

1. ELEKTROSTATICKÉ POLE

1.1 Základní poznatky o elektrických nábojích

K vysvětlení elektrických jevů byl ve fyzice zaveden pojem elektrického náboje. Elektrický náboj vyjadřuje určitou vlastnost částice, která se projevuje silovým působením na jiné nabitě částice v jejím okolí. Nabitá částice vytváří v okolním prostoru elektrické pole, které působí silami na jiné nabitě částice, v něm umístěné. Silové účinky mezi nabitými částicemi závisí na jejich pohybovém stavu. ***Náboje, které jsou v určité inerciální soustavě v klidu, vytváří ve svém okolí elektrostatické pole. Náboje, které se pohybují, vytváří pole elektromagnetické.*** Toto pole má dvě složky : *elektrickou a magnetickou*. Elektrická složka působí na nabitě částice silou, která nezávisí na jejich pohybu. Tato síla se nazývá elektrická a v daném místě prostoru závisí pouze na elektrickém náboji částice (tělesa), na které působí. Magnetická složka elektromagnetického pole se projevuje také silou, ale pouze na nabitě částice v pohybu. Na nabitě částice v klidu magnetické pole nepůsobí. V první kapitole se budeme zabývat elektrostatickým polem a to nejprve elektrostatickým polem ve vakuu. V posledním odstavci (1. 7.) probereme elektrostatické pole v látkovém prostředí.

Připomeneme některé základní poznatky o stavbě látek, které budeme potřebovat. Stavební jednotkou každé látky je atom. Atom se skládá z částic trojího druhu : z protonů, neutronů a elektronů. Protony a neutrony tvoří jádro, jehož průměr je řádově 10^{-14} m. Kolem jádra se pohybují elektrony, které tvoří elektronový obal atomu. Hmotnost protonu je přibližně stejná jako hmotnost neutronu ($m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{kg}$), hmotnost elektronu je asi 2000 krát menší ($m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{kg}$). Protony jsou nabitě kladně, elektrony záporně. Jejich náboje jsou v absolutní hodnotě stejně velké. Náboj elektronu značíme e a nazýváme elementární náboj ($e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$). Neutron je částice bez elektrického náboje. Protože v normálním stavu je počet protonů v jádře stejný jako počet obíhajících elektronů, je každý atom a tedy i látka elektricky neutrální. Jestliže nějakým způsobem porušíme rovnováhu mezi protony a elektrony, to znamená, jestliže má těleso nadbytek nebo nedostatek elektronů, říkáme, že je elektricky nabitě.

Nejstarší a nejjednodušší způsob, jak dosáhnout nabití těles, je tření. Při tření dvou různých látek přecházejí elektrony ve větším počtu z jedné látky na druhou než naopak. Na jedné z těchto látek tak vzniká přebytek elektronů a látka se jeví záporně nabitě. Na druhé látce je elektronů nedostatek a proto je nabitě kladně. Jestliže třeme ebonitovou tyč srstí, přecházejí elektrony ze srsti na ebonit, který se stává záporně elektricky nabitě. Srst je nabitě kladně. Při tření skleněné tyče kůží, přechází elektrony z tyče na kůži. Přebytek elektronů na jednom tělese a jejich nedostatek na druhém tělese můžeme vyrovnat buď dotykem obou těles, nebo pomocí jiného tělesa, které přechod elektronů umožní. Při pokusech tohoto druhu zjistíme, že některé látky mají schopnost přenášet elektrický náboj a jiné nikoliv. Z toho plyne, že látky můžeme podle jejich schopnosti přenášet elektrický náboj zhruba rozdělit do dvou skupin: vodiče a nevodiče (izolanty). Nejběžnějšími vodiči jsou kovy. Kovy tvoří krystaly, jejichž atomy, uspořádané v mřížce, uvolnily část svých valenčních elektronů. Tyto uvolněné elektrony již nepatří jednotlivým atomům, ale celé soustavě atomů, tvořících krystal. Nazývají se volné elektrony. Volné elektrony vykonávají neuspořádaný (chaotický) pohyb uvnitř krystalové mřížce, tvořené kladnými ionty. Volné elektrony způsobují vysokou elektrickou vodivost kovů. Látka, která neobsahuje volné elektrické náboje se nazývá nevodič (izolant). Jestliže se dotkneme izolantu nabitým tělesem, může přejít část nábojů v místě dotyku na izolant, ale nemůže se izolantem šířit dál. Jako příklady izolantů můžeme uvést sklo, ebonit, keramické hmoty, olej. Nejlepším izolantem je vakuum. Přechodný typ látek mezi vodiči a izolanty představují polovodiče, jejichž elektrickou vodivost lze výrazně změnit vnějšími vlivy (změna teploty, ozáření).

Shrňme základní poznatky o elektrických nábojích:

1. Dva druhy náboje

Existují dva druhy náboje, kladný a záporný. Náboje stejného znaménka se odpuzují, náboje různého znaménka se přitahují. Experimentálně zjišťujeme pouze existenci přitažlivých a odpuzivých sil mezi náboji, které lze objasnit rozdělením nábojů na kladné a záporné. Přiřazení znaménka je věc úmluvy.

2. Náboj je vlastnost částice

Náboj je vždy vázán na určitou částici, existence samotných elektrických nábojů nebyla zjištěna.

Pro stručnost vyjadřování však mluvíme o nábojích, pohybu náboje, apod.

3. Nábojová symetrie

Ke každé nabitě částici existuje antičástice, lišící se pouze znaménkem náboje. Antičástice k protonu je antiproton, antičástici k elektronu je pozitron. Kdybychom v přírodě zaměnili všechny kladné náboje za záporné a naopak, z hlediska silového působení by se nic nezměnilo.

4. Zákon zachování náboje

Celkový náboj elektricky izolované soustavy, rovný algebraickému součtu všech nábojů se nemění.

Elektricky izolovanou soustavou rozumíme soustavu, omezenou uzavřenou plochou, přes kterou neprochází žádné nabitě částice. Je-li tedy náboj izolované soustavy na začátku libovolného děje Q , je na konci tohoto děje náboj soustavy opět Q . Zákon zachování náboje lze vyjádřit také takto: **Elektrický náboj nelze ani vytvořit ani zničit.** Důsledkem zákona zachování náboje je princip superpozice: **Při současném působení několika nábojů je účinek každého náboje stejný, jako by náboj působil sám.** Každý náboj se totiž projevuje pouze silovými účinky na jiné náboje (jediný izolovaný náboj nelze žádným způsobem zjistit). Velikost náboje můžeme tedy posoudit jen podle jeho účinků. Kdyby se přivedením dalšího náboje změnil účinek náboje původního, znamenalo by to porušení zákona zachování náboje.

5. Kvantování náboje

Náboj libovolné soustavy (částice, tělesa) se vždy rovná celistvému násobku elementárního náboje e . Platí tedy $Q = k \cdot e$, kde $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Náboj tělesa se tedy může měnit pouze nespojitě, po kvantech náboje velikosti e . Náboj elektricky nabitých těles je vždy mnohem větší než elementární náboj. Náboj předávaný při nabíjení a vybíjení těles je ve srovnání s elementárním nábojem tak velký, že jeho nespojitost nelze běžnými přístroji zjistit. Jak uvidíme později, kvantování podléhají i jiné fyzikální veličiny, např. energie a moment hybnosti.

Poznámka: Současná teorie elementárních částic předpokládá existenci tzv. kvarků, jejichž náboj je menší než e , například $\frac{1}{3}e$, $\frac{2}{3}e$.

6. Relativistická invariantnost náboje

Náboj částice nezávisí na tom, k jaké souřadné soustavě pohyb částice vztahujeme. Kdyby velikost náboje závisela na jeho rychlosti, při změně pohybového stavu náboje by se změnil i celkový náboj soustavy, což by znamenalo porušení zákona zachování elektrického náboje.

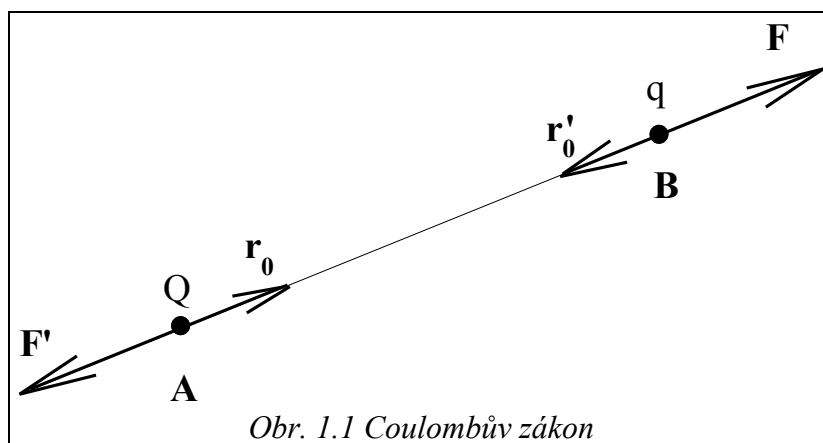
7. Vzájemné silové působení nábojů vyjadřuje kvantitativně Coulombův zákon

Jednotka náboje je v soustavě SI jednotkou odvozenou. Nazývá se coulomb a značíme ji C . Coulomb je náboj, který při ustáleném elektrickém proudu 1 ampéru projde průřezem vodiče za 1 sekundu ($C = A \cdot s$).

1. 2 Coulombův zákon

Základní účinky, které pozorujeme při vzájemném působení elektrických nábojů, jsou silové. Kvantitativní vztah mezi těmito silami našel Coulomb (1785), který prováděl měření elektrostatické síly mezi nabitými kovovými kuličkami. Vzájemné působení nabitých těles závisí na jejich tvaru a rozměrech. Výraz pro působící síly je nejjednodušší pro tzv. bodové náboje. **Bodovým nábojem rozumíme takové nabitě těleso, jehož rozměry jsou malé ve srovnání se vzdáleností, ve které účinek bodového náboje vyšetřujeme.**

Bodový náboj Q , který je v bodě A v klidu, vytváří elektrostatické pole, které působí na jiný bodový náboj q v bodě B silou



$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}_0, \quad (1.1)$$

kde r je vzdálenost nábojů Q a q , $\mathbf{r}_0$ značí jednotkový vektor polohového vektoru $\mathbf{r}$, vedeného od náboje Q k náboji q a ϵ_0 je univerzální konstanta, nazvaná permitivita vakua; $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}$. Vzhledem k definici jednotky kapacity, která se nazývá farad (F), platí $\text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2} = \text{F m}^{-1}$ (odstavec 1.5). Orientace působících sil je znázorněna na obr. 1.1.

Poznámky ke Coulombovu zákonu

1. Coulombův zákon v uvedeném tvaru platí také pro vzájemné silové působení dvou na-nabitých koulí, jsou-li náboje rozloženy rovnoměrně v celém objemu nebo na povrchu koulí. Veličina r ve vztahu (1.1) potom představuje vzdálenost středů těchto koulí (kulových ploch). Zkušební náboj q musí být dostatečně malý, aby nezpůsobil přerozdělení těch nábojů, které vytváří sledované pole. Přerozdělení nábojů by vedlo ke změně tohoto pole.

2. Síla, působící na náboj q leží na spojnici nábojů Q , q a míří buď od Q (je-li $Qq > 0$) nebo ke Q (je-li $Qq < 0$). Na obr. 1.1 je znázorněn případ, kdy $Qq > 0$.

3. Náboj q , je-li v klidu, vytváří ve svém okolí také elektrostatické pole, které působí na náboj Q silou, danou rovněž vztahem (1.1). Jednotkový vektor $\mathbf{r}_0$ musíme však nahradit jednotkovým vektorem $\mathbf{r}'_0$, orientovaným od q ke Q . Platí tedy $\mathbf{F} = -\mathbf{F}'$. Pro elektrostatické síly mezi náboji v klidu platí zákon akce a reakce. Coulombův zákon vyjadřuje také známý poznatek, že souhlasné náboje se odpuzují, nesouhlasné přitahují.

4. V Coulombově zákoně se nevyskytuje rychlost nabitých částic. V poli náboje, který je v dané vztažné soustavě v klidu, působí tedy na jiné náboje síly, nezávislé na jejich rychlostech.

5. Velikost Coulombovy síly je dána vztahem

$$F = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Slovy: **síla, kterou na sebe vzájemně působí dva bodové náboje Q a q je přímo úměrná součinu velikostí těchto nábojů a nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti mezi nimi.** Pro číselné výpočty je vhodné využít vyjádření

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ mF}^{-1}.$$

1.3 Intenzita elektrostatického pole

Uvažujme bodový náboj Q , který je zdrojem elektrostatického pole. Vlastnosti tohoto pole můžeme zkoumat tak, že budeme do něho vkládat bodové náboje a sledovat síly, které na ně působí. Z Coulombova zákona plyne, že na každý náboj q v určitém bodě pole působí síla F , přímo úměrná velikosti náboje q . Jestliže tedy vložíme do určitého bodu pole postupně kladné bodové náboje $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$, budou na ně působit síly $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$, které mají stejný směr a orientaci. Pro velikost těchto sil platí

$$F_1 : F_2 : F_3 : \dots : F_n = q_1 : q_2 : q_3 : \dots : q_n \text{ neboli } \frac{F_1}{q_1} = \frac{F_2}{q_2} = \frac{F_3}{q_3} = \dots = \frac{F_n}{q_n}$$

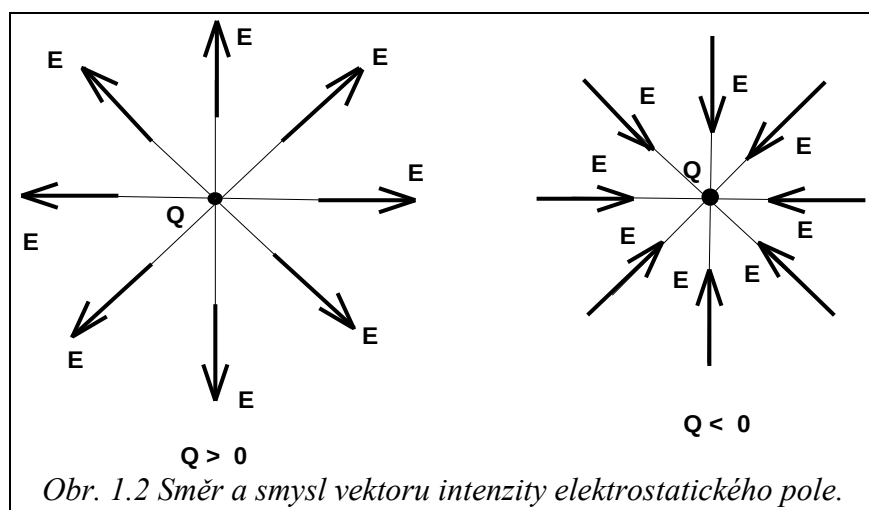
Zkušební náboj q musí být dostatečně malý, aby nezpůsobil přerozdělení těch nábojů, které vytváří sledované pole. Přerozdělení nábojů by vedlo ke změně tohoto pole. Poměr síly, působící na náboj a jeho velikosti q , nezávisí podle Coulombova zákona na velikosti náboje q , závisí v určitém bodě pole jen na náboji Q a charakterizuje tak elektrostatické pole náboje Q v daném bodě. Vektorová veličina F/q , kterou můžeme určit v každém bodě pole, je tedy v daném bodě určena jen nábojem, který toto pole vytváří a představuje tak vhodnou charakteristiku pole. Tato fyzikální veličina se nazývá intenzita elektrostatického pole, značíme ji E a platí pro ni následující vztah

$$E = \frac{F}{q}. \quad (1.2)$$

Slovy: *intenzita elektrostatického pole v daném bodě se číselně rovná síle, kterou působí elektrostatické pole na kladný jednotkový náboj v tomto bodě.*

Jednotka intenzity $E = \text{NC}^{-1}$. Z definice voltu (V) jako jednotky potenciálu (odstavec 1.5) plyne, že

$$\text{NC}^{-1} = \text{Vm}^{-1}.$$

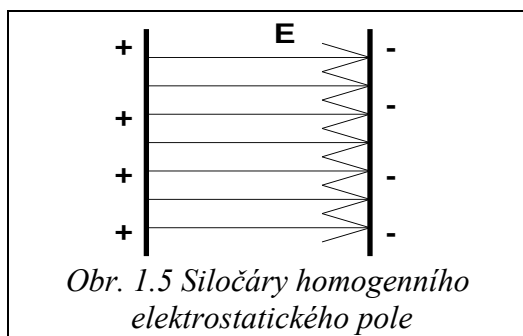


Sestrojíme-li v každém bodě prostoru v okolí náboje Q vektor intenzity elektrostatického pole, dostaneme vektorové pole, které názorně popisuje vlastnosti elektrostatického pole. Podle (1.2) a (1.1) leží vektor intenzity v libovolném bodě na spojnici tohoto bodu a bodového náboje Q a míří od Q (je-li $Q > 0$) nebo k náboji Q (je-li $Q < 0$). Vektorové pole v okolí náboje je znázorněno na obr. 1.2.

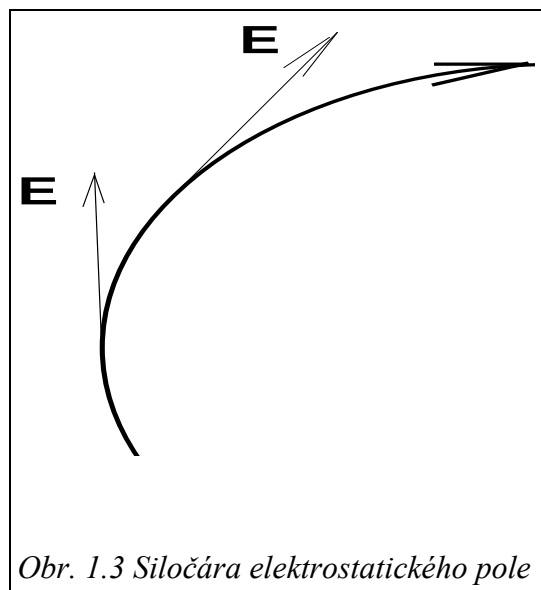
Z definice intenzity elektrostatického pole, vztah (1.2), plyne: v místě, kde intenzita elektrostatického pole je E , působí na náboj q síla

$$F = qE. \quad (1.3)$$

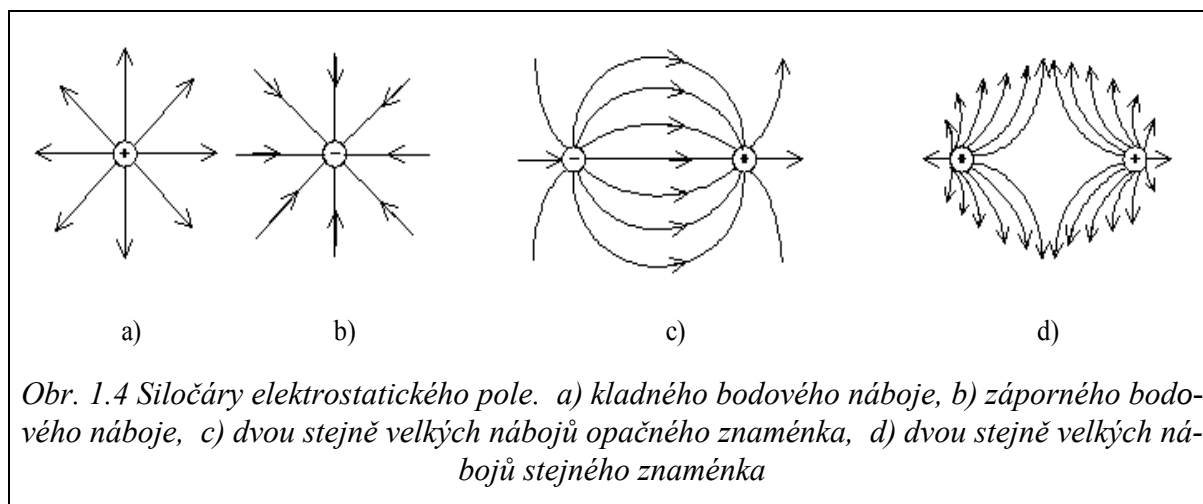
M. Faraday ke znázornění elektrostatického pole zavedl pojem siločar. Jsou definovány takto: *siločára je myšlená orientovaná křivka, jejíž orientovaná tečna v každém bodě udává směr a orientaci vektoru*



E. Siločára elektrostatického pole je znázorněna na obr. 1.3.



Vlastnosti elektrických siločar.



1. Každým bodem, v němž není elektrický náboj, prochází právě jedna siločára. Siločáry se tedy nemohou protínat.

2. Siločáry začínají na kladných nábojích nebo v nekonečnu a končí buď na záporných nábojích nebo v nekonečnu. Siločáry elektrostatického pole tedy nejsou uzavřené křivky. Siločáry některých vektorových polí jsou znázorněny na obr. 1.4.

Elektrostatické pole, pro které platí $E = konst.$, se nazývá homogenní. Homogenní pole je např. mezi dvěma rovnoběžnými kovovými deskami, z nichž jedna je nabitá kladně a druhá záporně. Siločáry homogenního pole jsou rovnoběžné a jsou znázorněny na obr. 1.5.

Siločára, která charakterizuje orientovaný směr intenzity pole, neudává sama nijak její velikost. Je ale možné zavést podmínku, která spojuje velikost intenzity pole s počtem siločar. Libovolné pole si můžeme představit rozdělené na malé oblasti, v nichž se intenzita mění tak málo, že lze považovat pole uvnitř každé oblasti za homogenní. Uvažujme v takové oblasti plošku ΔS kolmou k siločáram. Siločáry pak můžeme použít také ke kvantitativnímu popisu elektrostatického pole, jestliže jednotkovou ploškou povrchu ΔS vedeme počet siločar rovný hodnotě intenzity pole v oblasti plošky. V místech větší intenzity jsou potom siločáry hustší, v těch částech pole, kde je intenzita menší, jsou siločáry řidší. Podle uvedeného pravidla závisí tedy hustota siločar na intenzitě pole.

Výpočet intenzity elektrostatického pole

1.) Intenzita elektrostatického pole bodového náboje

Bodový náboj Q vytváří elektrostatické pole. Na náboj q , vložený do bodu A tohoto pole, který je ve vzdálenosti r od Q působí podle Coulombova zákona síla

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}_o,$$

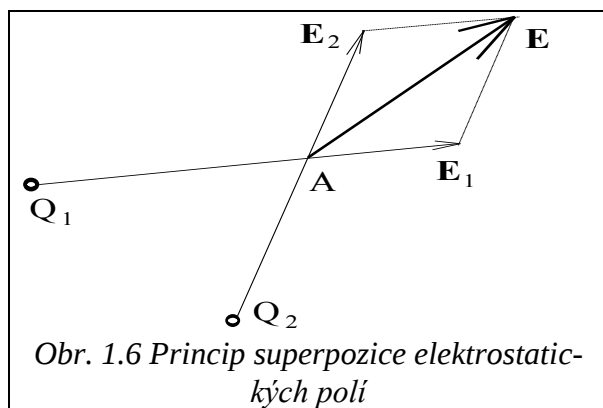
Podle definice (1.2) je intenzita elektrostatického pole v bodě A

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}_o. \quad (1.4)$$

Velikost intenzity elektrostatického pole je

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.5)$$

Pro představu o velikosti elektrostatických sil určíme intenzitu elektrostatického pole vyvolaného bodovým nábojem $1C$ ve vzdálenosti $r = 1km$. $E = 9 \cdot 10^9 \cdot 1 / 10^6 = 9 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Podle (1.2) dvě částice s náboji $1C$ by se tedy ještě na vzdálenost $1km$ odpuzovaly silou $F = 1 \cdot E = 9 \cdot 10^3 \text{ N}$.



2) Intenzita elektrostatického pole soustavy bodových nábojů

Každý náboj ze soustavy bodových nábojů $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ vytváří ve svém okolí elektrostatické pole. V libovolném bodě A (obr. 1.6) se tato pole skládají. Na bodový náboj q , umístěný v bodě A působí elektrostatické pole náboje Q_1 silou $\mathbf{F}_1$, elektrostatické pole náboje Q_2 silou $\mathbf{F}_2$, atd. Výsledná síla, působící na náboj q je dána vektorovým součtem působících sil, tedy

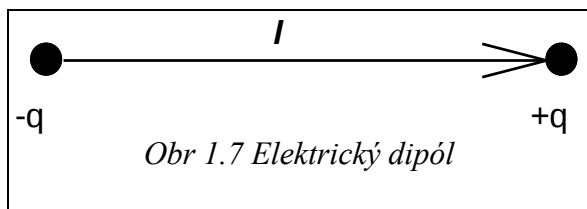
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i. \quad (1.6)$$

Podle (1.3) platí $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ a $\mathbf{F}_i = q\mathbf{E}_i$, kde $\mathbf{E}$ je intenzita výsledného pole a $\mathbf{E}_i$ je intenzita pole vytvořeného nábojem Q_i . Dosazením do (1.6) dostaneme

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \dots + \mathbf{E}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i.$$

Platí tedy: **intenzita elektrostatického pole soustavy bodových nábojů se rovná vektorovému součtu intenzit polí, vytvořených jednotlivými bodovými náboji (princip superpozice).**

Nejjednodušším, ale důležitým případem soustavy bodových nábojů je dvojice stejně velikých nábojů opačného znaménka, jejichž vzdálenost l je malá ve srovnání se vzdáleností nábojů od bodů, v nichž určíme intenzitu pole. Tato dvojice se nazývá elektrický dipól a je znázorněna na obr 1.7.



Elektrický dipól je charakterizován vektorovou veličinou, která se nazývá elektrický moment dipólu (značíme $\mathbf{p}$) a je definována vztahem $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$. Molekuly některých látek (např. vody) se chovají jako dipóly. Takové molekuly se nazývají polární. Vyšetříme chování dipólu v *homogenním* elektrostatickém poli. V takovém poli působí na póly dipólu síly

$\mathbf{F}_1 = q\mathbf{E}$ a $\mathbf{F}_2 = -q\mathbf{E}$.

Tyto síly jsou stejně velké a opačně orientované. Tvoří dvojici sil, která natáčí osu dipólu do směru pole viz. (obr. 1.8a). Moment dvojice sil

$$\mathbf{M} = \mathbf{l} \times q\mathbf{E} = q\mathbf{l} \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} . \quad (1.8)$$

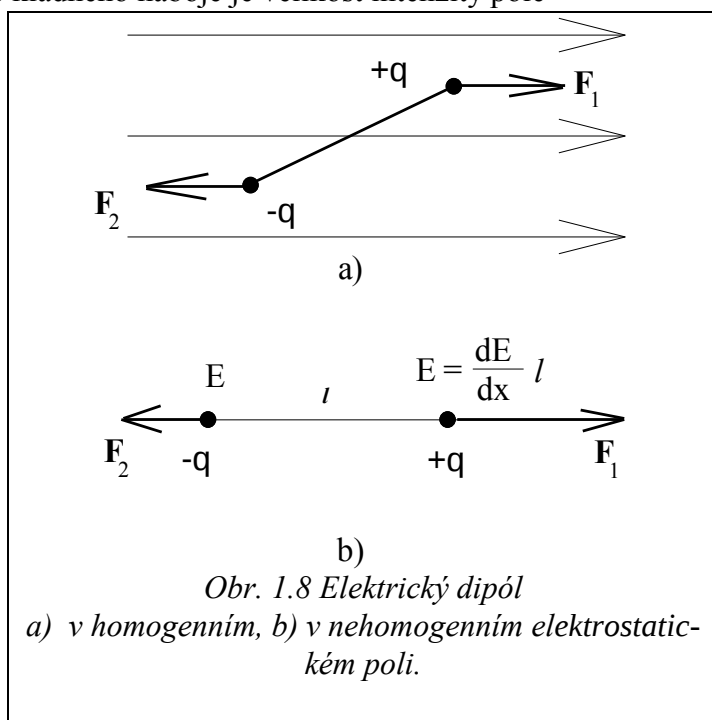
Tento moment se rovná nule, jsou-li vektory $\mathbf{p}$ a $\mathbf{E}$ rovnoběžné. Stabilní poloha je taková, když vektory $\mathbf{p}$ a $\mathbf{E}$ jsou souhlasně rovnoběžné.

V případě *nehomogenního* pole nejsou síly působící na oba póly stejně velké a kromě otáčivé dvojice sil působí na dipól také posuvná síla, která je tím větší, čím nehomogennější je pole v místě dipólu viz obr. 1.8b.

Uvažujme jednoduchý případ, kdy elektrický moment dipólu je rovnoběžný se směrem intenzity pole. V místě záporného náboje je velikost intenzity pole E a působící síla

$$F_2 = -qE ,$$

v místě kladného náboje je velikost intenzity pole



$$E + \frac{dE}{dx} l$$

a působící síla

$$F_1 = q(E + \frac{dE}{dx} l) .$$

Obě síly leží na téže přímce a velikost jejich výslednice je

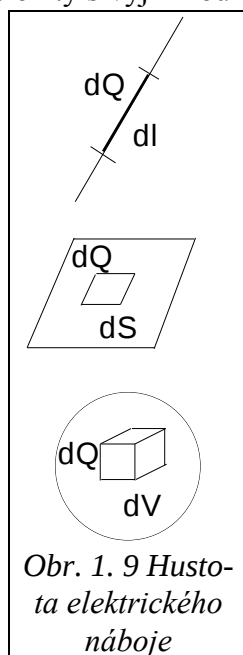
$$F = F_1 - F_2 = ql \frac{dE}{dx} = p \frac{dE}{dx} .$$

Výsledná síla tedy závisí na veličině $\frac{dE}{dx}$, tj. na spádu intenzity pole a na momentu dipólu $\mathbf{p}$ a způsobí, že dipól orientovaný souhlasně s polem ($\mathbf{p} \parallel \mathbf{E}$) je tažen ve směru rostoucího pole.

Elektrické dipóly velmi malých rozměrů se vyskytují v elektricky neutrálních i zeledrovaných látkách a mají základní význam pro vlastnosti izolantů. V nehomogenním elektrickém poli dochází (např. u prachových částic) k posunutí nábojů uvnitř látky a tím ke vzniku dipólů s určitým dipólovým momentem. Silovým působením jsou částice přitahovány k elektrodě, na které se usazují. Toho se využívá k odstraňování prachových částic z plynu.

3) Intenzita elektrostatického pole spojitě rozložených nábojů.

Zatím jsme studovali elektrostatická pole, vytvořená jedním nebo několika bodovými náboji. V praxi jsou však náboje nejčastěji spojitě rozloženy na křivkách, plochách nebo v objemu. Výpočet takových polí je velmi složitý s výjimkou těles jednoduchého geometrického tvaru, jako jsou nabitý dráty, desky nebo koule.



Spojitě rozložené náboje charakterizujeme těmito veličinami:

a) lineární hustota elektrického náboje

$$\tau = \frac{dQ}{dl} \quad \tau = \text{Cm}^{-1}$$

b) plošná hustota elektrického náboje

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \quad \sigma = \text{Cm}^{-2}$$

c) prostorová hustota náboje

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \quad \rho = \text{Cm}^{-3}$$

V případě rovnoměrně rozloženého náboje na křivce, ploše nebo v objemu platí :

$$\tau = \frac{\Delta Q}{\Delta l}, \quad \sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S}, \quad \rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}.$$

Ukážeme postup určení intenzity elektrostatického pole v případě spojitě rozložených nábojů. Náboj je například spojitě rozložen na ploše S . Náboj na elementární ploše dS má velikost $dQ = \sigma \cdot dS$ a můžeme jej považovat za bodový. Tento náboj vyvolá ve vzdálenosti r elektrostatické pole o intenzitě

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}_0 = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}_0.$$

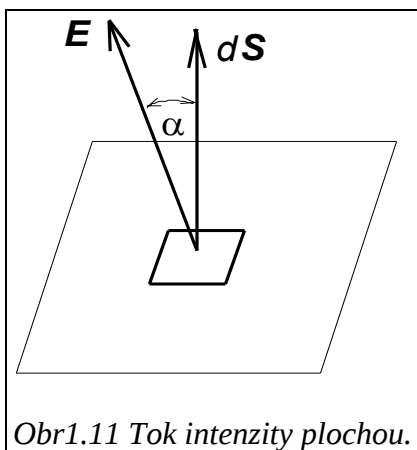
Celkovou intenzitu pole určíme integrací

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma dS}{r^2} \mathbf{r}_0.$$

1. 4 Gaussova věta

Zavedeme fyzikální veličinu, která se nazývá tok intenzity plochou. Představme si v elektrostatickém poli plochu S a na ní element plochy dS (obr.1.11). Vektor plošného obsahu $d\mathbf{S}$ má směr normály k dS a svírá úhel α s vektorem $\mathbf{E}$ v daném místě. Tok intenzity elektrostatického pole ploškou dS definujeme jako skalární součin vektorů $\mathbf{E}$ a $d\mathbf{S}$

$$dN = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E dS \cos \alpha.$$



Podle definice závisí tok intenzity na úhlu α mezi vektory $\mathbf{E}$ a $d\mathbf{S}$. Tok bude maximální pro $\alpha = 0$ a nulový pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

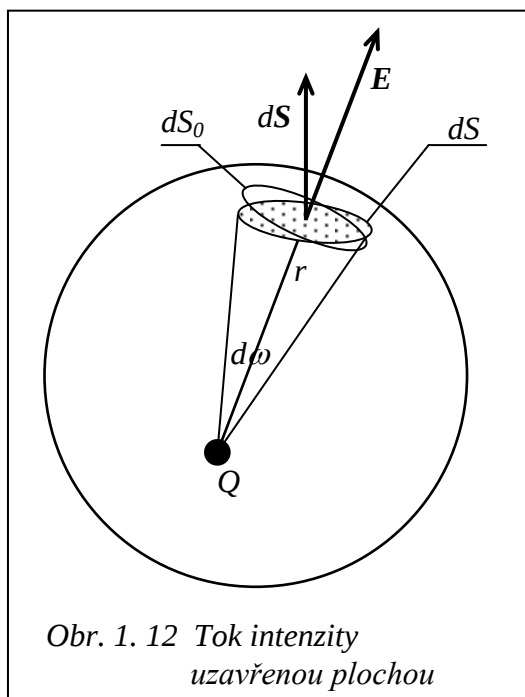
Tok intenzity celou plochou S vypočteme integrací

$$N = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.8)$$

Je-li plocha S postavena kolmo na siločáry homogenního elektrostatického pole (to znamená $\alpha = 0$, $\mathbf{E} = \text{konst.}$), dostaneme pro tok intenzity jednoduchý výraz

$$N = ES. \quad (1.9)$$

Tok intenzity je skalární veličina, která je kladná nebo záporná podle toho, jak volíme orientaci plochy. Je-li plocha S uzavřená a tok intenzity z ní vystupuje, pokládáme ho za kladný.



Určíme tok intenzity uzavřenou plochou, která obklopuje bodový náboj Q , (obr. 1.12).

Tok intenzity libovolnou ploškou dS ve vzdálenosti r od náboje Q je

$$dN = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot dS \cdot \cos \alpha = \frac{Q dS_0}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

kde $dS_0 = dS \cdot \cos \alpha$ je průmět plošky dS do roviny kolmé na průvodič $\mathbf{r}$. Po dosazení dostaneme

$$dN = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot r^2 d\omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\omega.$$

Pro stanovení celkového toku provedeme integraci po celé ploše S , tedy přes prostorový úhel $\omega = 4\pi$

$$N = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_0^{4\pi} d\omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Platí tedy

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (1.10)$$

Jestliže uvnitř uzavřené plochy S je více bodových nábojů, bude na pravé straně vztahu (1.10) vystupovat algebraický součet všech těchto nábojů. Máme tedy výsledek

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum Q_i}{\epsilon_0}, \quad (1.11)$$

který se nazývá Gaussova věta :

Tok intenzity elektrostatického pole libovolnou uzavřenou plochou se rovná algebraickému součtu nábojů uvnitř této plochy, dělenému permitivitou vakua.

Poznámky ke Gaussově větě.

1) Tok intenzity uzavřenou plochou nezávisí na její velikosti a tvaru.

2) Je-li náboj Q umístěn vně uzavřené plochy S , protínají siločáry, obsažené v prostorovém úhlu $d\omega$ plochu S vždy v sudém počtu plošných elementů. Vstupující tok má stejnou velikost jako tok z uzavřené plochy vystupující, ale opačné znaménko. Výsledný tok intenzity, daný součtem všech elementárních toků přes celou plochu je tedy roven nule.

Gaussovu větu jsme odvodili s použitím zákona superpozice a vztahu (1.4), to znamená jako důsledek Coulombova zákona. Naopak můžeme z Gaussovy věty odvodit Coulombův zákon.

Užití Gaussovy věty

Pomocí Gaussovy věty můžeme v některých případech jednoduše vypočítat intenzitu elektrostatického pole. Víme, že tok intenzity uzavřenou plochou nezávisí na tvaru této plochy. Předpokládejme, že najdeme takovou plochu, na které je intenzita elektrostatického pole konstantní. Potom má Gaussova věta jednoduchý tvar

$$E_n S = \frac{\sum Q_i}{\epsilon_0},$$

kde $E_n = E \cos \alpha$ je normálová složka intenzity elektrostatického pole. Z tohoto vztahu snadno vypočítáme intenzitu elektrostatického pole. Použití Gaussovy věty ukážeme na několika příkladech.

1. Intenzita elektrostatického pole nabitě kulové plochy

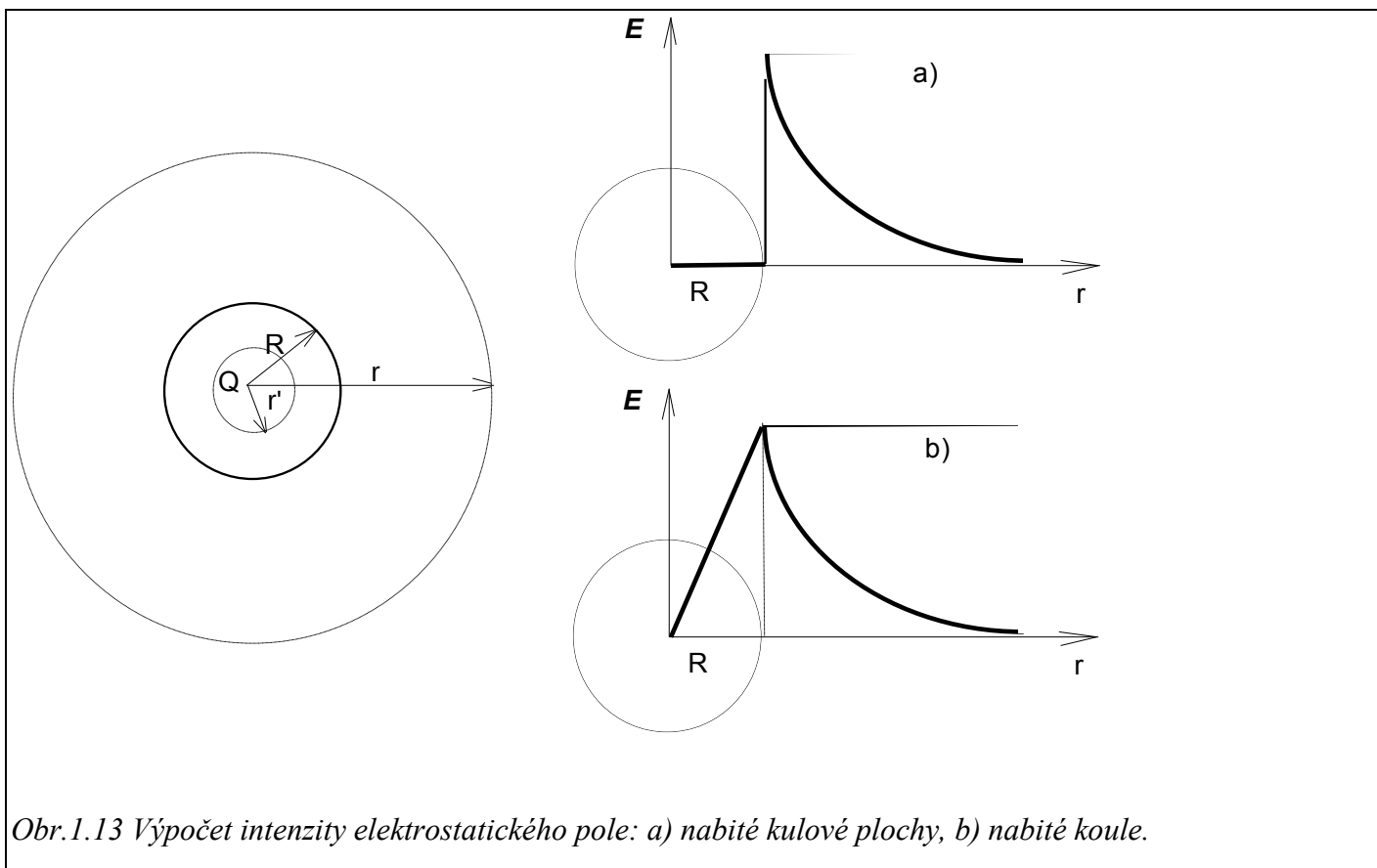
Je-li kulová plocha o poloměru R rovnoměrně nabitá nábojem Q , je zřejmé, že z důvodu symetrie má intenzita pole konstantní hodnotu na soustředných kulových plochách. Abychom určili intenzitu elektrostatického pole nabitě kulové plochy ve vzdálenosti r od středu, zvolme kulovou plochu poloměru r , jejíž střed je totožný se středem nabitě kulové plochy. Tok intenzity touto uzavřenou plochou je

$$N = E S = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Intenzita pole ve vzdálenosti r od středu nabitě koule je tedy

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Srovnáme-li tento výsledek se vztahem (1.5), vidíme, že elektrostatické pole kulové plochy rovnoměrně nabitě nábojem Q je vně této plochy stejné jako elektrostatické pole stejně velkého bodového náboje. Pro $r' < R$ dostaneme $E \cdot 4\pi r'^2 = 0$, protože uvnitř této uzavřené kulové plochy elektrický náboj není. Intenzita pole uvnitř rovnoměrně nabitě kulové plochy je tedy nulová.



Obr.1.13 Výpočet intenzity elektrostatického pole: a) nabité kulové plochy, b) nabité koule.

2. Intenzita elektrického pole nabité koule.

Celkový náboj Q koule o poloměru R je v jejím objemu rozložen s konstantní hustotou

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Postupem jako v případě nabité kulové plochy zjistíme, že vně nabité koule ($r > R$) je intenzita pole dána stejným výrazem

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Určíme nyní intenzitu pole ve vzdálenosti $r' < R$ od středu koule. Z důvodů symetrie bude intenzita pole stejná ve všech bodech kulové plochy poloměru r' , jejíž střed je ve středu koule a má v každém bodě radiální směr. Užitím Gaussovy věty na kulovou plochu o poloměru r' dostaneme

$$E \cdot 4\pi r'^2 = \frac{Q'}{\epsilon_0},$$

kde Q' je náboj koule o poloměru r' , pro který platí

$$Q' = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r'^3 = \frac{Q}{R^3} \cdot r'^3$$

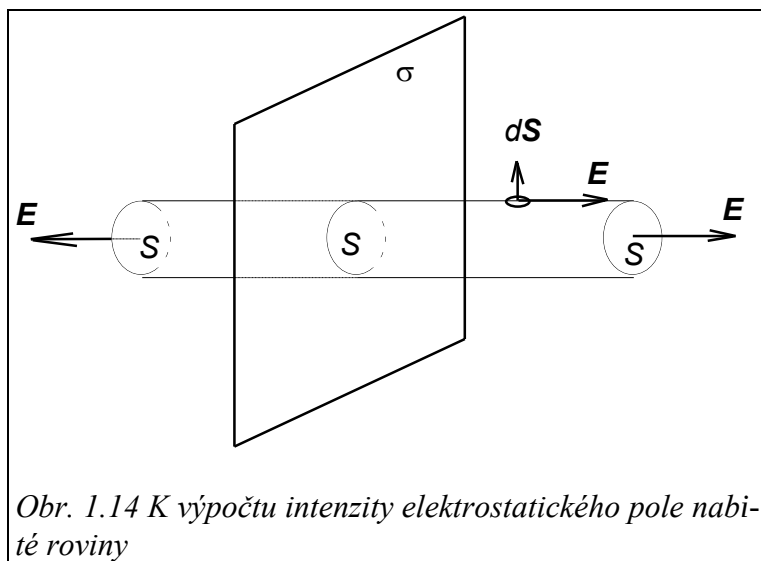
$$E \cdot 4\pi r'^2 = \frac{Q}{R^3} \cdot r'^3$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot r'.$$

Intenzita pole uvnitř koule tedy roste přímo úměrně se vzdáleností od jejího středu. Výsledky získané v případech 1. a 2. můžeme shrnout: kulově souměrný náboj Q vyvolá ve vnějším okolí stejné pole jako náboj Q , umístěný v jeho středu.

3. Intenzita elektrostatického pole nekonečné roviny, rovnoměrně nabitě.

Gaussovu větu použijeme na uzavřenou plochu tvaru přímého válce, jehož podstavy jsou rovnoběžné s nabitou rovinou (obr. 1.14).



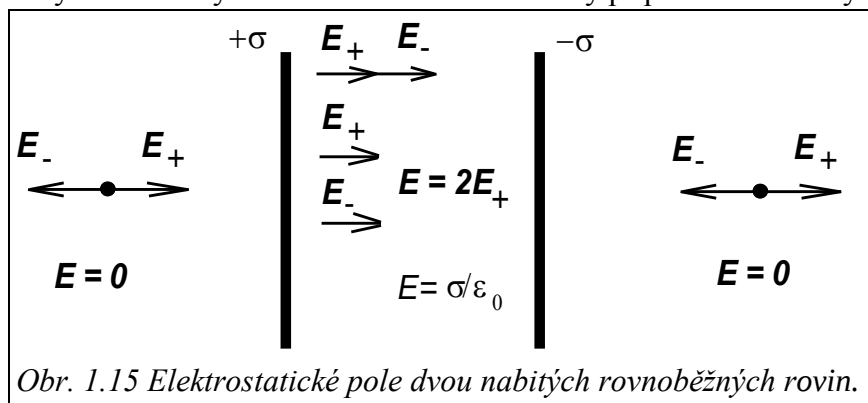
Je-li plošný obsah každé podstavy S , vytíná válec z nabité roviny plochu velikosti S . Náboj, který je uvnitř této uzavřené plochy je tedy $\sigma \cdot S$. Všechny body podstav jsou od roviny stejně vzdáleny, takže intenzita pole je na podstavách konstantní. Intenzita pole má směr kolmý na nabitou rovinu, protože náboj je rovnoměrně rozložen vzhledem k libovolné normále nabité plochy. Tok intenzity uzavřenou plochou se skládá z toků oběma podstavami a pláštěm válce. Tok každou podstavou je stejný a roven ES , tok oběma podstavami je $ES + ES = 2ES$. Tok intenzity pláštěm válce je nulový, protože v každém místě pláště

platí $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ($\mathbf{E}$ je kolmé na $d\mathbf{S}$). Podle Gaussovy věty

$$2ES = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0},$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Intenzita elektrostatického pole tedy v tomto případě nezávisí na vzdálenosti od nabité roviny, pole je homogenní. S použitím výsledku (1.13) můžeme podle principu superpozice určit také intenzitu výsledného pole soustavy rovnoběžných rovin. Probereme důležitý případ dvou takových rovin, nabitých nesouhlasně se



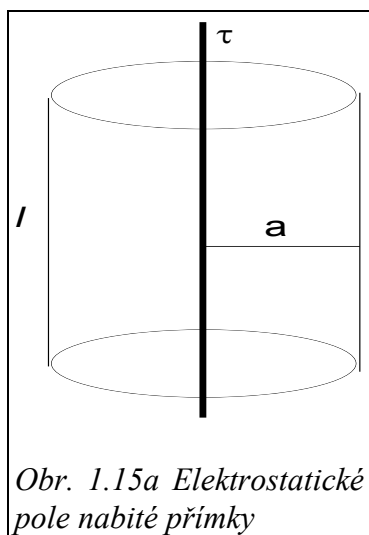
stejnými plošnými hustotami nábojů $+\sigma$ a $-\sigma$ (obr. 1.15). Vně ne-konečných rovin je intenzita elektrostatického pole nulová, protože intenzity pole od obou rovin zde mají stejnou velikost, ale opačnou orientaci. V prostoru mezi rovinami mají obě intenzity stejnou velikost i orientaci.

Pro velikost intenzity pole mezi rovinami tedy platí

$$E = 2 \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (1.14)$$

Ačkoliv odvozené výsledky platí přesně jen pro nekonečné roviny, můžeme je použít i pro desky konečných rozměrů, omezíme-li se na místa, jejichž kolmá vzdálenost od desek je malá vzhledem k vzdálenosti od okrajů desek.

4. Intenzita elektrostatického pole dlouhé, rovnoměrně nabité přímky (přímého drátu).



Z důvodů symetrie je intenzita pole konstantní na válcové ploše, jejíž osa je totožná s nabitou přímkou. Jako uzavřenou plochu obklopující náboj tedy zvolíme válcovou plochu o poloměru a a výšce l . Tok intenzity vychází pouze z pláště válce, takže

$$E \cdot 2\pi a l = \frac{\tau l}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 a}$$

Získali jsme tedy stejný výsledek jako v kapitole 1.3, výpočet pomocí Gaussovy věty je však jednodušší. Podobně lze pomocí Gaussovy věty ukázat, že stejné pole vytvoří nabitá válcová plocha.

Kontrolní otázky ke kapitole 1. Elektrostatické pole.

1. Vysvětlete pojmy: elektrický náboj, elementární náboj,. Může elektrický náboj nabité soustavy nabývat libovolných hodnot?
2. Objasněte vznik elektrického a magnetického pole. Jak se tato pole projevují?
3. Vyslovte zákon zachování elektrického náboje. Závisí náboj částice na její rychlosti ?
4. Napište a vysvětlete Coulombův zákon. Uveďte, za jakých podmínek platí. Jak se postupuje při výpočtu vzájemného působení, jestliže náboje nejsou bodové ?
5. Definujte intenzitu elektrostatického pole. Uveďte jednotku. Znázorněte vektor E v několika bodech v okolí náboje Q . Jakou silou působí elektrostatické pole na náboj q , který je v něm umístěn ?
6. Definujte siločáry elektrostatického pole a uveďte jejich vlastnosti.
7. Odvoďte vztah pro intenzitu elektrostatického pole bodového náboje.
8. Vyslovte princip superpozice elektrostatických polí.
9. Vysvětlete pojem elektrický dipól a definujte jeho elektrický moment.
10. Určete elektrický moment, kterým na elektrický dipól působí vnější homogenní pole Jak působí na dipól nehomogenní pole ?
11. Definujte lineární, plošnou a prostorovou hustotu elektrického náboje ?
12. Naznačte postup při určení intenzity elektrostatického pole spojitě rozložených nábojů.
13. Definujte tok intenzity elektrického pole plochou a určete jej pro rovinnou plochu v homogenním elektrickém poli.
14. Vyslovte a vysvětlete Gaussův zákon elektrostatiky.
15. Vysvětlete užití Gaussova zákona k výpočtu intenzity elektrostatického pole a proveďte výpočet pro nabitou kulovou plochu a rovnoměrně nabitou nekonečnou rovinu.