

4. Mechanika tekutin.

Pod název **tekutiny** shrnujeme **látky kapalné a plynné**. Mají společnou základní vlastnost - **tekutost**. Jejich základní stavební částice se mohou snadno po sobě posouvat - tedy téci. Proto se jejich tvar snadno mění i při působení malých sil, např. vlastní tíhy.

Ideální (dokonalá) tekutina nepotřebuje ke změně tvaru práci, tzn. že její částice se mohou po sobě posouvat bez působení jakýchkoliv sil (nemá vnitřní tření).

Reálná (skutečná) tekutina jeví určitý odpor proti posouvání jednotlivých částic po sobě. Veličina, která charakterizuje odpor tekutiny proti změně tvaru, se nazývá **viskozita (vnitřní tření)**. Ta je u různých tekutin různá, obecně je u kapalin větší než u plynů. U tekutin v klidu se však neprojeví, proto ve statické tekutině můžeme všechny tekutiny považovat za ideální.

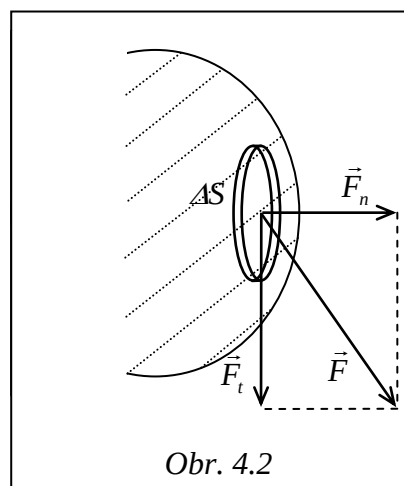
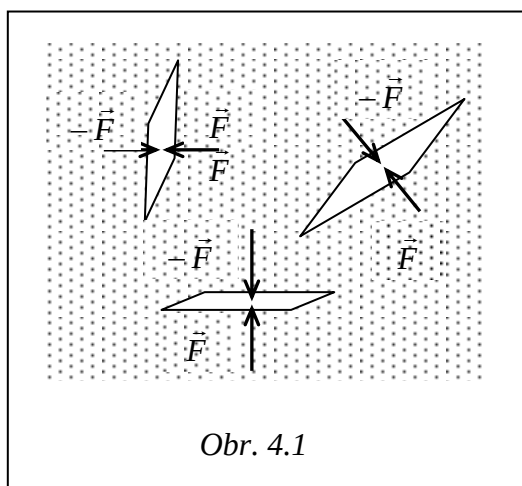
Další společnou vlastností tekutin je **pružnost**.

4.1. Statika tekutin.

V této části budeme vyšetřovat vlastnosti tekutin, které jsou v klidu.

Vyděme ze zákona statiky tekutin, který říká, že **ve statické tekutině je směr síly, působící na každou rovinnou plochu libovolně proloženou v tekutině, kolmý** (viz obr. 4.1). (Na zakřivené ploše můžeme vymezit kdekoliv elementární plošku dS , na niž tekutina působí silou dF ve směru normály k ploše v daném místě.)

Důkaz toho, že ve statické tekutině neexistují tečné (smykové) síly vyplývá z obr. 4.2. Kdy-



by totiž na plošku ΔS působila síla $\vec{F}$ šikmo, rozložili bychom ji na složku tečnou $\vec{F}_t$ a na složku normálovou $\vec{F}_n$. Působením složky $\vec{F}_t$ by se však musely částice tekutiny posouvat podél plošky ΔS . Protože takový pohyb v tekutině v klidu není, musí být $\vec{F}_t = \vec{0}$ a síla $\vec{F}$ pů-

sobí kolmo na plošku ΔS . Výsledek platí pro kteroukoli stěnu nádoby a pro jakoukoli plošku uvnitř tekutiny.

Sílu, kterou tekutina působí kolmo na jednotku určité plochy, nazýváme **tlak** a definujeme

$$p = \frac{dF}{dS} \quad [p] = Nm^{-2} = Pa$$

Jednotka tlaku se nazývá pascal.

Síla, která působí na konečnou plochu S v tekutině, je pak

$$F = \int_S p \cdot dS \quad (4.1)$$

V případě, že tlak je po celé ploše stejný, můžeme psát

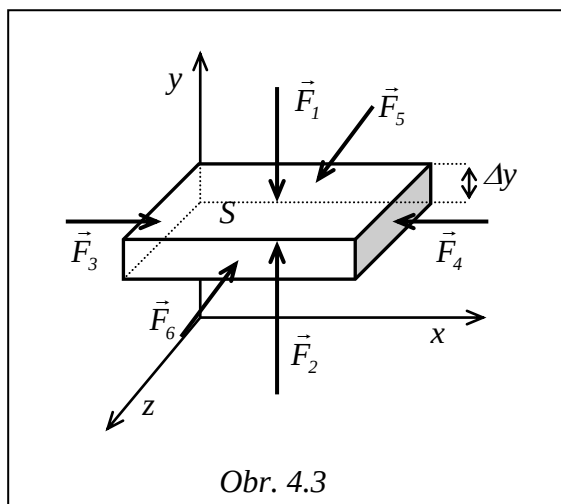
$$F = p \cdot S \quad (4.2)$$

4.1.1 Základní rovnice rovnováhy tekutin

Zvolme si uvnitř tekutiny určitý její objem. Za předpokladu, že tekutina je v klidu, je výslednice všech sil a rovněž výslednice všech momentů sil, které působí na hmotnost zvoleného objemu tekutiny, rovna nulovému vektoru.

Na zvolený objem tekutiny působí plošné síly a objemové síly. **Plošné síly** jsou síly, kterými působí sousední částice tekutiny na povrch uvažovaného objemu. **Objemové síly** jsou síly, které působí přímo na hmotné částice tekutiny obsažené uvnitř vymezeného objemu, a vztahujeme je obvykle na jednotkovou hmotnost. Na Zemi je vždy nutno uvažovat jako objemovou sílu tíhovou sílu.

Řešme zjednodušený případ, kdy objemová síla $\vec{Y}$ působí v kladném směru osy y na jednotkovou hmotnost tekutiny. Zvolíme v tekutině objem tvaru kváдру o hranách rovnoběžných s osami souřadnic. Pak na horní podstavu kváдру působí okolní tekutina plošnou silou $F_1 = -p_1 \cdot S$, na spodní podstavu $F_2 = p_2 \cdot S$ a na zvolený objem tekutiny působí objemová síla $Y_v = \Delta m \cdot Y = \rho \cdot \Delta V \cdot Y = \rho \cdot S \cdot \Delta y \cdot Y$ (viz obr. 4.3). Síly působící na boční stěny se z důvodu souměrnosti ruší. Je-li tekutina v klidu je velikost výslednice všech sil působících na zvolený objem tekutiny nulová. Platí tedy



$$-p_1 \cdot S + p_2 \cdot S + \rho \cdot S \cdot \Delta y \cdot Y = 0$$

Po úpravě

$$p_1 - p_2 = \rho \cdot Y \cdot \Delta y$$

Označíme-li $p_1 - p_2 = \Delta p$ a přejdeme-li k limitě, dostáváme

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta y} = \frac{dp}{dy} = \rho \cdot Y \quad (4.2a)$$

Rovnice (4.2a) se nazývá **rovnice hydrostatické rovnováhy** a říká, že změna tlaku dp při posunutí o dy svislým směrem je přímo úměrná hustotě kapaliny ρ a objemové síle Y působící na jednotkovou hmotnost tekutiny.

Jestliže výsledná objemová síla $\vec{F}_o = (X, Y, Z)$ působící na jednotkovou hmotnost má libovolný směr, pak rovnici hydrostatické rovnováhy rozepíšeme

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \cdot X, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \cdot Y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \cdot Z$$

4.1.2 Pascalův zákon

V roce 1650 objevil francouzský fyzik a filosof Blaise Pascal zákon (jenž nese doposud jeho jméno), který měl velký praktický dopad.

Pascalův zákon: Působí-li vnější síla na rovnou plochu povrchu uzavřeného objemu kapaliny a žádné jiné síly na kapalinu nepůsobí, vznikne v kapalině tlak, který je ve všech místech kapaliny stejný.

Důkaz platnosti Pascalova zákona můžeme provést např. následujícím způsobem (viz obr. 4.4). V kulové nádobě s dokonale tuhou stěnou je uzavřena dokonale nestlačitelná kapalina. Při působení vnější síly $\vec{F}_1$ na píst o průřezu S_1 musí na druhý píst o průřezu S_2 působit z vnějšku síla $\vec{F}_2$, aby kapalina a píst S_2 zůstaly v klidu. Při posunu pístu S_1 o Δs_1 platí

$$S_1 \cdot \Delta s_1 = S_2 \cdot \Delta s_2 \quad (4.2.b)$$

Síly vykonají přitom práce o velikostech

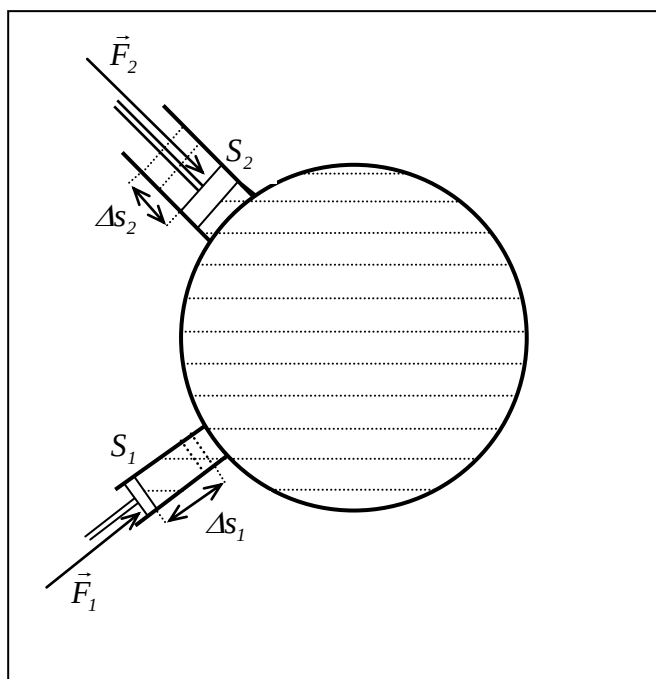
$$F_1 \cdot \Delta s_1 = F_2 \cdot \Delta s_2 \quad (4.2.c)$$

Vydělením rovnice (4.2.c) rovnicí (4.2.b) dostáváme

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} = p = konst.$$

Jednoduše lze dokázat platnost Pascalova zákona také z rovnice (4.2a). Jestliže na kapalinu uzavřenou v kulové nádobě působí jen plošné síly (výslednice objemových sil je nulová), pak

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \Rightarrow p = konst.$$



Obr. 4:4

Na základě Pascalova zákona pracují např. hydraulický lis, který poprvé zkonstruoval Bramah v roce 1795, nebo hydraulické brzdy a další hydraulické mechanismy.

Při důkazu platnosti Pascalova zákona v předchozí části jsme zanedbali vliv působení gravitačního pole Země.

Nepůsobí-li na kapalinu, za předpokladu, že kapalina je málo stlačitelná (např. voda změní objem o 5% až při tlaku 10^8 Pa), vnější tlak, pak působením homogenního gravitačního pole Země vzniká vlastní tíhou kapaliny **hydrostatický tlak**, jehož velikost v hloubce h pod volnou hladinou je

$$p = h \cdot \rho \cdot g$$

Jestliže na kapalinu působí vnější tlak p_0 (v kapalině s otevřeným povrchem je to atmosférický tlak; v kapalině, která je uzavřena v nádobě pod tlakem p_0 , je to tlak p_0), pak celkový tlak v hloubce h měřené od horní volné hladiny je

$$p = p_0 + h \cdot \rho \cdot g \quad (4.3)$$

Vztah (4.3) lze také snadno odvodit z rovnice (4.2a). Předpokládáme-li, že na volné hladině ($h = 0$) je tlak p_0 a v hloubce h tlak p a na zvolený objem kapaliny působí objemová tíhová síla G ($G = \Delta m \cdot g = Y_V = \Delta m \cdot Y \Rightarrow Y = g$), pak integrací rovnice (4.2a) dostaneme

$$\int_{p_0}^p dp = \int_0^h \rho \cdot g \cdot dy$$

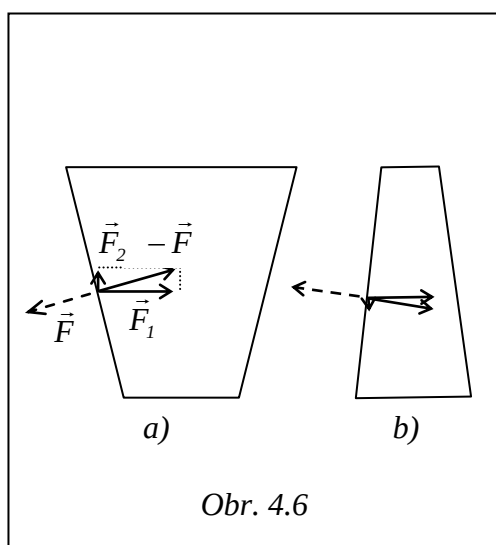
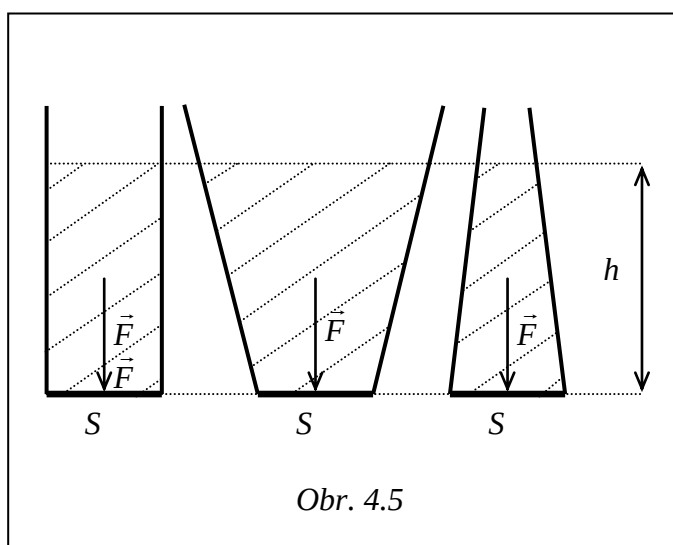
a tedy

$$p = p_0 + h \cdot \rho \cdot g$$

4.1.3 Tlaková síla

a) na dno

V otevřené nádobě naplněné kapalinou o hustotě ρ do výšky h působí na vodorovné



dno o ploše S tlaková síla F , jejíž velikost určíme na základě vztahů 4.2 a 4.3:

$$F = (p_0 + h \cdot \rho \cdot g) \cdot S$$

V případě, že zanedbáme vnější tlak p_0 (obvykle atmosférický tlak), dostáváme známý vztah

$$F = h \cdot \rho \cdot g \cdot S,$$

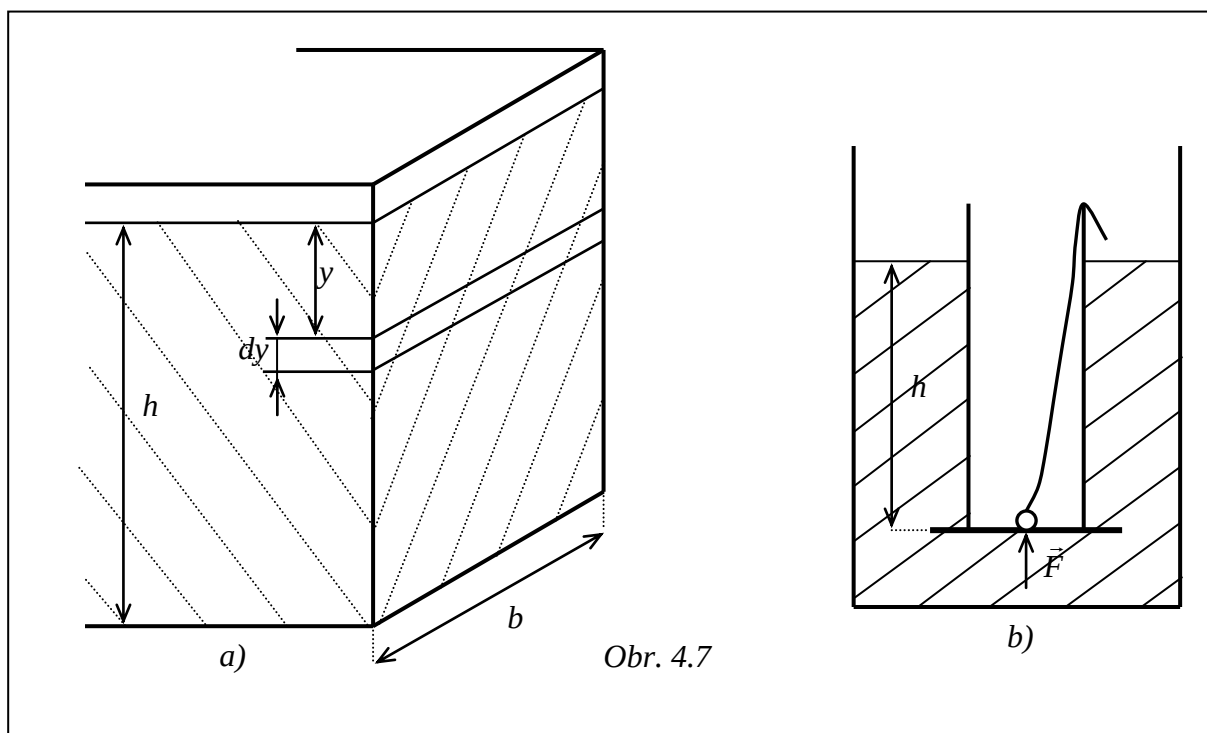
který vyjadřuje **velikost tlakové síly na plochu S v kapalině**. Je zřejmé, že velikost této tlakové síly nezávisí na tvaru nádoby (sloupce kapaliny) ani na hmotnosti kapaliny. Za určitých okolností může být tlaková síla na dno nádoby větší než je vlastní tíha kapaliny, což je téměř neuvěřitelné. Tato skutečnost se nazývá (Pascalovo) **hydrostatické paradoxon**.

Obvykle se hydrostatické paradoxon demonstruje třemi nádobami různých tvarů (viz obr. 4.5). Všechny nádoby mají stejně velkou plochu odklápěcího dna S , které je přidržováno k nádobě protizávažím. Pokud do nich naléváme stejnou kapalinu o hustotě ρ , pak ve všech třech případech dojde k odklopení dna a výtoku kapaliny, když hladina kapaliny v nádobách dosáhne stejné výšky h . Tzn., že tlaková síla na dno je ve všech třech případech stejná a nezávisí na tvaru nádob.

Vysvětlení vyplývá z obr. 4.6. Na plošku ΔS stěny nádoby působí kapalina tlakovou silou $F = h \cdot \rho \cdot g \cdot \Delta S$. Silou $-F$ působí stěna nádoby na kapalinu (zákon akce a reakce). Vodorovná složka F_1 této síly k tlakové síle na dno nepřispívá. Svislá složka F_2 v případě a) směřuje svisle vzhůru a kompenzuje tlakovou sílu sloupce kapaliny nad ploškou ΔS , v případě b) směřuje svisle dolů a zvyšuje tlakovou sílu na dno.

b) na stěnu

Na plochu S v libovolné hloubce h v kapalině působí stálá tlaková síla $F = h \cdot \rho \cdot g \cdot S$, jejíž velikost nezávisí na orientaci (natočení) plochy S .



Na svislou nebo šikmou stěnu, např. nádoby naplněné kapalinou, působí tlaková síla, jejíž velikost můžeme vypočítat na základě vztahu 4.1. Provedeme např. výpočet pro svislou obdélníkovou stěnu nádoby, která je naplněna kapalinou do výšky h (viz obr. 4.7 a). V hloubce y pod hladinou zvolíme na stěně plošný element $dS = b.dy$. Na něj působí tlaková síla $dF = p.dS = y \cdot \rho \cdot g \cdot b \cdot dy$. Velikost tlakové síly na boční stěnu nádoby je pak

$$F = \int_0^h \rho \cdot g \cdot b \cdot y \cdot dy = \rho \cdot g \cdot b \cdot \frac{h^2}{2}$$

S rostoucí hloubkou se zvětšuje tlaková síla na stěnu, proto jsou např. přehradní hráze u dna širší než nahoře.

c) Vztlaková síla (vztlak)

Tlaková síla v kapalině, která působí svisle vzhůru, se nazývá vztlaková síla nebo vztlak. Tento jev se demonstruje pokusem znázorněným na obr. 4.7 b. Dno válce je tvořeno těžší kruhovou destičkou, která je volná. K válci je destička přitisknuta působením vztlakové síly $F = h \cdot \rho \cdot g \cdot S$ (S je plocha vnitřního průřezu válce). Destička odpadne, když nalijeme do válce stejnou kapalinu do (téměř) stejné výše, do jaké sahá kapalina v nádobě.

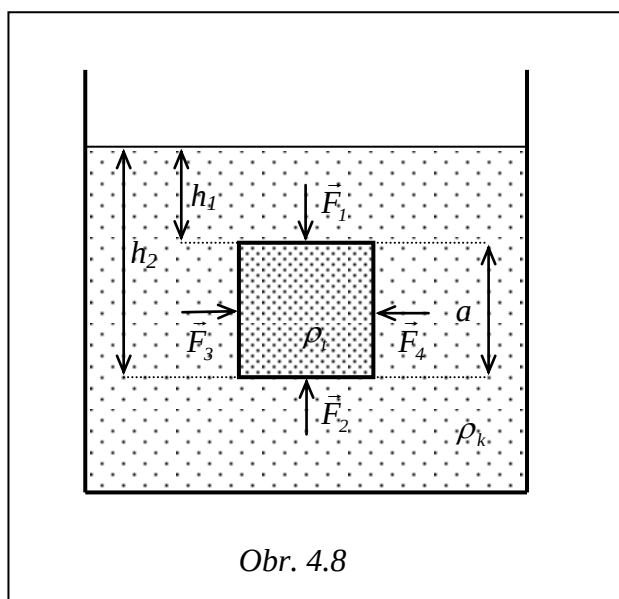
4.1.4 Archimédův zákon.

Na těleso ponořené v tekutině působí tlaková síla, která ho nadlehčuje. Velikost a směr této síly určuje

Archimédův zákon:

Těleso ponořené do tekutiny je nadlehčováno silou směřující svisle vzhůru, jejíž velikost se rovná tíze tekutiny stejného objemu, jako je ponořený objem tělesa.

Důkaz platnosti Archimédova zákona provedeme pro těleso tvaru krychle o hustotě ρ_t



Obr. 4.8

ponořené zcela do kapaliny o hustotě ρ_k tak, že dvě stěny jsou v poloze vodorovné a čtyři stěny ve svislé (viz obr 4.8). Horní stěna krychle se nachází v hloubce h_1 a spodní v hloubce h_2 pod volnou hladinou. Hrana krychle má délku a .

Účinky tlakových sil $\vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6$, působících na svislé stěny, se vzájemně ruší. Výsledná tlaková síla, která působí na těleso,

je určena vektorovým součtem $\vec{F}_v = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Tlaková síla působící na horní podstavu má velikost $F_1 = h_1 \cdot \rho_k \cdot g \cdot a^2$ a směřuje svisle dolů. Tlaková síla působící na dolní podstavu má velikost $F_2 = h_2 \cdot \rho_k \cdot g \cdot a^2$ a směřuje svisle nahoru. Velikost výsledné tlakové síly je pak

$$F_v = F_2 - F_1 = (h_2 - h_1) \cdot \rho_k \cdot g \cdot a^2 = \rho_k \cdot a^3 \cdot g = m_k \cdot g = G_k$$

Rovná se tedy tíze kapaliny stejného objemu jako je ponořený objem tělesa a směřuje svisle vzhůru. Jedná se o vztlakovou sílu, která nadnáší těleso ponořené do kapaliny.

Na těleso o objemu V a hustotě ρ_t , které je ponořené v tekutině o hustotě ρ_k , působí tíhová síla $G = \rho_t \cdot V \cdot g$ a vztlaková síla $F_v = \rho_k \cdot V \cdot g$. Výsledná síla, která na těleso působí je $F = G - F_v = (\rho_t - \rho_k) \cdot V \cdot g$. Mohou nastat tři případy:

- a) $\rho_t > \rho_k$ - těleso klesá dolů
- b) $\rho_t = \rho_k$ - těleso se vznáší v místě, kam bylo v tekutině umístěno
- c) $\rho_t < \rho_k$ - těleso stoupá nahoru (v případě kapaliny plave na její volné hladině)

Rovnovážná poloha tělesa vznášejícího se v tekutině.

Na těleso vznášející se v tekutině působí dvě stejně velké síly opačně orientované (viz předchozí odstavec). Přesto těleso nemusí být v rovnovážné poloze stálé, protože působitě obou sil nemusí být v tomtéž bodě. Může pak vzniknout silová dvojice, která těleso stáčí.

U homogenního tělesa těžiště tělesa T_0 , ve kterém působí tíhová síla, a působitě vztlakové síly, tzv. střed vztlaku T_v (což je těžiště kapaliny tělesem vytlačené - jeho poloha je dána tvarem tělesa a nezávisí na orientaci tělesa v tekutině), splývají. Síly se vzájemně ruší a těleso je v rovnovážné poloze volné.

U nehomogenního tělesa T_0 a T_v nesplývají. Vzniklá silová dvojice stočí těleso tak, že oba body leží na svislé těžnici (T_0 je přitom níže než T_v).

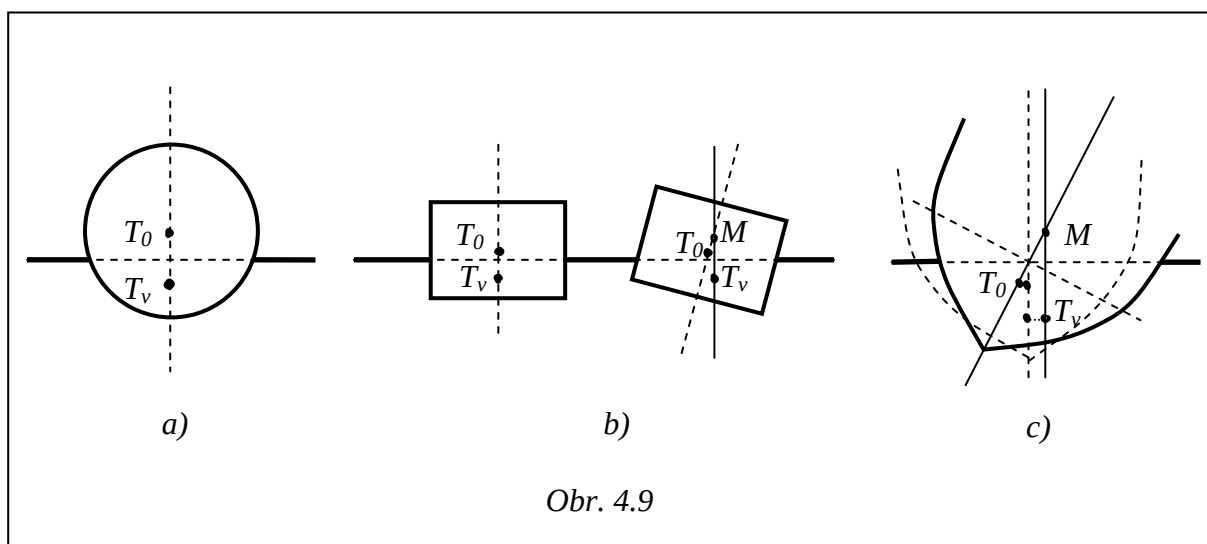
Zvláštním případem je duté těleso, jehož objem se může změnou vnějších tlakových sil změnit. Takové těleso se např. vznáší v určité hloubce v kapalině. Ponoříme - li je hlouběji, jeho objem se zmenší a tím i vztlaková síla, těleso začne klesat ke dnu (ponorky). V případě, že se duté těleso vznáší ve vzduchu, tak při jeho posunutí směrem vzhůru se jeho objem zvětší, tím se zvětší vztlaková síla a těleso začne stoupat nahoru (balóny).

Rovnovážná poloha plovoucích těles.

Těleso plovoucí na volné hladině kapaliny se ani neponořuje ani nevynořuje, přesto však nemusí být v rovnovážné poloze stálé. Těleso se může otáčet.

Vyšetřováním rovnovážné polohy a stability plovoucích těles, zvláště lodí se zabýval holandský fyzik Simon Stevin (1548 - 1620). Přímkou určenou body T_0 a T_v nazval Stevin osou plování. Jestliže je tato osa odchýlena od svislého směru, pak tíhová a vztlačková síla vytvářejí silovou dvojici, která otáčí plovoucím tělesem. Je-li osa ve svislé poloze, pak plovoucí těleso je v rovnovážné poloze, která však nemusí být stálá. Podívejme se na několik jednoduchých příkladů:

- a) U plovoucí homogenní koule (viz obr. 4.9a) leží těžiště stále ve středu koule a střed vztlaku leží na svislé ose plování pod těžištěm. Při vychýlení koule z této polohy se sice změní poloha T_v v kouli, ale osa plování zůstává svislá. Plovoucí homogenní koule je trvale v rovnovážné poloze volné.



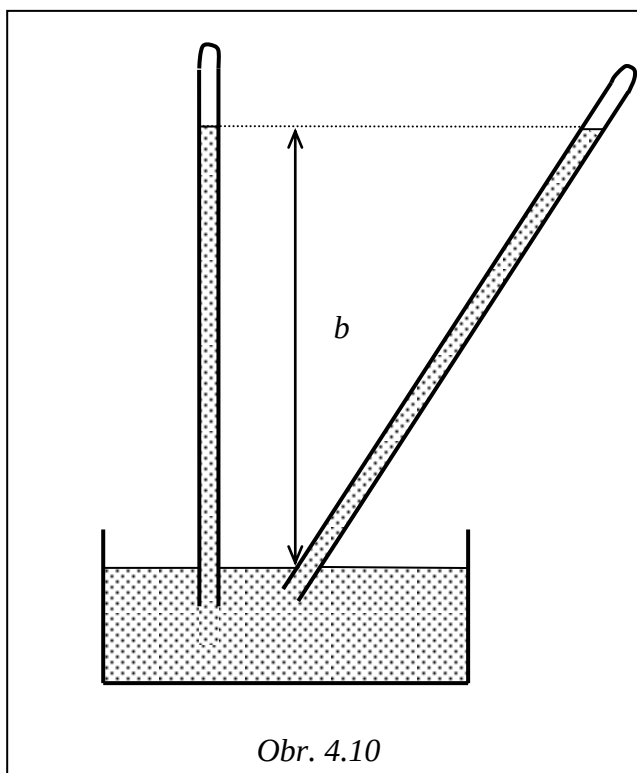
- b) V druhém případě budeme uvažovat homogenní kvádr plovoucí na volné hladině kapaliny (viz obr. 4.9b). Osa plování je svislá, střed vztlaku leží pod těžištěm. Kvádr je v rovnovážné poloze. O jakou rovnovážnou polohu jde zjistíme, jestliže těleso mírně vychýlíme z této polohy. Poloha T_v se změní tak, že vznikne silová dvojice, jejíž moment je orientován kladně nebo záporně, což závisí na poměru hustot tělesa a kapaliny a na poměru rozměrů tělesa. Stevin našel jednoduchou podmínku pro rovnovážnou polohu stálou. Vektorovou přímkou vztlačkové síly prodloužíme, až protne osu plování v bodě M , který Stevin nazval **metacentrem**. Leží-li metacentrum nad těžištěm, vrací silová dvojice těleso zpět do původní polohy - rovnovážná poloha stálá, leží-li pod těžištěm, těleso se převrátí - původní rovnovážná poloha byla vratká.
- c) U nehomogenních těles se může stát, že T_0 leží pod T_v . Těleso, pro které platí uvedená podmínka, je vždy v rovnovážné poloze stálé. Takovým tělesem může být i loď. Obvykle

se však u lodí nachází T_v pod T_0 (viz obr. 4.9c). Profil lodi (příčný řez) lze navrhnout tak, aby při náklonu lodi se T_v posunul ve směru naklonění. Pak metacentrum padne vždy nad těžiště, loď je v rovnovážné poloze stálé.

4.1.6 Atmosférický tlak

Stejně jako na kapaliny tak i na jakékoli množství plynu působí gravitační pole Země. Proto vzduch, který obklopuje Zemi až do výšky 1000 km (není zde však žádné rozhraní), způsobuje svou tíhou aerostatický tlak, který se též nazývá atmosférický nebo barometrický.

Na návrh J. E. Torricelliho (1608 - 1647) provedl v r. 1643 V. Viviani (1622 - 1703) pokus, kterým poprvé změřil atmosférický tlak (viz obr. 4.10). Naplnil na jednom konci uzavřenou trubici rtutí, a pak ji obrátil tak, že ji otevřeným koncem vložil do nádoby s rtutí. Rtuť z trubice zcela nevyteče, ale udrží se v ní sloupec rtuť výšky b , nad kterým je vakuum. Atmosférický tlak, který je nad hladinou rtuť v nádobce, je tedy v rovnováze s hydrostatickým tlakem rtuťového sloupce v trubici. Výška rtuťového sloupce b je vhodnou mírou pro určení atmosférického tlaku.



Obr. 4.10

Velikost atmosférického tlaku se mění s počasím a s nadmořskou výškou. Proto se zavádí **normální atmosférický tlak**, jehož hodnota je $1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Je to hydrostatický tlak rtuťového sloupce (jako u uvedeného pokusu) vysokého 760 mm při 0°C a tíhovém zrychlení $g = 9,80665 \text{ ms}^{-2}$.

Vztahu 4.3, který vyjadřoval závislost tlaku v kapalinách na hloubce, lze použít také pro plyny jen v případě, není-li vrstva plynu příliš vysoká. Je to proto, že plyny jsou velmi stlačitelné a jejich hustota se ve vertikálním směru rychle mění.

Závislost atmosférického tlaku na nadmořské výšce vyjadřuje **barometrická formule**. Při jejím odvození vyjdeme z rovnice (4.2a), kde objemová síla působící na jednotkovou hmotnost je rovna tíhové síle působící na jednotkovou hmotnost vzduchu $G = -m \cdot g$, kde $m = 1 \text{ kg}$. Hustota vzduchu se však s výškou mění. Použijeme Boyle-Mariottův zákon (viz odst. 3.6.) k vyjádření této závislosti

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{p}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{p_0} \cdot p \quad (4.3a)$$

Veličiny ρ_0 a p_0 jsou hodnoty hustoty a tlaku vzduchu pro $y = 0$, tj. při hladině moře. Označíme-li h výšku, ve které chceme určit hodnotu tlaku vzduchu p , pak z rovnice (4.2a) plyne $dp = -\rho \cdot g \cdot dy$.

Po dosazení za ρ ze vztahu (4.3a) obdržíme

$$-dp = \frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot p \cdot dy$$

Integrujeme

$$-\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot \int_0^h dy$$

a po odlogaritmování dostáváme barometrickou formuli

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 \cdot g \cdot h}{p_0}}$$

S rostoucí výškou ubývá tlaku podle exponenciály. Ve výšce asi 5400 m tlak vzduchu klesne na polovinu p_0 , okolo 10 km klesne na čtvrtinu p_0 .

Kontrolní otázky

1. Vysvětlete jaké jsou rozdíly mezi ideální a reálnou tekutinou.
2. Existují v statické tekutině tečné (smykové) síly? Vysvětlete.
3. Definujte tlak v tekutině a uveďte jeho jednotku v soustavě SI.
4. Uveďte (odvoďte) rovnici hydrostatické rovnováhy. Které zákonitosti z ní lze vyvodit?
5. Vyslovte a vysvětlete Pascalův zákon. Která zařízení pracují na základě tohoto zákona?
6. Co se nazývá hydrostatické paradoxon?
7. Čím je způsoben vztlak?
8. Vyslovte Archimédův zákon a uveďte podmínky pro rovnovážné polohy plovoucích (resp. vznášejících se) těles v tekutině.
9. Pojednejte o atmosférickém tlaku a uveďte, co ovlivňuje jeho velikost.