1 , kde děj začal a v bodě x_2 , kde děj skončil. Pozorovatel v S' v bodě x' zaznamenal, že děj začal v časový okamžik t'_1 a skončil v časový okamžik t'_2 , doba trvání byla $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Podle pozorovatele v S začal děj v čase t_1 v bodě x_1 a skončil v čase t_2 v bodě x_2 , děj tedy trval po dobu $\Delta t = t_2 - t_1$. Abychom našli vztah mezi $\Delta t'$ a Δt , užijeme transformačních vztahů Lorentzovy transformace (7.13)

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad . \quad (7.16)$$

Protože $v < c$, je $\Delta t > \Delta t'$.

Naměřený časový interval pro tutéž událost ve dvou soustavách je různý. Trvání události z hlediska pozorovatele v soustavě S je delší než z hlediska pozorovatele v S' .

Kterýkoliv fyzikální děj tedy trvá nejkratší dobu v té inerciální soustavě, v níž je místo děje v klidu, tj. v níž děj probíhá v jednom bodě. Uvedený výsledek představuje fy-

zikální obsah tzv. **dilatace času**. Době trvání děje měřené v soustavě, v níž se děj odehrává ve stejném místě říkáme **vlastní čas**.

Vlastní čas je vždy menší než čas naměřený pro tutéž událost v souřadné soustavě, která je vzhledem k uvažovanému ději v pohybu. Kontrakce délek i dilatace času jsou důsledkem konstantní rychlosti světla ve všech soustavách. Ukázali jsme, že délka ani časový interval nejsou invarianty Lorentzovy transformace.

Jev dilatace času byl mnohokrát experimentálně potvrzen. Dilataci času lze např. vysvětlit průlet částic, zvaných miony, zemskou atmosférou. Miony vznikají při srážkách částic kosmického záření s jádry atomů v horních vrstvách atmosféry ($h > 10 \text{ km}$). Jsou to nestabilní částice, jejichž doba života je (pokud se nepohybují k pozorovateli) $\tau_o = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$. Jestliže neuvažujeme dilataci času, byla by nejdelší délka dráhy mionů

$$s = \tau_o c = 2,2 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^8 = 660 \text{ m}.$$

Měřením byl ale zjištěn dopad mionů na povrch Země. Vysvětlení spočívá v tom, že τ_o představuje vlastní čas, tzn. dobu života mionů změřenou na hodinách, vzhledem k nimž se miony nepohybují. Vzhledem k pozorovateli na povrchu Země se ale miony pohybují rychlostí $v = 0,9998c$ a jejich doba života v soustavě spojené s povrchem Země

$$\tau = \frac{\tau_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ s},$$

tedy větší než τ_o . Během této doby života urazí mion dráhu

$$s = v\tau = 0,9998c \cdot 1,1 \cdot 10^{-4} \approx 33 \text{ km}.$$

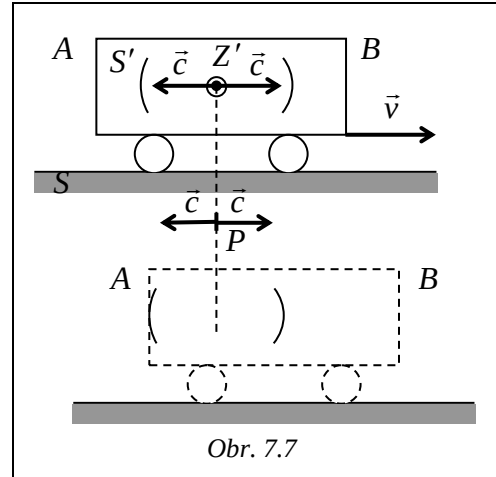
d) *Relativnost současnosti.*

K závažným důsledkům Einsteinových postulátů teorie relativity patří relativnost současnosti událostí. V klasické fyzice nebyl pojem současnosti událostí nijak přesně definován. Současnost událostí byla chápána pouze intuitivně jako něco, co je každému známé. Pojem současnosti analyzoval teprve Einstein. Význam tvrzení „dvě události jsou současné“ je zřejmý v případě, že tyto dvě události nastaly v jednom bodě vztažné soustavy (tzn. jsou sou-



místné). Kriterium pro posouzení současnosti dvou nesoumístných událostí stanovil Einstein: Dvě nesoumístné události v bodech A, B jsou současné, jestliže světelné paprsky vyslané z těchto bodů v okamžiku vzniku obou událostí dorazí do bodu P, stejně vzdáleného od bodů A, B, současně (obr. 7.6). Za bod P můžeme zvolit třeba střed úsečky AB.

Všimneme si problému současnosti nesoumírných událostí nejprve kvalitativně. Představme si hypotetický vagón, který se pohybuje rychlostí blízkou rychlosti světla c . Uprostřed vagónu (soustava S') je zdroj světla Z' , který vysílá světelný impuls do všech směrů v okamžiku, kdy míjí pozorovatele P , který je v klidu vzhledem k soustavě pevně spojené s povrchem Země (soustava S). Světelný signál se šíří v S' ve všech směrech stejnou rychlostí c , dorazí tedy na zadní A a přední B stěnu vagónu současně. Pro pozorovatele P v S se šíří světlo také rychlostí c . Zadní stěna A se k němu přibližuje, přední stěna B se vzdaluje. Světelný signál tedy dopadne nejprve na stěnu A a potom na stěnu B . Tedy:



Obr. 7.7

Dvě nesoumírné události, které jsou současné v soustavě S' jsou nesoučasné v soustavě S .

Při kvantitativním posouzení jevu současnosti nesoumírných událostí vyjdeme z Lorentzovy transformace.

Předpokládejme, že v soustavě S' proběhly současně dva nesoumírné děje A, B o souřadnicích (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) a $(x'_2, y'_2, z'_2, t'_2 = t'_1)$. Časové souřadnice těchto událostí v soustavě S jsou podle (7.13)

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2} x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2} x'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

kde $t'_2 = t'_1$ a jejich rozdíl

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\frac{v}{c^2} (x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Jestliže $x'_1 = x'_2$ (tj. události jsou soumírné v S') je $t_2 = t_1$ a události jsou současné také v S .

Současnost dvou soumírných událostí je tedy pojem nezávislý na vztažné soustavě.

Jestliže $x'_1 \neq x'_2$ je $t_2 \neq t_1$, tj. nesoumírné události současné v S' nejsou současné v soustavě S . Jestliže dva nesoumírné děje v S' byly také nesoučasné, tj. $t'_2 \neq t'_1$, např. $t'_1 < t'_2$, plyne z Lorentzovy transformace možnost aby se v soustavě S odehrály obě události v obráceném časovém sledu, tj. $t_1 > t_2$, případně ve stejnou dobu, tj. $t_2 = t_1$. Lze ukázat, že tento závěr není v rozporu s principem kauzality, protože neplatí v případech, kdy jev A je příčinou jevu B .

7.5. Dynamika speciální teorie relativity.

Základem klasické mechaniky jsou tři Newtonovy pohybové zákony. První pohybový zákon- zákon setrvačnosti, který postuluje existenci inerciální soustavy, platí i v teorii relativity. Stejně tak platí v teorii relativity i zákon akce a reakce. Rovnice, vyjadřující druhý pohybový zákon, tj. $\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$ je, jak jsme již ukázali kovariantní vzhledem ke Galileově transformaci. Uvedený tvar druhého Newtonova pohybového zákona však není kovariantní vzhle-

dem k transformaci Lorentzově. To se potvrdilo měřením vysokých rychlostí elementárních částic v urychlovačích, kdy výsledky výpočtů podle Newtonových rovnic byly v rozporu s experimentem. Jestliže se např. pohybuje částice s nábojem q v homogenním elektrickém poli ve směru siločar (lineární urychlovač) je Newtonova pohybová rovnice $ma = qE$

($\vec{F} = q\vec{E}$ plyne z definice intenzity elektrického pole $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$). Protože $\vec{E} = \overrightarrow{konst.}$, pohybuje

se nabitá částice rovnoměrně zrychleně a opustí urychlovač s rychlostí

$$v = v_0 + \frac{qE}{m} t. \quad (7.17)$$

Pokusy ukazují, že vztah (7.17) souhlasí s výsledky experimentu jen tehdy, je-li počáteční rychlost v_0 malá ve srovnání s rychlostí světla. Pro $v > 10^7 \text{ ms}^{-1}$ je rychlost vyletující částice

menší než odpovídá výpočtu. Protože ve výrazu pro zrychlení $a = \frac{qE}{m}$ je $E = konst.$ a náboj

na pohybovém stavu částice nezávisí, spočívá vysvětlení tohoto rozdílu v tom, že hmotnost částice není konstantní, jak předpokládá klasická mechanika, ale závisí na rychlosti. Ke vztahu, který tato závislost vyjadřuje lze dojít na základě požadavku, aby zákony zachování, které mají ve fyzice základní význam, platily i v teorii relativity. Ukazuje se totiž, že pro izolovaný systém relativistických částic zákon zachování Newtonovské hybnosti ($\vec{p} = m\vec{v}$, $m = konst.$) neplatí. Nové zobecnění fyzikální veličiny (hmotnost, hybnost) je tedy nutno definovat tak, aby zákony zachování zůstaly v platnosti v libovolné inerciální soustavě. Rozborem jednoduchých mechanických dějů, např. srážky dvou pružných částic lze dokázat, že požadované zobecnění fyzikálních veličin hmotnost a hybnost má tvar

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{relativistická hmotnost} \quad (7.18)$$

kde m_0 je tzv. klidová hmotnost, tj. hmotnost tělesa ve vztažné soustavě, vzhledem k níž je v klidu.

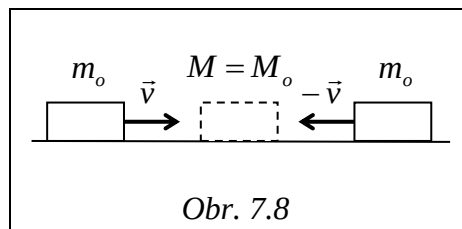
$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{relativistická hybnost} \quad (7.19)$$

Relativistická hmotnost se tedy zvětšuje s rostoucí rychlostí vzhledem ke zvolené vztažné soustavě. Jestliže se rychlost tělesa blíží rychlosti světla, roste hmotnost nade všechny meze.

Žádná částice s nenulovou klidovou hmotností nemůže tedy dosáhnout rychlosti světla. Pouze při rychlostech $v \ll c$ je $m \approx m_0$. Relativistická hmotnost tělesa je relativní, dané těleso má v různých vztažných soustavách různou relativistickou hmotnost. Pro relativistickou hmotnost platí **zákon zachování hmotnosti**:

Celková relativistická hmotnost izolované soustavy těles zůstává konstantní při všech dějích, které probíhají v této soustavě. Klidová hmotnost se ale nezachovává.

Uvažujme např. dvě stejná tělesa s klidovými hmotnostmi m_0 , které se pohybují v soustavě S stejně velkými rychlostmi opačného směru ($\vec{v}, -\vec{v}$). Dojde ke srážce a je-li srážka



nepružná, vznikne jedno těleso, které je v S v klidu. Hmotnost tohoto tělesa je M (přitom $M = M_o$, těleso je v klidu) a platí

$$M = M_o = m + m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Zřejmě $M_o > 2m_o$. Klidová hmotnost soustavy po uskutečněné nepružné srážce je tedy větší než součet klidových hmotností jednotlivých těles.

Při studiu srážek částic, které se pohybují rychlostmi blízkými rychlosti světla byla potvrzena platnost zákona zachování relativistické hybnosti. Pro $v \ll c$ přechází relativistická hybnost v hybnost $\vec{p}_o = m_o \vec{v}$, jak ji definovala klasická mechanika. Relativistický zákon zachování hybnosti představuje jeden z nejobecnějších fyzikálních zákonů.

Pohybová rovnice v teorii relativity.

Požadavek prvního Einsteinova postulátu – principu relativity- znamená, že pohybová rovnice, představující základní zákon dynamiky, musí být kovariantní vzhledem k Lorentzově transformaci. Pouze pro malé rychlosti $v \ll c$ musí přecházet v pohybovou rovnici Newtonovu, jejíž platnost je v tomto intervalu rychlostí velmi dobře ověřena. Těmto požadavkům vyhovuje pohybová rovnice ve tvaru

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (7.20)$$

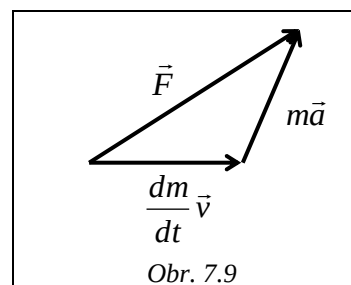
Tento vztah je formálně shodný s pohybovou rovnicí klasické mechaniky ve tvaru (2.28). Fyzikální obsah je však jiný. Na levé straně rovnice (7.20) je derivace relativistické hybnosti, která je určena vztahem (7.19). Dosazením (7.19) do (7.20) dostaneme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_o \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \vec{F} \quad (7.21)$$

Vztah (7.21) vyjadřuje pohybovou rovnici pro hmotný bod v teorii relativity. Hmotnost pohybujícího se tělesa závisí na rychlosti a obecně tedy i na čase. Pohybovou rovnici tedy můžeme psát

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \vec{v} = \vec{F}.$$

Protože vektor $\vec{v}$ má obecně jiný směr než vektor $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$, nejsou vektory $\vec{a}$ a $\vec{F}$ v obecném případě rovnoběžné (obr. 7.9). Lze dokázat, že vektory $\vec{a}$, $\vec{F}$ jsou rovnoběžné pouze ve dvou případech: a) $\vec{F} \perp \vec{v}$ b) $\vec{F}$ je rovnoběžné s $\vec{v}$



7.6. Souvislost energie a hmotnosti.

Jedním z nejdůležitějších výsledků teorie relativity je poznatek, že hmotnost a energie každého hmotného objektu jsou úměrné. Abychom došli k vyjádření obecného vztahu mezi hmotností a energií, všimneme si nejprve kinetické energie.

V klasické mechanice zavádíme kinetickou energii E_k jako veličinu, jejíž přírůstek je roven práci výsledné působící síly. Přitom předpokládáme $m = konst.$. Platí tedy

$$dE_k = dW = \vec{F}d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m\vec{v}d\vec{v} = mvdv .$$

Integrací dostaneme známý vztah

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2$$

Při definici kinetické energie v teorii relativity postupujeme stejně, vzhledem k závislosti hmotnosti na rychlosti bude ale relativistické vyjádření kinetické energie jiné

$$dE_k = dW = \vec{F}d\vec{r} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})d\vec{r} = \vec{v} \frac{dm}{dt} d\vec{r} + m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \quad (7.21)$$

$$= \vec{v}\vec{v}dm + m\vec{v}d\vec{v} = v^2 dm + mvdv$$

Tento výraz můžeme zjednodušit použitím vztahu (7.18). Po umocnění na druhou a úpravě dostaneme

$$m^2(c^2 - v^2) = m_0^2 c^2 .$$

Diferencováním (m_0 , c jsou veličiny konstantní) a po jednoduché úpravě dostaneme

$$c^2 dm = mvdv + v^2 dm .$$

Pravá strana této rovnice se shoduje s výrazem pro dE_k z rovnice (7.21). Porovnáním levých stran dostaneme

$$dE_k = c^2 dm . \quad (7.22)$$

Přírůstek kinetické energie tělesa je tedy úměrný přírůstku relativistické hmotnosti tělesa. Kinetická energie tělesa v klidu je rovna nule a jeho hmotnost je rovna klidové hmotnosti m_0 .

Integrací (7.22)

$$E_k = \int_{m_0}^m c^2 dm = mc^2 - m_0 c^2 . \quad (7.23)$$

Vzhledem k (7.18) lze relativistické vyjádření kinetické energie psát ve tvaru

$$E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) . \quad (7.24)$$

Tento výsledek se výrazně liší od klasického $\frac{1}{2} mv^2$. Pro malé rychlosti ($v \ll c$) však (7.24)

přechází v klasický vztah. Jestliže rozvineme výraz $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, kde $x = \frac{v}{c}$ podle binomické věty

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3v^4}{8c^4} + \dots$$

a omezíme se na první dva členy řady, dostaneme

$$E_k = m_0 c^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} m_0 v^2 .$$

Rovnici (7.23), která vyjadřuje kinetickou energii tělesa v teorii relativity, můžeme zapsat ve tvaru

$$mc^2 = m_0c^2 + E_k,$$

který má tento fyzikální obsah: Výraz m_0c^2 , spojený s klidovou hmotností tělesa m_0 představuje klidovou energii a výraz mc^2 , rovný součtu klidové a kinetické energie představuje celkovou energii tělesa.

Klidová energie

$$E_o = m_0c^2 \quad (7.25)$$

Celková energie

$$E = mc^2 \quad (7.26)$$

$$E = m_0c^2 + E_k \quad (7.27)$$

Obě vzájemné souvislosti hmotnosti a energie jsou nejdůležitějším přínosem teorie relativity v dynamice.

Při každé změně energie z E_1 na E_2 mění se tedy i hmotnost z m_1 na m_2 a naopak, takže

$$\begin{aligned} E_2 - E_1 &= (m_2 - m_1)c^2 \\ \Delta E &= \Delta mc^2 \end{aligned} \quad (7.28)$$

Vzroste-li (klesne-li) energie tělesa o ΔE , potom současně hmotnost tělesa vzroste (klesne) o Δm , pro které platí

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}. \quad (7.29)$$

V tomto vztahu ΔE představuje změnu libovolné formy energie – kinetické, potenciální, elektromagnetické apod. Podle (7.29) má zahřáté těleso větší hmotnost než totéž těleso chladné, stlačením pružiny její hmotnost vzroste, hmotnost látky, ve které probíhá chemická reakce s uvolněním energie, klesá. Takovéto změny hmotnosti však nebyly pozorovány, protože vzhledem k vysoké hodnotě rychlosti světla ($c^2 = 9 \cdot 10^{16} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$) jsou při nepříliš velkých změnách energie zanedbatelné. Např. k zahřátí 1 kg vody z 0°C na 100°C je třeba dodat energii $\Delta E = mk\Delta t$ (měrná tepelná kapacita vody $k = 4,187 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$). Odpovídající přírůstek hmotnosti je $\Delta m = \frac{mk\Delta t}{c^2} = 4,7 \cdot 10^{-12} \text{ kg}$. Experimentální potvrzení souvislosti hmoty a energie bylo možné až s rozvojem jaderné fyziky. Při jaderných reakcích dochází k velkým změnám energie a odpovídající změny hmotnosti jsou výrazné.

Výpočet uvolněné energie při jaderné reakci ukážeme na příkladě. Nejprve obecně: Podle zákona zachování energie je v izolované soustavě celková energie ve dvou různých stavech 1 (před reakcí) a 2 (po reakci) stejná, tj. $E_1 = E_2$. Podle (7.27)

$$E_{o1} + E_{k1} = E_{o2} + E_{k2},$$

takže

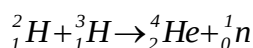
$$E_{k2} - E_{k1} = -(E_{o2} - E_{o1})$$

$$\Delta E_k = -\Delta E_o.$$

Přírůstek kinetické energie je tedy roven úbytku energie klidové, který lze vyjádřit pomocí úbytku klidové hmotnosti. Pro přírůstek kinetické energie, který představuje energii uvolněnou při reakci, tedy platí

$$\Delta E_k = -\Delta m_0c^2 = -(m_{o2} - m_{o1})c^2.$$

Jestliže tedy při jaderné reakci dojde k uvolnění energie ($\Delta E_k > 0$, exoenergetická reakce), poklesne současně klidová hmotnost, tj. $m_{o2} < m_{o1}$. Uvedeme konkrétní příklad:



Spojením dvou vodíkových jader (deuteria a tritia) vznikne jádro hélia a neutron. Dolní index udává tzv. protonové číslo, tj. počet protonů v jádře, horní index udává počet nukleonů (tj. protonů a neutronů) v jádře. Nejprve provedeme hmotnostní bilanci.

Hmotnosti reagujících částic		Hmotnosti vzniklých částic	
2_1H	$2,014102.1,66.10^{-27} \text{ kg}$	4_2He	$4,00260.1,66.10^{-27} \text{ kg}$
3_1H	$3,016050.1,66.10^{-27} \text{ kg}$	${}_0^1n$	$1,00865.1,66.10^{-27} \text{ kg}$
$\sum m_{o1} = 5,030152.1,66.10^{-27} \text{ kg}$		$\sum m_{o2} = 5,01125.1,66.10^{-27} \text{ kg}$	

Vidíme, že klidová hmotnost poklesla, $m_{o2} < m_{o1}$. Úbytek klidové hmotnosti je $m_{o1} - m_{o2} = 3,136902.10^{-27} \text{ kg}$ a uvolněná energie $\Delta E = (m_{o1} - m_{o2})c^2 = 2,8232.10^{-12} \text{ J}$. Kdyby syntézou vodíkových jader vznikl 1 kg He , byla by uvolněná energie $4,2.10^{14} \text{ J}$. Poznamenejme, že při jaderné reakci štěpení uranu lze získat asi $10^{13} \text{ J.kg}^{-1}$, při spalování uhlí asi 10^7 J.kg^{-1} .

Poznatky o uvolňování jaderné energie při syntéze lehkých jader objasnily podstatu obrovských zdrojů energie hvězd. Slunce má zářivý výkon $3,8.10^{27} \text{ W}$. Takový zdroj, který je činný pravděpodobně již miliardy let může vysílat energii pouze v důsledku probíhajících jaderných reakcí.

S výsledky teorie relativity se setkáme také v kapitolách, věnovaných elektrickému a magnetickému poli, kde ukážeme, že existence magnetického pole v okolí pohybujícího se náboje plyne přímo z relativistických transformačních vztahů elektromagnetického pole. Vznik magnetického pole je čistě relativistickým jevem.

Kontrolní otázky

1. Napište transformační vztahy Lorentzovy transformace. Jak souvisí tato transformace s transformací Galileovou?
2. Odvoďte pomocí Lorentzovy transformace zákon skládání rychlostí v teorii relativity.
3. Co plyne z Lorentzovy transformace pro vzdálenost dvou bodů (délka tyče) měřenou v různých inerciálních soustavách. Kterou délku označujeme jako vlastní?
4. Co plyne z Lorentzovy transformace pro časový interval trvání děje, měřeného v různých inerciálních soustavách? Vysvětlete, co je vlastní čas.
5. Pojednejte o experimentálním potvrzení jevu dilatace času.
6. Posuďte správnost tvrzení: Dvě souměstné události současně v inerciální soustavě S nejsou současně v inerciální soustavě S' .
7. Je rovnice $\vec{F} = m\vec{a}$, vyjadřující Newtonův zákon síly, kovariantní vzhledem k Lorentzově transformaci?
8. Platí pro izolovaný systém relativistických částic zákon zachování Newtonovské hybnosti $\vec{p}$ ($\vec{p} = m\vec{v}, m = \text{konst.}$)?
9. Napište relativistické vyjádření veličin hmotnost a hybnost.
10. Platí zákon zachování klidové hmotnosti?
11. Napište pohybovou rovnici pro pohyb částice v teorii relativity a srovnajte ji s pohybovou rovnicí klasické mechaniky.
12. Odvoďte vztah pro kinetickou energii v klasické mechanice a naznačte, jak získáme vztah pro kinetickou energii v teorii relativity.
13. Napište a komentujte relativistický vztah mezi hmotností a energií. Uveďte vztah pro klidovou energii a vztah mezi celkovou, klidovou a kinetickou energií.
14. Jestliže se zvýší energie tělesa o ΔE , jak se změní jeho hmotnost?
Vysvětlete použití Einsteinova vztahu mezi hmotností a energií při energetické bilanci jaderných reakcí.