

4.2. Dynamika tekutin

Abychom mohli popsat pohyb tekutiny, je nutné charakterizovat její vlastnosti v každém bodě. Tekutina se pohybuje v různých místech různou rychlostí, má v nich různý tlak, různou hustotu i teplotu, ale také se může měnit její elektrická vodivost, případně magnetické pole apod. Proto podle složitosti situace potřebujeme k popsání stavu proudící tekutiny jedno nebo více fyzikálních polí.

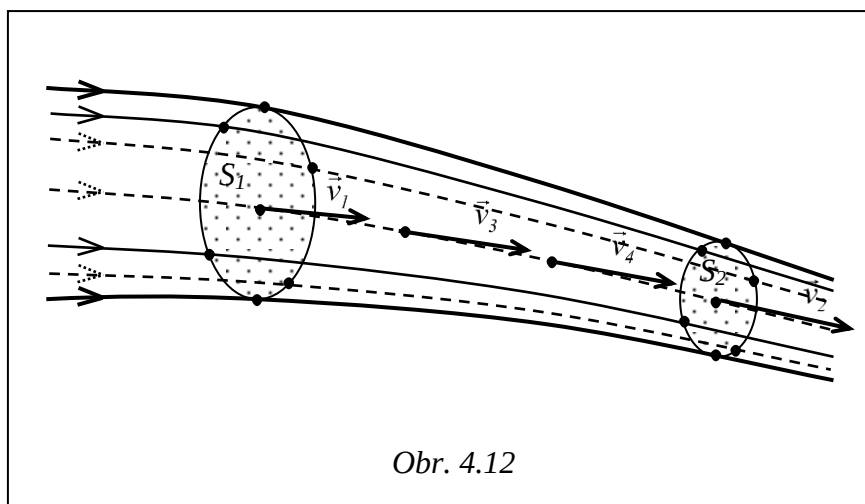
V první části kapitoly si úvahy spojené se studiem proudění tekutin zjednodušíme předpokladem, že proudící tekutina je nestlačitelná (to je přibližně splněno u kapalin při rychlostech proudění menších než 150 ms^{-1} , u plynů proudících rychlostí menší než 40 ms^{-1}), nemá vnitřní tření (viskozitu) a její teplota v libovolném bodě je jednoznačně určena hustotou a tlakem.

4.2.1 Rovnice kontinuity

Proudění tekutiny je v určitém čase a v určitém bodu vzhledem k dané vztažné soustavě určeno rychlostí a tlakem. Definujeme-li v každém bodě proudící tekutiny vektor rychlosti $\vec{v}$, pak lze popsat proudění tekutiny pomocí vektorového pole rychlostí $\vec{v}$. Vektorové pole rychlostí můžeme charakterizovat myšlenými orientovanými křivkami, jejichž tečna v každém bodě udává směr vektoru rychlosti. Tyto křivky se nazývají **proudnice (proudové čáry)**. Proudnicemi však můžeme znázornit nejen směr vektoru rychlosti částice, ale také velikost rychlosti v různých místech tekutiny a to jejich hustotou. Hustotou proudnic rozumíme počet proudnic procházejících jednotkovou plochou kolmou ke směru proudění. Kolikrát je hustota proudnic v daném místě větší než v jiném, tolikrát je zde i větší rychlost proudění tekutiny (viz obr. 4.12).

Proudnice obecně nepředstavují trajektorie částic tekutiny. Jen za ustáleného stavu, tj. kdy vektorové pole rychlostí je stacionární (má v čase neproměnný tvar) a v daném bodě pole je stálý tlak, jsou proudnice trajektoriemi částic tekutiny. Proudění tekutiny, které splňuje předchozí podmínku, se nazývá **ustáleným (stacionárním) prouděním**. Při ustáleném proudění tekutiny, kterým se budeme zabývat v dalším výkladu, se proudnice nikde neprotínají.

Proložíme-li v libovolném místě proudící tekutinou plošku, pak proudnice procházející obvodem této plošky tvoří prostorový útvar, který nazveme **proudová trubice**. Kapalina, která je touto proudovou trubicí vymezena, se nazývá **proudové vlákno** (viz obr. 4.12).



Obr. 4.12

Při ustáleném proudění tekutiny pláštěm proudové trubice částice tekutiny neprochází ani dovnitř ani ven, tzn. že každým průřezem trubice prochází ve stejných časových intervalech stejný počet částic, jejichž celková hmotnost je stálá

Projdou-li dvěma kolmými průřezy S_1 a S_2 proudové trubice (viz obr. 4.12) za dobu dt stejné hmotnosti tekutiny, lze to matematicky vyjádřit

$$dm_1 = dm_2$$

$$S_1 \cdot v_1 \cdot \rho_1 \cdot dt = S_2 \cdot v_2 \cdot \rho_2 \cdot dt ,$$

odtud

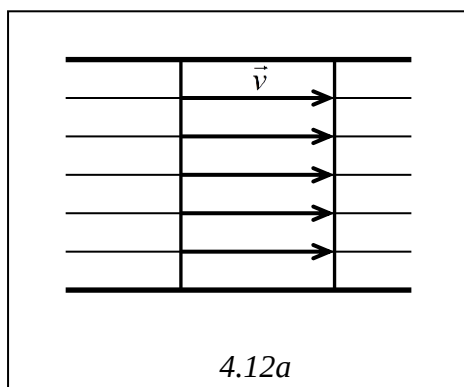
$$S_1 \cdot v_1 \cdot \rho_1 = S_2 \cdot v_2 \cdot \rho_2 ,$$

nebo

$$S \cdot v \cdot \rho = konst. , \quad (4.4)$$

což je **rovnice kontinuity pro stlačitelnou tekutinu**. Pro **nestlačitelnou tekutinu** lze **rovnici kontinuity** psát ve tvaru

$$S \cdot v = konst. \quad (4.5)$$



4.12a

Součin $Q = S \cdot v [m^3 s^{-1}]$ se nazývá **objemový tok**. Je to objem tekutiny prošlé průřezem proudové trubice za jednotku času. Pomocí této veličiny je možné slovně vyjádřit rovnici kontinuity takto:

Při ustáleném proudění nestlačitelné tekutiny je objemový tok v celé proudové trubici stálý.

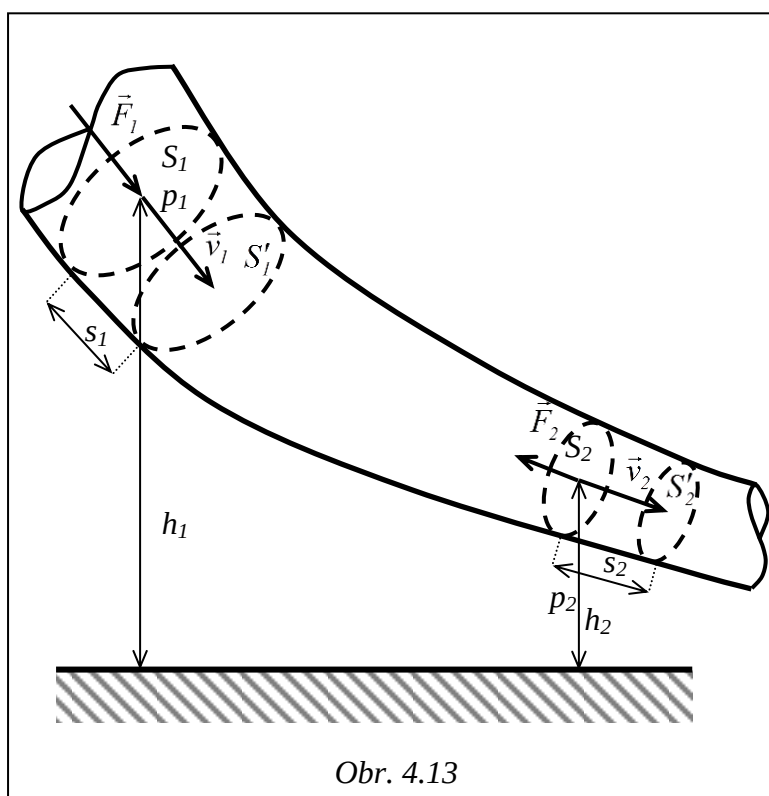
4.2.2 Bernoulliho rovnice

V proudové trubici, která se zužuje ve směru toku, ustáleně proudí nestlačitelná kapalina bez vnitřního tření. Předpokládáme, že ve všech bodech libovolného průřezu touto trubicí je stejná rychlost (rozložení rychlostí, tzv. rychlostní profil viz obr. 4.12a) a stejný tlak.

Zkoumejme část proudící kapaliny v proudové trubici ohraničenou průřezy S_1 a S_2 (viz obr 4.13). Ve velmi krátké době t se posune zvolená část kapaliny na horním konci o s_1 a na spodním konci o s_2 , takže bude mezi průřezy S'_1 a S'_2 . Při pohledu na obr. 4.13 vidíme, že výsledná změna je taková, jako kdyby malé množství kapaliny o hmotnosti m mezi průřezy S_1 a S'_1 přešlo do místa mezi průřezy S_2 a S'_2 (mezi průřezy S'_1 a S_2 se nic nezměnilo). Při přemístění tohoto malého množství kapaliny vnější tlakové síly $F_1 = p_1.S_1$ a $F_2 = p_2.S_2$ vykonaly celkovou práci

$$\Delta W_1 = p_1.S_1.s_1 - p_2.S_2.s_2$$

(záporné znaménko u druhého členu je proto, že tlaková síla $\vec{F}_2$ působí proti pohybu kapaliny), která se rovná změně celkové mechanické energie kapaliny ΔE . Současně na



Obr. 4.13

uvažované malé množství kapaliny o hmotnosti m působí tíhová síla $G = m.g$, tzn. že při jeho přemístění vykoná tato síla práci

$$\Delta W_2 = m.g.(h_1 - h_2),$$

která se rovná úbytku potenciální energie proudící kapaliny $-\Delta E_p$. Změna kinetické energie proudící kapaliny je

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}.m.(v_2^2 - v_1^2) .$$

Protože změna celkové energie kapaliny o hmotnosti m se rovná součtu změn potenciální

a kinetické energie

$$\Delta E = \Delta E_p + \Delta E_k$$

můžeme psát

$$p_1.S_1.s_1 - p_2.S_2.s_2 = -m.g.(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}.m.(v_2^2 - v_1^2)$$

$$p_1.S_1.s_1 + m.g.h_1 + \frac{1}{2}.m.v_1^2 = p_2.S_2.s_2 + m.g.h_2 + \frac{1}{2}.m.v_2^2 \quad (4.6)$$

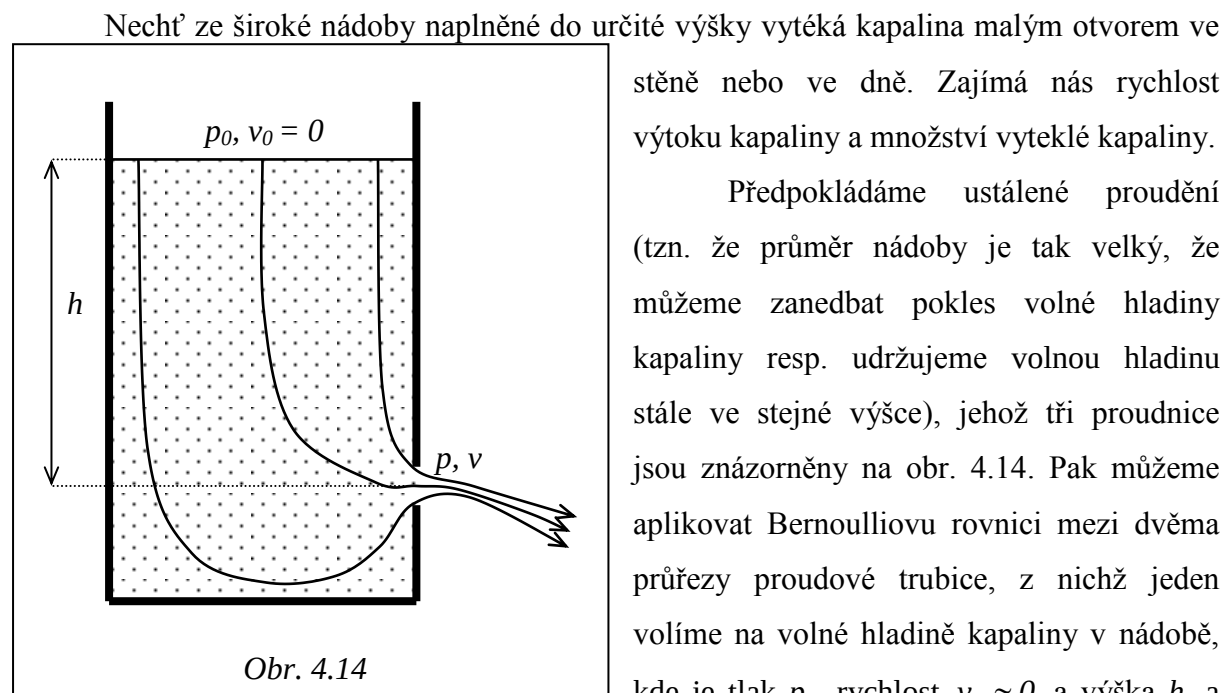
Součin $S_1 \cdot s_1 = S_2 \cdot s_2 = V$ vyjadřuje objem uvažovaného malého množství kapaliny hmotnosti m . Vydělíme rovnici (4.6) tímto součinem, a protože platí $m = \rho \cdot V$, dostaneme

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 = konst. , \quad (4.7)$$

což je **Bernoulliho rovnice** (rovnici odvodili Daniel Bernoulli (1700-1782) a jeho otec Johann Bernoulli (1667-1748)). Tato rovnice vyjadřuje zákon zachování mechanické energie pro proudící ideální tekutinu. První člen p_1 na levé straně rovnice představuje potenciální tlakovou energii kapaliny jednotkového objemu vzbuzenou vnějšími silami, druhý člen $\rho \cdot g \cdot h_1$ představuje potenciální energii kapaliny jednotkového objemu vzbuzenou tíhovou silou a třetí člen $\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2$ je kinetická energie kapaliny jednotkového objemu.

Použití Bernoulliho rovnice v praxi je velmi časté, je to jedna z nejdůležitějších hydrodynamických rovnic. My si ukážeme její aplikaci na dvou příkladech.

a) *Výtok kapaliny z nádoby malým otvorem.*



druhý ve výtokovém otvoru, kde je tlak p , rychlost v a výška $h = 0$ (vztažná hladina). Podle rovnice (4.7) platí

$$p_0 + h \cdot \rho \cdot g = p + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_0 - p)}{\rho} + 2 \cdot h \cdot g} \quad (4.8)$$

Jestliže jsou tlaky na volné hladině a ve výtokovém otvoru stejné ($p_o = p = \text{atmosférický tlak}$), kapalina vytéká působením vlastní tíže, pak rovnice (4.8) nabývá tvaru

$$v = \sqrt{2 \cdot h \cdot g} , \quad (4.9)$$

což je tzv. **Torricelliho vzorec**. Výtoková rychlost nezávisí na hustotě kapaliny a má stejnou velikost jako rychlost, které by kapalina nabyla volným pádem z výšky h (kapalina při výtokovém otvoru získala kinetickou energii na úkor její potenciální energie na úrovni volné hladiny).

Vytéká-li kapalina otvorem za přetlaku, tj. působíme-li např. na kapalinu pomocí pístu silou, kterou vyvoláme tlak p_o (injekční stříkačka apod.), můžeme v rovnici (4.8) zanedbat člen $2 \cdot h \cdot g$ (rozdíl několika řádů) a pro výtokovou rychlost dostaneme vztah

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_o - p)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho}} .$$

V tomto případě výtoková rychlost závisí na hustotě kapaliny.

Pro výpočet objemu vyteklé kapaliny za jednotku času nelze použít vztah $Q = S \cdot v$, nýbrž $Q = \alpha \cdot S \cdot v$, kde $\alpha < 1$. Příčinou je zúžení paprsku (contractio venae). Částice kapaliny přitékají k otvoru ze všech směrů. Na kraji otvoru nemohou změnit náhle svůj směr pohybu ve vodorovný (zvláště ty, které přitékají podél stěny). Stlačují vytékající kapalinu ke středu otvoru, vytékající paprsek se zúží (viz obr. 4.14). Jestliže výtokový otvor má tvar kruhu s ostrým okrajem, je $\alpha = 0,62$, při oblých okrajích je α jen o málo menší než 1.

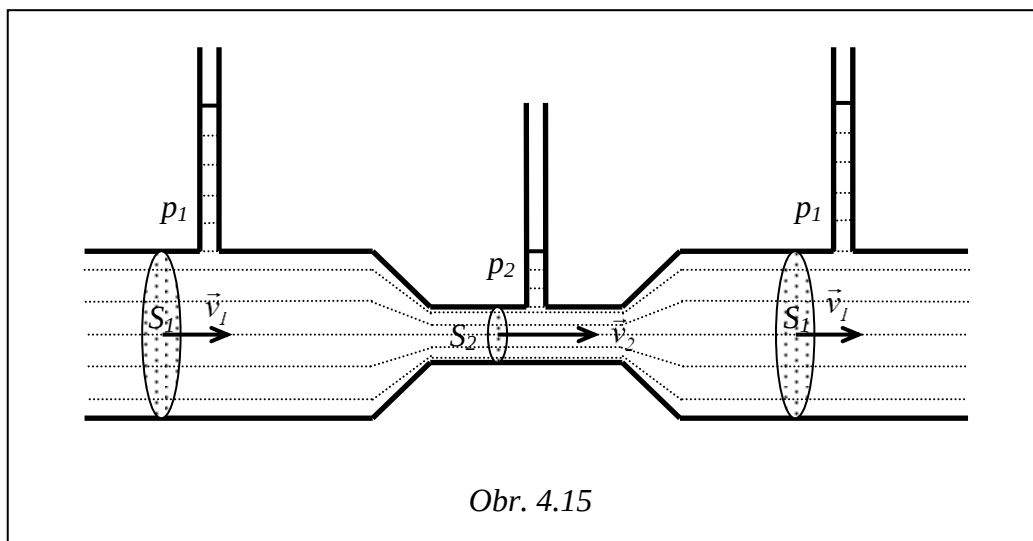
b) *Průtok ideální kapaliny vodorovným potrubím proměnného průřezu.*

Uvažujme vodorovnou trubici, která se uprostřed zužuje (viz obr. 4.15). V místě průřezu S_1 je tlak p_1 , rychlost v_1 , v místě průřezu S_2 je tlak p_2 , rychlost v_2 . Protože je $h_1 = h_2$, plyne z Bernoulliovy rovnice (4.7)

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 \quad (4.10)$$

V obr. 4.15 je $S_1 > S_2$, a proto podle rovnice kontinuity (4.5) je $v_1 < v_2$. Můžeme tedy psát

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2) = p_1 - p_2 .$$



Přírůstek kinetické energie objemové jednotky proudící kapaliny je roven úbytku jejího tlaku (= úbytku potenciální energie objemové jednotky).

Rovnice (4.10) platí pro libovolný průřez, takže ji můžeme aplikovat na jeden a týž průřez. Je-li kapalina v klidu, má ve zvoleném průřezu tlak p_0 , přičemž výraz $\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$ příslušný tomuto průřezu je roven nule. Dá-li se do pohybu rychlostí v , bude mít ve stejném místě jednotkový objem kapaliny kinetickou energii $\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$ a tlak klesne z hodnoty p_0 na hodnotu p , pro kterou z rovnice (4.10) vychází

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 . \quad (4.11)$$

Tlak p v proudící kapalině se proti tlaku p_0 , který byl na témž místě v klidné kapalině, zmenší o kinetickou energii objemové jednotky.

Výraz $\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 = p'$ se nazývá **tlak dynamický (hydrodynamický)**, p je **tlak statický (hydrostatický)** a p_0 je **tlak celkový**. Platí

$$p_0 = p + p' \quad (4.12)$$

Mění-li se průřez trubice, mění se i rychlost proudění kapaliny a mění se tedy i statický tlak (v užším průřezu je nižší). Z rovnice (4.10) plyne pro statický tlak v zúžené trubici

$$p_2 = p_1 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2) .$$

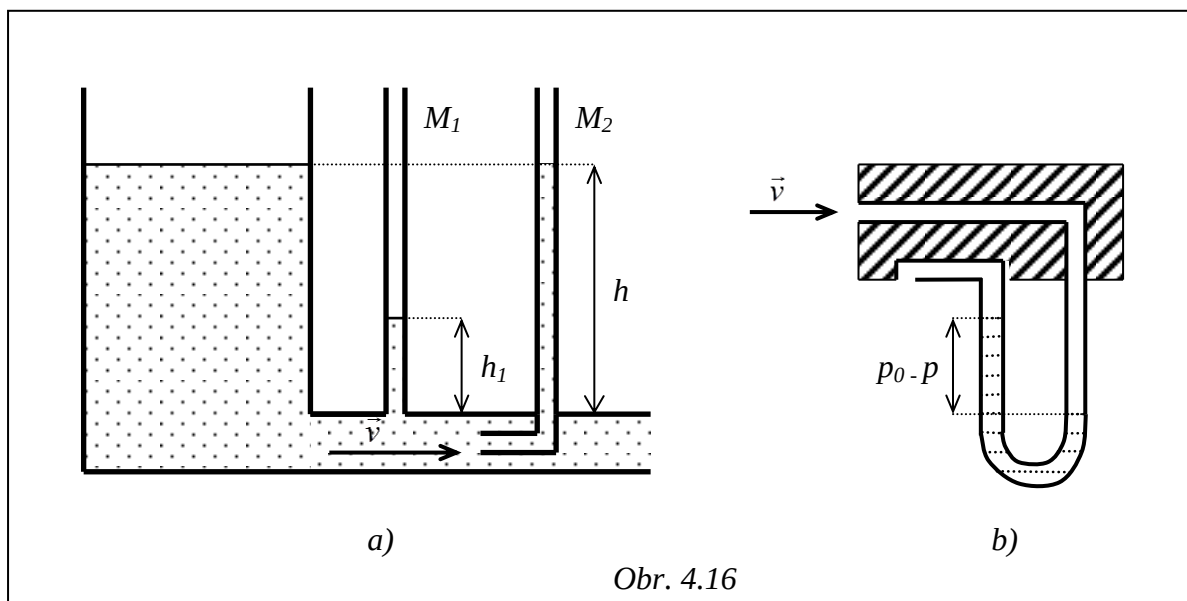
Je-li průřez S_2 velmi malý, může vzrůst rychlost v_2 tak, že statický tlak p_2 v tomto místě je nižší než vnější atmosférický tlak, vznikne tu **podtlak**. Projeví se tím, že prostřednictvím manometrické trubice v zúženém místě na obr. 4.15 se do proudící kapaliny nasává vzduch.

Na Bernoulliově rovnici a existenci podtlaku jsou založeny četné přístroje a zařízení, např. vodní vývěva, rozprašovač kapalin (fixírka), Bunsenův kahan, karburátor. Lze pomocí existence podtlaku také vysvětlit i různé jevy kolem nás, např. zvednutí střechy při prudkém větru, nadzvedání závodních aut při rychlé jízdě, obtížné dýchání při silném větru, přiblížení se rychle jedoucích lodí, které se míjejí v malé vzdálenosti od sebe.

Vhodně upravenými manometrickými trubicemi lze měřit všechny tři tlaky v rovnici (4.12) a také rychlost proudící tekutiny. Statický tlak p lze měřit z výšky h_1 sloupce v manometrické trubici M_1 (viz obr. 4.16a). Celkový tlak p_0 lze měřit Pitotovou trubicí, což je trubice zahnutá do pravého úhlu a ponořená do proudící kapaliny otvorem proti proudu (v obr. 4.16a je označena M_2). Proudící kapalina v této trubici vystoupí do výšky h , která odpovídá celkovému tlaku p_0 (kapalina je v trubici v klidu, z rovnice 4.11 plyne $p = p_0$). Rozdíl výšek $h - h_1$ je pak úměrný dynamickému tlaku $\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$.

Na obr. 4.16b je pak znázorněna Prandtlova trubice, což jsou v podstatě spojené trubice M_1 a M_2 z předchozího příkladu. Měří se jí rozdíl tlaků $p_0 - p$, který podle vztahu (4.11) se rovná

$$p_0 - p = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$$



Obr. 4.16

a odtud pro rychlost proudící tekutiny plyne

$$v = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}}$$

Prandtlůva trubice se např. používá pro měření rychlosti letadel.

4.2.3 Bernoulliho rovnice pro plyny

Odvození Bernoulliho rovnice pro plyny je ztíženo tím, že část práce vnějších sil se spotřebuje na stlačení plynu. Proto je zvýšení kinetické energie menší než u kapalin. Vychází se zde ze stejné úvahy jako u kapalin, malé množství plynu o hmotnosti m ve stavu 1 mezi průřezy S_1 a S'_1 bylo stlačeno do stavu 2 mezi průřezy S_2 a S'_2 (mezi průřezy S'_1 a S_2 se nic nezměnilo). Protože plyny nemají stálý objem, je nutné Bernoulliho rovnici vztahovat na množství plynu, které má jednotkovou hmotnost. Vydělíme proto rovnici (4.6) hmotností m . Dostaneme

$$\frac{p_1}{\rho_1} + g.h_1 + \frac{1}{2}.v_1^2 = \frac{p_2}{\rho_2} + g.h_2 + \frac{1}{2}.v_2^2 . \quad (4.13)$$

Celková práce vnějších sil je rovna rozdílu kinetické energie plynu ve stavu 2 a ve stavu 1, přičemž musíme odečíst práci W_v , kterou vykonají vnější síly při stlačení plynu jednotkové hmotnosti ze stavu 1 do stavu 2. Dosazením do rovnice (4.13) a po její úpravě obdržíme

$$\frac{1}{2}.v_2^2 - \frac{1}{2}.v_1^2 = g.(h_1 - h_2) + \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} - W_v \quad (4.14)$$

Výpočet práce W_v potřebné ke stlačení plynu ze stavu 1 do stavu 2 se provede podle vztahu v odst. 3.3 v kapitole 3. K zmenšení objemu plynu, jehož tlak je p , o dV je třeba práce

$$dW_v = -p.dV.$$

Protože při odvození uvažujeme jednotkovou hmotnost plynu, můžeme vyjádřit $V = \frac{1}{\rho}$. Pak

$$dW_v = -p.d\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Celková práce potřebná k přechodu plynu ze stavu 1 do stavu 2 závisí na tom, co se s plynem děje , např. jak se mění teplota plynu. Abychom se vyhnuli započítání vlivu teploty, provedeme příslušnou integraci per partes

$$W_v = -\int_1^2 p.d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} \quad (4.15)$$

Po dosazení (4.15) do (4.14) a zanedbáme-li úbytek potenciální energie způsobený prací tíhové síly (je velmi malý), obdržíme

$$\frac{1}{2} \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot v_1^2 = - \int_1^2 \frac{dp}{\rho} . \quad (4.16)$$

To je Bernoulliova rovnice pro ustálené proudění plynů bez vnitřního tření, podle níž zdrojem přírůstku kinetické energie je práce vnějších sil resp tepelná energie, která má stejný účinek.

Při malých rozdílech tlaku, kdy hustotu plynu můžeme považovat za konstantní, přejde rovnice (4.16) v rovnici (4.10) a plyny proudí jako by byly nestlačitelné.

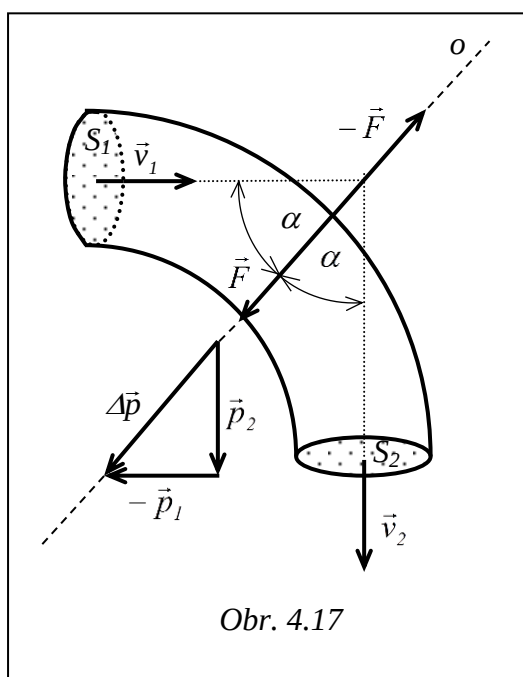
4.2.4 Hybnost proudící kapaliny

Proudí-li objemová jednotka kapaliny o hustotě ρ rychlostí $\vec{v}$, pak je její hybnost $\vec{p} = \rho \cdot V \cdot \vec{v}$, kde $V = 1 \text{ m}^3$. Tato hybnost se mění při každé změně rychlosti $\vec{v}$, ať už se mění její velikost nebo směr nebo obojí současně. Podle 2. Newtonova pohybového zákona $\frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \vec{F}$ každá změna hybnosti je způsobena vnější silou (nebo výslednicí vnějších sil)

$\vec{F}$. Tato síla je vyvolána buď stěnami (břehy), které omezují proud, nebo překážkami, které stojí proudu v cestě. Podle 3. Newtonova pohybového zákona působí také proudící kapalina na stěnu či překážku silou reakce $-\vec{F}$. Vyšetříme dva jednoduché, ale pro praxi důležité případy.

1. Proudění ideální kapaliny zakřivenou trubicí.

V zahnuté trubici, kterou proudí ideální kapalina, zvolíme dva průřezy S_1 a S_2 , v nichž



Obr. 4.17

kapalina proudí rychlostmi $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$ (viz obr. 4.17). Při ustáleném proudění je objemový tok Q stálý, takže oběma průřezy proteče za čas dt stejný objem kapaliny $Q \cdot dt$. Hybnosti tohoto objemu kapaliny v obou průřezích jsou

$$\vec{p}_1 = Q \cdot dt \cdot \rho \cdot \vec{v}_1 \quad \text{a} \quad \vec{p}_2 = Q \cdot dt \cdot \rho \cdot \vec{v}_2$$

Tyto hybnosti jsou u zakřivené trubice vždycky různé, neboť rychlosti $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$ mají jiný směr. Dochází při proudění kapaliny v zakřivené trubici ke změně její hybnosti, která se v čase dt rovná impulsu síly, kterou stěna trubice působí na

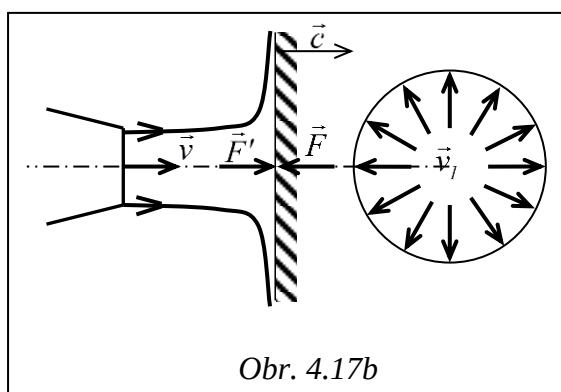
proudící kapalinu. Při ustáleném toku je tato síla po dobu dt stále stejná, takže podle 1. impulsové věty [viz 5] můžeme psát

$$d\vec{I} = \vec{F}.dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = Q.dt.\rho.(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = Q.\rho.(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

Síla $\vec{F}$ způsobuje změnu ustáleného proudu kapaliny a její směr je totožný se směrem vektorového rozdílu výstupní a vstupní rychlosti. Její velikost je $F = 2.Q.\rho.v.\sin\alpha$ (výpočet z obr. 4.17a pomocí sinové resp. kosinové věty). Podle zákona akce a reakce působí proudící kapalina na stěnu trubice silou $-\vec{F}$.

2. Dopad proudící kapaliny kolmo na rovinnou stěnu.

Proud kapaliny vytékající z trubice o průřezu S rychlostí $\vec{v}$ dopadá kolmo na velkou rovinnou stěnu, která se pohybuje rychlostí $\vec{c}$ (viz obr. 4.17b). Jestliže Q je objemový tok kapaliny při ustáleném proudění, pak přiteče za čas dt objem kapaliny $Q.dt$, jejíž hybnost je $Q.dt.\rho.\vec{v}$. Při



dopadu na stěnu se rozlije dopadající kapalina rovnoměrně ve všech směrech rychlostí $\vec{v}_i$, takže výsledná složka hybnosti všech částic kapaliny ve směru kolmém k $\vec{v}$ je rovna nulovému vektoru.

Hybnost částic kapaliny tekoucí po stěně má však ještě druhou složku a to ve směru pohybu stěny. Tato složka má hodnotu $Q.dt.\rho.\vec{c}$.

Celková změna hybnosti kapaliny po dopadu na stěnu je rovna impulsu síly, kterou působí pohyblivá stěna na kapalinu, což matematicky vyjádříme

$$\vec{F}.dt = Q.dt.\rho.(\vec{c} - \vec{v}) \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = Q.\rho.(\vec{c} - \vec{v}).$$

Podle Newtonova zákona akce a reakce působí proudící kapalina na pohyblivou stěnu stejně velkou silou $\vec{F}'$, avšak opačného směru

$$\vec{F}' = -\vec{F} = Q.\rho.(\vec{v} - \vec{c})$$

Výkon proudu tekutiny je

$$P = \vec{F}'.\vec{c} = Q.\rho.(\vec{v} - \vec{c}).\vec{c}$$

Velikost výkonu závisí na rychlosti $\vec{c}$. Výkon je nulový pokud je stěna v klidu nebo rychlost výtoku kapaliny je rovna rychlosti, se kterou se stěna pohybuje. Maximální bude pro $\vec{c}$ splňující rovnici (hledáme extrém funkce)

$$\frac{dP}{dc} = Q \cdot \rho \cdot (v - 2c) = 0 ,$$

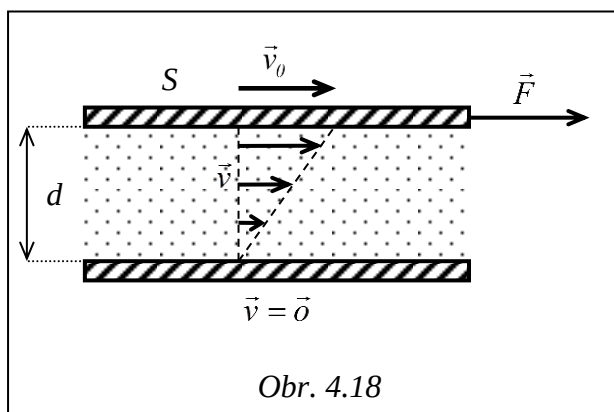
a to je $c = \frac{v}{2}$. Maximální výkon je pak $P = Q \cdot \rho \cdot \frac{v^2}{4}$. Je-li příkon, tj. energie dodaná proudící vodou za sekundu, $P_f = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \rho \cdot v^2$, pak maximální účinnost $\eta = \frac{1}{2}$.

Tato úvaha platí přesně vzato pro lopátkové kolo. Z předchozího je zřejmé, že maximálního výkonu a účinnosti se dosáhne, je-li obvodová rychlost kola (turbíny) rovna poloviční rychlosti dopadající vody. Výkon a účinnost lze však ještě zvýšit (až k 70 %) vhodnou volbou tvaru lopatky, na kterou dopadá proud kapaliny.

4.2.5 Proudění reálné (vazké) tekutiny

V předchozích částech kapitoly "Dynamika tekutin" jsme předpokládali, že při proudění tekutin nepůsobí proti pohybu žádné síly tření, nedochází k změnám tvaru způsobeným vzájemnými pohyby částic tekutin. Při proudění tekutiny trubicí jsme předpokládali, že ve všech místech průřezu se tekutina pohybuje stejnou rychlostí. Proudí-li reálná tekutina, ukazuje se, že rychlost tekutiny při stěně trubice je nulová a s rostoucí vzdáleností od stěny se postupně zvětšuje, až v ose trubice je největší. Tato změna rychlosti má příčinu v tom, že v proudící reálné tekutině vznikají tečné síly, tzv. **síly vnitřního tření**.

Abychom našli velikost těchto sil, představme si následující pokus. Máme dvě tuhé



rovinné desky, mezi kterými je voda (obr. 4.18). Spodní deska je v klidu a druhou pohybujeme rovnoběžně malou rychlostí $\vec{v}_0$. Při měření síly $\vec{F}$, kterou horní desku udržujeme v rovnoměrném přímočarém pohybu, zjistíme, že je přímo úměrná velikosti stykové plochy desky S a rychlosti $\vec{v}_0$ a nepřímo úměrná vzdálenosti desek d .

Můžeme psát

$$F = \eta \cdot \frac{v_0}{d} \cdot S , \quad (4.17)$$

kde konstanta úměrnosti η se nazývá **dynamická viskozita**.

Voda brání pohybu horní desky silou, která musí být stejně velká jako $\vec{F}$, ale opačně orientovaná. Tato síla se nazývá **vnitřní tření tekutiny**. Tato síla je vyvolávána vzájemným působením molekul dané tekutiny uvnitř vrstvy.

Změnu rychlosti, kterou bychom pozorovali při postupu od vrstvy k vrstvě kolmo na směr proudění, vyjadřujeme **gradientem rychlosti**, který udává změnu rychlosti dv připadající na jednotku délky ve směru kolmém k proudu. Uvnitř tekutiny při jejím pohybu vzniká **tečné napětí** τ , které je definováno jako síla připadající na jednotku plochy, je tedy

$\tau = \frac{F}{S}$. Na základě předchozích úvah můžeme rovnici (4.17) přepsat ve tvaru

$$\tau = \eta \cdot \frac{dv}{dy} \quad (4.18)$$

Tečné napětí v proudící tekutině je přímo úměrné rychlostnímu gradientu.

Konstantou úměrnosti je dynamická viskozita η , která závisí jen na druhu tekutiny a na teplotě (vliv tlaku je nepatrný). V soustavě SI má jednotku $kgm^{-1}s^{-1}$. Hodnota dynamické viskozity u kapalin s rostoucí teplotou klesá, u plynů roste. Hodnota dynamické viskozity plynů je značně menší než kapalin, např. vzduch má asi 100x menší dynamickou viskozitu než voda.

Převrácená hodnota dynamické viskozity $\varphi = \frac{1}{\eta}$ se nazývá **tekutost (fluidita)**. Podíl dynamické viskozity a hustoty ρ tekutiny nazýváme **kinematická viskozita**. Podle definice

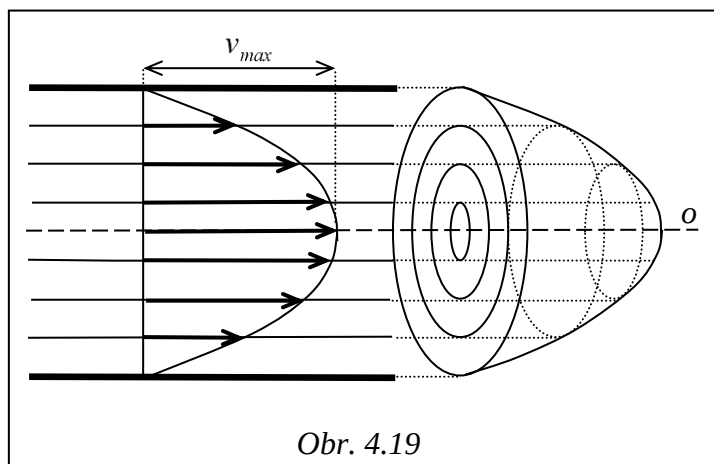
$\nu = \frac{\eta}{\rho}$. Jednotkou kinematické viskozity v soustavě SI je m^2s^{-1} .

4.2.6 Proudění laminární

Proudění ideální tekutiny je **nevířivé** nebo **potenciálové**. Malý objemový element, který volíme v proudící ideální tekutině, koná jen posuvný pohyb, protože na něj působí jen kolmé tlakové síly, které netvoří silové dvojice způsobující rotační pohyb.

Proudění reálné tekutiny se liší od proudění ideální tekutiny, neboť na proudění má velký vliv vnitřní tření. Objemový element reálné tekutiny při proudění koná pohyb rotační aniž by se měnily jeho rozměry - **laminární proudění**, nebo rotační, při kterém dochází ke změně jeho tvaru (v některých směrech se protahuje a v jiných zkracuje) - **turbulentní proudění**.

Při laminárním proudění, které je jednodušší, tekutina proudí v tenkých vrstvách



Obr. 4.19

navzájem rovnoběžných, které se spolu nemísí (proudnice jsou rovnoběžné). Můžeme si představit, že tekutina se při tomto proudění v úzké trubici rozpadá v jistý počet dutých válců (tloušťka stěny se rovná tloušťce vrstvy), které se po sobě posouvají (viz obr. 4.19). Při laminárním proudění úzkou trubicí je

rozložení rychlostí, jehož průběh dostaneme, znázorníme-li rychlost částice v každém bodu kolmého průřezu vektorem v osovém řezu trubice, **parabolické** (viz obr. 4.19).

Ukažme si stručně výpočet rozložení rychlostí při laminárním proudění přímou trubicí o poloměru r a délce l . V ose trubice uvažujeme proudové vlákno o poloměru y . Na počátku trubice je tlak p na konci p_0 . Síla působící pohyb tekutiny v uvažovaném proudovém vláknu je

$$F = \pi \cdot y^2 \cdot (p - p_0) = \pi \cdot y^2 \cdot \Delta p .$$

Na plášť proudového vlákna působí síla tření

$$F' = \tau \cdot S = -\eta \cdot \frac{dv}{dy} 2\pi \cdot y \cdot l ,$$

kde záporným znaménkem je vyjádřena skutečnost, že s rostoucí vzdáleností y od osy trubice rychlost v tekutině klesá. Při ustáleném proudění musí být síly F a F' v rovnováze, takže

$$\pi \cdot y^2 \cdot \Delta p = -\eta \cdot \frac{dv}{dy} 2\pi \cdot y \cdot l \quad \Rightarrow \quad dv = -\frac{1}{2\eta} \cdot \frac{\Delta p}{l} \cdot y \cdot dy .$$

Protože na vnitřní stěně trubice je rychlost tekutiny nulová, budeme integrovat v mezích od 0 do v resp. od r do y . Dostaneme

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta \cdot l} \cdot (r^2 - y^2) ,$$

což je rovnice paraboly, jež vystihuje rozložení rychlostí v trubicí.

Známe-li rozložení rychlostí, vypočítáme lehce objemový tok Q . Mezikružím šířky dy proteče za sekundu množství tekutiny $dQ = 2\pi \cdot y \cdot dy \cdot v$ a celkové množství tekutiny Q prošlé průřezem trubice za jednotku času je

$$Q = \int_0^r v \cdot 2\pi \cdot y \cdot dy = \frac{\pi}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p}{l} \cdot r^4 .$$

Tento vztah vyjadřuje zákon Hagenův - Poiseuilleův, který lze slovy vyjádřit takto: Objemový tok reálné tekutiny při laminárním proudění trubicí kruhového průřezu je přímo úměrný tlakovému spádu $\frac{\Delta p}{l}$ a čtvrté mocnině poloměru trubice a je nepřímo úměrný dynamické viskozitě.

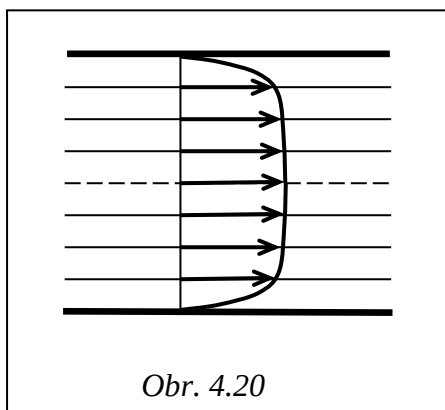
Na závěr této části se podívejme ještě na pohyb těles v reálné tekutině. Pohybuje-li se hladké těleso malou rychlostí v reálné tekutině, je její odpor proti pohybu tělesa vyvolán pouze viskozitou tekutiny. Obtékání tělesa tekutinou je v tomto případě laminární a pro velikost síly odporu platí Stokesův zákon. Velikost síly odporu je přímo úměrná první mocnině rychlosti, dynamické viskozitě a lineárním rozměrům tělesa. V případě, že pohybující se těleso má tvar koule, je velikost odporující síly podle Stokese

$$F = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$$

Použití Stokesova zákona v různých částech fyziky je významné. Pomocí něho lze určit dynamickou viskozitu metodou padající kuličky, v elektřině se užívá pro Millikanovo měření elementárního elektrického náboje a je důležitý i pro Einsteinovu teorii Brownova pohybu.

4.2.7 Proudění turbulentní.

Laminární proudění reálné tekutiny se udrží jen do určité kritické střední rychlosti. Při větších středních rychlostech se pravidelné laminární proudění poruší a vrstvy proudící tekutiny se začnou nepravidelně mísit. Takové proudění, ve kterém převládá rušivý vliv vírů, nazýváme **turbulentní**. (Vírem, který vzniká v důsledku vnitřního tření tekutiny, rozumíme otáčivý pohyb částic tekutiny uvnitř ostatní proudící tekutiny.)



Obr. 4.20

Při větších rychlostech nejsou částice tekutiny na stěnách trubice v klidu (drsnost stěn má tedy velký vliv na pohyb částic tekutiny). Částice tekutiny nemají ve všech místech stálou rychlost co do směru i velikosti. Přesto je možné určit průměrné rozložení rychlosti (rychlostní profil) v průtočném průřezu (viz obr. 4.20). Toto rozložení není již parabolické jako u laminárního proudění, nýbrž rychlost je v celé vnitřní části trubice

přibližně stálá kromě tenké vrstvy při stěně.

Anglický fyzik Reynolds zjistil pokusně v r. 1883, že přechod z proudění laminárního na turbulentní závisí na jediné bezrozměrné veličině, která byla na jeho počest nazvaná **Reynoldsovo číslo Re** , a je daná vztahem

$$Re = \frac{d \cdot \rho \cdot v}{\eta} = \frac{d \cdot v}{\nu} ,$$

kde d je délka charakteristického rozměru tělesa (např. průměr trubice či průměr koule umístěné v proudící tekutině), ρ je hustota proudící tekutiny, η je dynamická a ν kinematická viskozita tekutiny, v střední rychlost tekutiny. Při $Re \rightarrow \infty$ je proudění potenciální, pro velká Re je proudění turbulentní a malé Re znamená proudění laminární. Reynolds dále zjistil, že přechod mezi laminárním a turbulentním prouděním nastává pro jistou kritickou hodnotu $Re_k \in \langle 2000, 2400 \rangle$. Střední rychlost proudění tekutiny v tomto případě překročí tzv. kritickou střední rychlost v_k , pro niž platí

$$v_k = \frac{Re_k \cdot \eta}{d \cdot \rho} = \frac{Re_k \cdot \nu}{d} \approx \frac{2000 \cdot \nu}{d} .$$

Tak např. u vody teploty 20°C , pro niž je $\nu \approx 0,01 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ vychází při průtoku kapilárou o průměru $0,02 \text{ cm}$ kritická rychlost $v_k = 12 \text{ ms}^{-1}$. Takovou rychlost v kapiláře nedosáhneme, proto je zde zpravidla proudění laminární. Pro průměr trubice 2 cm vychází $v_k = 12 \text{ cms}^{-1}$ a pro průměr 20 cm je $v_k = 1,2 \text{ cms}^{-1}$. Je vidět, že ve velkých potrubích nastává proudění turbulentní, neboť tekutina proudí většinou rychleji než je kritická rychlost.

Jak už jsme uvedli, má vliv na proudění také drsnost stěn trubice. V trubici s dokonale hladkými stěnami, které se nechvějí a u kterých se při vtoku do trubice netvoří víry, může být laminární proudění i při $Re > 10000$. Tento stav je však labilní a sebemenší rozruch mění laminární proudění v turbulentní.

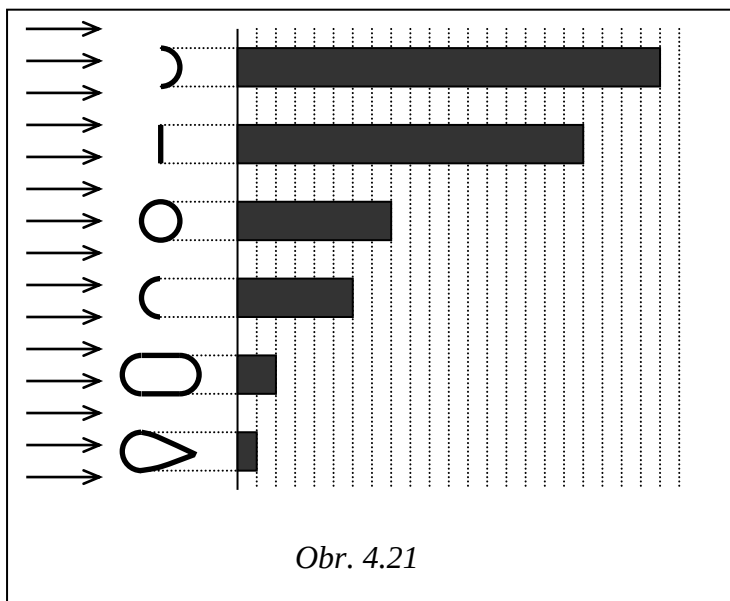
Význam Re není omezen jen na proudění tekutin v trubicích, ale má velký význam při studiu odporu, který kladou tělesa pohybující se tekutině.

4.2.8 Pohyb tělesa v tekutině

Pohybuje-li se tuhé těleso v tekutině, působí na něj síla, která se nazývá **odpor prostředí**. Tento odpor závisí na relativním pohybu tělesa a prostředí.

Budeme předpokládat, že rychlost tělesa je poměrně velká, ale ne taková, aby se proudící tekutina stlačovala. Má-li těleso průřez S ve směru kolmém na směr jeho pohybu, jeho rychlost vzhledem k tekutině je v , hustota tekutiny je ρ , pak velikost odporu prostředí se dá vyjádřit vztahem

$$F = C \cdot S \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 , \quad (4.19)$$

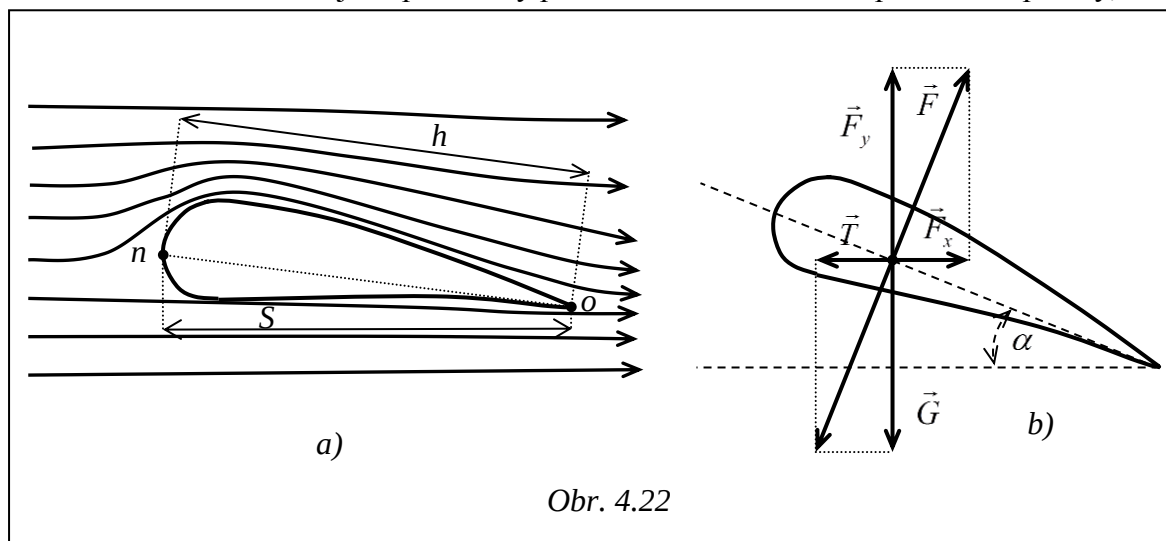


kde C je bezrozměrný odporový součinitel, jehož velikost závisí především na tvaru tělesa. Na obr. 4.21 je znázorněna závislost odporu prostředí na různém tvaru těles při jejich stejném průřezu a rychlosti. Kapskovitý (aerodynamický) tvar, který se hodně používá v technice při různých konstrukcích, má nejmenší odpor, protože omezuje tvoření vírů za tělesem. Proudění

za tělesem takového tvaru je skoro laminární.

Zajímavým z fyzikálního hlediska se jeví pohyb těles ve vzduchu, tedy **létání**, které spočívá v překonávání tíhové síly působící na těleso a odporu ovzduší. Tíhová síla je překonávána vztlakovou silou a síla odporu tahovou silou vrtule či proudového resp. raketového motoru.

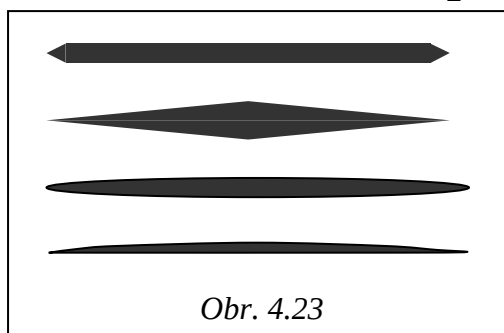
Profil křídel letadel bývá nesouměrný (jeden z mnohých tvarů profilu je na obr. 4.22a). Plochou křídla S se rozumí jeho pravoúhlý průmět na tečnou rovinu spodní části plochy, délka



h je hloubka profilu, n je náběžná hrana a o odtoková hrana. Spojnice odtokové a náběžné hrany svírá se směrem rychlosti v úhel náběhu α . Nesouměrný tvar křídla způsobí, že proudnice vzduchu na horní straně křídla se zhušťují, kdežto na spodní straně se jejich průběh skoro nezmění. Nad křídlem je rychlost proudění vzduchu větší než pod křídlem, proto podle Bernoulliho rovnice (viz odst. 4.2.2b) je statický tlak vzduchu na horní straně křídla menší

než tlak atmosférický, nastává podtlak, který způsobuje nasávání horní části plochy vzhůru, kdežto pod křídlem vzniká přetlak, který "tlačí" nosnou plochu nahoru (velikost podtlaku bývá několikrát větší než přetlaku). Na obr. 4.22b jsou zakresleny síly (a jejich složky), které za letu na křídlo působí. Jejich působiště je v tzv. tlakovém středu. Výslednou aerodynamickou sílu $\vec{F}$ je možné rozložit na dvě navzájem kolmé síly. Vodorovná síla $\vec{F}_x$ se nazývá odporová aerodynamická síla a je překonávána tahem $\vec{T}$ vrtule či plynů vytékajících tryskou. Svislá síla $\vec{F}_y$ se nazývá vztlačková aerodynamická síla a překonává tíhovou sílu $\vec{G}$ působící na letadlo Velikosti těchto sil jsou určeny vztahy

$$F_x = C_x \cdot \frac{\rho}{2} \cdot S \cdot v^2, \quad F_y = C_y \cdot \frac{\rho}{2} \cdot S \cdot v^2,$$



kde ρ je hustota prostředí a C_x , C_y jsou bezrozměrní součinitelé, jejichž velikosti závisí na Reynoldsově čísle, úhlu náběhu a tvaru křídla. Poměr $\frac{C_y}{C_x}$ je při normálním letu velký a dosahuje až hodnoty 17.

Tyto úvahy jsou správné pro rychlosti menší než je rychlost zvuku. Pro rychlosti blízké se k rychlosti zvuku, kdy dochází k stlačení vzduchu, se poměr $\frac{C_y}{C_x}$ rychle zmenšuje. Proto musí mít křídla letadel pro nadzvukové rychlosti odlišný tvar. Některé nadzvukové profily jsou na obr. 4.23.

Kontrolní otázky

1. Napište rovnici kontinuity a interpretujte její souvislost s objemovým tokem.
2. Napište (odvoďte) Bernoulliovu rovnici a uveďte, co vyjadřuje a co vyjadřují její jednotlivé členy.
3. Pomocí Bernoulliovy rovnice určete rychlost výtoku kapaliny malým otvorem v nádobě.
4. Použijte Bernoulliovu rovnici k diskusi průtoku ideální kapaliny vodorovným potrubím proměnného průřezu.
5. Objasněte pojem podtlak a ukažte jeho praktické využití, případně i jeho negativní vlivy.
6. Uveďte Bernoulliovu rovnici pro plyny a vysvětlete, jak se liší od Bernoulliovy rovnice pro ideální kapaliny.
7. Definujte hybnost proudící kapaliny a řešte případ proudění ideální zakřivenou trubicí.
8. Čím se liší proudění ideální tekutiny a reálné tekutiny?

9. Objasněte pojmy dynamická viskozita, vnitřní tření tekutiny, tečné napětí a kinematická viskozita.
10. Vysvětlete, jaké jsou odlišnosti u proudění turbulentního vzhledem k laminárnímu proudění.
11. V čem spočívá význam Reynoldsova čísla?
12. Které faktory ovlivňují pohyb tělesa v tekutině?
13. Jak ovlivňuje profil křídla letadla jeho let?