1. Úvod do lineárního programování

- Formulace úlohy LP
- Typy úloh LP
- Grafická metoda řešení

OPERAČNÍ VÝZKUM

Jak to začalo?

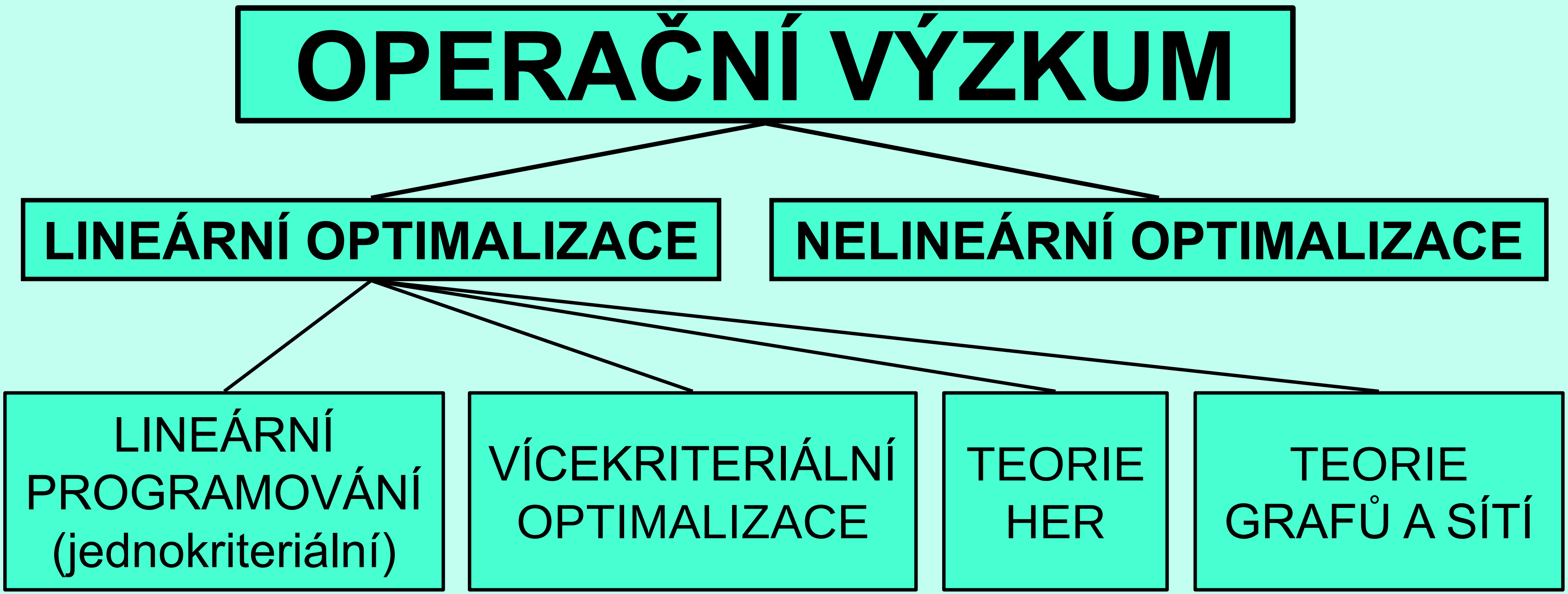
- OV jako interdisciplinární aktivita usilující o vyřešení komplexních vojenských problémů během WW2

A dál…

- rozšíření do civilní sféry
- rozvoj výpočetní techniky, OV jako předmět na VŠ

Operations Research, Operational Research

- soubor matematických modelů a technik pro řešení komplexních manažerských problémů
- vědní disciplína, resp. soubor relativně samostatných disciplín, které jsou zaměřeny na analýzu různých typů rozhodovacích problémů
- prostředek pro nalezení nejlepšího řešení daného problému při respektování celé řady různorodých omezení


OPERAČNÍ VÝZKUM
LINEÁRNÍ OPTIMALIZACE
NELINEÁRNÍ OPTIMALIZACE
LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ (jednokriteriální)
VÍCEKRITERIÁLNÍ OPTIMALIZACE
TEORIE HER
TEORIE GRAFŮ A SÍTÍ

OPERAČNÍ VÝZKUM – souhrn metod, jimiž řešíme rozhodovací situace.

Řešené problémy mají zpravidla více možných řešení a mezi nimi se hledá to řešení, které nejlépe vede k zadanému cíli = OPTIMÁLNÍ ŘEŠENÍ.

Fáze řešení problému:

1. Analýza problému z věcného (ekonomického) hlediska, vytváří se EKONOMICKÝ MODEL (= slovní zadání úlohy);
2. Sestaví se odpovídající MATEMATICKÝ MODEL;
3. Řeší se matematický model, hledají se konkrétní číselná ŘEŠENÍ;
4. INTERPRETACE výsledků řešení;
5. REALIZACE řešení.

K ekonomickému modelu…

- Výsledkem rozboru ekonomické reality bývá kvalitativní a kvantitativní popis situace (slovní zadání úlohy).
- Problémy studujeme na zjednodušených modelech.

EKONOMICKÝ MODEL obsahuje:

1. Cíl (kritérium) – jasně vymezen (např. maximalizace zisku, minimalizace nákladů, …);
2. Procesy, které probíhají při dané rozhodovací situaci (výroba jednotlivých typů výrobků);
3. Činitele ovlivňující daný proces a popis vztahů mezi procesy a činiteli (např. zdroje potřebné na výrobu výrobků).

Př.: Podnik vyrábí 3 druhy výrobků V_1, V_2 a V_3.
Na výrobu 1 výrobku V_1 spotřebuje 15 kg suroviny S,
3 kWh energie E a výroba trvá 1 h strojového času T.
Na 1 výrobek V_2 … 20 kg S, 4 kWh E a 0,5 h T.
Na 1 výrobek V_3 … 40 kg S, 7 kWh E a 3 h T.
Prodejem 1 výrobku V_1 má podnik zisk 700 Kč,
u V_2 … 500 Kč a u V_3 … 1300 Kč.
Podnik má k dispozici 10 000 kg S, 4 000 kWh E a 1000 h T.

Při jakém plánu výroby bude zisk podniku maximální?

Ekonomickým modelem je slovní zadání, které se však často uvádí ve formě tabulky.

Ekonomický model	Výrobky			Disponibilní množství
	V_1	V_2	V_3	
Surovina [kg]	15	20	40	10 000
Energie [kWh]	3	4	7	4 000
Str. čas [h]	1	0,5	3	1000
Zisk [Kč]	700	500	1300	max.

ovlivňující ČINITELÉ

CÍL (kritérium)

Číselné charakteristiky PROCESU VÝROBY V_1

K matematickému modelu…

- Abychom mohli daný ekonomický model řešit, musíme vyjádřit podmínky i cíl procesu pomocí matematických prostředků (proměnné, funkce, rovnice, nerovnice, …) → MATEMATICKÝ MODEL.
- Řešením matematického modelu dostáváme řešení úlohy.
- Jsou-li funkce, rovnice a nerovnice použité v daném matematickém modelu pouze lineární, jde o úlohu lineárního programování.

Př.: V podniku se provádějí 3 činnosti – výroba výrobků V_1, V_2 a V_3 → 3 proměnné:

x_1 … počet vyrobených výrobků V_1,
x_2 … počet vyrobených výrobků V_2,
x_3 … počet vyrobených výrobků V_3.

Matematické vyjádření omezujících podmínek:

- Nelze vyrábět záporné množství výrobků $\rightarrow$
  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ podmínky nezápornosti
- Při výrobě 1 výrobku V_1 spotřebujeme 15 kg suroviny S. Při výrobě x_1 těchto výrobků je spotřeba $15x_1$ kg suroviny S. Analogicky i pro V_2 a V_3.
  Spotřeba suroviny S celkem je $15x_1 + 20x_2 + 40x_3$ kg.
  Celková spotřeba nesmí přesáhnout disponibilní množství $\rightarrow$

S: $15x_1 + 20x_2 + 40x_3 \leq 10000$

Analogicky pro energii E a str. čas T:

E: $3x_1 + 4x_2 + 7x_3 \leq 4000$

S: $x_1 + 0{,}5x_2 + 3x_3 \leq 1000$

vlastní omezující podmínky

- Při výrobě x_1 výrobků V_1, x_2 výrobků V_2 a x_3 výrobků V_3 se dosáhne zisku
  $z = 700x_1 + 500x_2 + 1300x_3$ účelová funkce

- Požaduje se maximalizace zisku, tedy

$$z = 700x_1 + 500x_2 + 1300x_3 \rightarrow max$$

Shrnutí – MATEMATICKÝ MODEL:

$$\begin{aligned} z = 700x_1 + 500x_2 + 1300x_3 &\rightarrow max \\ 15x_1 + 20x_2 + 40x_3 &\leq 10000 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 &\leq 4000 \\ x_1 + 0{,}5x_2 + 3x_3 &\leq 1000 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

FORMULACE ÚLOH LP

Budeme pracovat se třemi typy úloh LP: úlohou výrobního plánování (viz výše), směšovací úlohou a rozdělovací úlohou.

ÚLOHA VÝROBNÍHO PLÁNOVÁNÍ

Př.: Podnik vyrábí 2 druhy výrobků V_1 a V_2. Tabulka udává spotřebu surovin S_1 a S_2 v kg potřebných na výrobu 1 ks výrobku V_1, resp. V_2.

Zisk z 1 výrobku V_1 je 3 Kč, z 1 výrobku V_2 je 2 Kč.

Dále je v tabulce uvedeno množství surovin, kterými podnik disponuje.

Stanovte optimální výrobní plán, aby podnik dosáhl maximálního zisku.

	Výrobky		Disponibilní množství
	V_1	V_2	
S_1 [kg/ks]	2	5	1 000
S_2 [kg/ks]	4	1	1 100
Zisk [Kč/ks]	3	2	max.

ekonomický model

MATEMATICKÝ MODEL:

Proměnné:

x_1 … počet výrobků V_1

x_2 … počet výrobků V_2

Výrobní plán

… *vektor výroby* $\vec{x} = (x_1, x_2)$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

Vlastní omezující podmínky: $\vec{x} = (x_1, x_2)$

$$S_1 : 2x_1 + 5x_2 \leq 1000$$

$$S_2 : 4x_1 + \ \ x_2 \leq 1100$$

Celkový zisk: → účelová funkce

$$z(\vec{x}) = z(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

(hovoříme o *maximalizační úloze*)

Celkově MATEMATICKÝ MODEL:

$$z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \qquad \text{účelová funkce}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\leq 1000 \\ 4x_1 + \ \ x_2 &\leq 1100 \end{aligned}\right\} \quad \text{vlastní omezení}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \qquad \text{podmínky nezápornosti}$$

FORMULACE ÚLOH LP (II)

SMĚŠOVACÍ ÚLOHA

Př.: Podnik má vytvořit krmnou směs, která by obsahovala alespoň 308 mg vápníku a alespoň 214 mg hořčíku. Používají přitom dvou typů krmiv:

1kg krmiva K_1 obsahuje 10 mg Ca a 8 mg Mg a stojí 1500 Kč;

1kg krmiva K_2 obsahuje 8 mg Ca a 1 mg Mg a stojí 240 Kč.

Úkolem je stanovit kolik každého krmiva použít tak, aby náklady na výrobu směsi byly co nejmenší.

	Krmiva		Požadovaná množství
	K_1	K_2	
Ca [mg/kg]	10	8	308
Mg [mg/kg]	8	1	214
Cena [Kč/kg]	1500	240	min.

→ ekonomický model

MATEMATICKÝ MODEL:

Proměnné:

x_1 … množství (počet kg) krmiva K_1 ve výsledné směsi

x_2 … množství (počet kg) krmiva K_2 ve výsledné směsi

$\vec{x} = (x_1, x_2)$ … *směšovací vektor* $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Shrnutí - MATEMATICKÝ MODEL:

$$z = 1500x_1 + 240x_2 \rightarrow \min$$ účelová funkce

$$\left.\begin{aligned} 10x_1 + 8x_2 &\geq 308 \\ 8x_1 + x_2 &\geq 214 \end{aligned}\right\}$$ vlastní omezení

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$ podmínky nezápornosti

(jedná se o *úlohu minimalizační*)

FORMULACE ÚLOH LP (III)

ROZDĚLOVACÍ ÚLOHA

Př.: Máme dostatečné množství základních lan o délce 32 m.

K dalšímu použití potřebujeme alespoň 12 ks 20m lan, alespoň 20 ks 11m lan a alespoň 26 ks 6m lan.

Určete optimální skladbu řezných plánů vzhledem k minimálnímu odpadu.

Nejprve musíme všechny řezné plány (tj. způsoby, kterými lze rozřezat základní 32m lana na 20m, 11m a 6m kusy) určit (viz tabulku dále).

32m	ŘEZNÝ PLÁN					Požadované množství
	I.	II.	III.	IV.	V.	
20m	1	1	0	0	0	12
11m	1	0	2	1	0	20
6m	0	2	1	3	5	26
Odpad [m]	1	0	4	3	2	→ min

→ ekonomický model

ŘP I.: ze základního lana délky 32 m nařežeme 1 ks 20 m dlouhého lana, 1 ks 11 m dlouhého lana a zbude odpad délky 1 m. ŘP II.:…

MATEMATICKÝ MODEL:

Proměnné: x_j $(j = 1, \dots, 5)$ … počet základních 32 m dlouhých lan rozřezaných podle *j*-tého řezného plánu. $x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 5$

Úkolem je určit vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, který udává skladbu řezných plánů (*rozdělovací vektor*).

Rozřežeme-li x_1 lan podle řezného plánu 1; … ; x_5 lan podle řezného plánu 5, nařežeme

$x_1 + x_2$ ks 20m lan,

$x_1 + 2x_3 + x_4$ ks 11m lan,

$2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5$ ks 6m lan,

a zbude odpad

$$z = x_1 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 \quad (\rightarrow \min)$$

Shrnutí – MATEMATICKÝ MODEL:

$$
\begin{aligned}
z = x_1 \quad\quad\quad + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 \quad &\to \min \quad && \text{účelová funkce}\\
x_1 + x_2 \quad &\geq 12 && \\
x_1 \quad + 2x_3 + x_4 \quad &\geq 20 && \text{vlastní omezení}\\
2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 &\geq 26 && \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 &\geq 0 && \text{podmínky nezápornosti}
\end{aligned}
$$

Př.: Určete optimální skladbu řezných plánů z hlediska minimálního počtu rozřezaných lan o délce 32 m.

Matematický model se od předchozího bude lišit jen účelovou funkcí (máme jiný cíl)

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \quad \to \min .$$

ŘEŠENÍ ÚLOH LP

Řešení úlohy LP = nalezení extrému (lineární) účelové funkce (maxima, nebo minima) na množině všech přípustných řešení (dané vlastními omezeními – lineárními – a podmínkami nezápornosti)

Př. (Úloha výrobního plánování)

$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$ účelová funkce → *hledáme maximum*

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\leq 1000 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 1100 \end{aligned}\right\} \text{vlastní omezení}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ podmínky nezápornosti

na této množině

***Def.**: Řešení úlohy LP je přípustné, jestliže splňuje všechny vlastní omezující podmínky a podmínky nezápornosti.*

GRAFICKÁ METODA ŘEŠENÍ ÚLOH LP

- metoda použitelná v případě, kdy úloha má jen dvě proměnné (x_1, x_2) – každý bod v rovině představuje právě jedno řešení (o souřadnicích x_1, x_2)

Postup (ve zkratce):

1. Určíme množinu všech přípustných řešení X_P.

   (vlastní omezení + podmínky nezápornosti)

2. Na této množině hledáme extrém účelové funkce.

   (maximum / minimum – dle zadání úlohy)

- všechny (ne)rovnice lineární → „vystačíme si s přímkami“

GRAFICKÁ METODA ŘEŠENÍ ÚLOH LP

Postup (v krocích):

1. Určíme množinu všech přípustných řešení X_P.

Vyznačíme množinu všech řešení každé omezující podmínky samostatně. Podmínkám typu nerovnice odpovídají poloroviny, rovnicím přímky. Množina všech přípustných řešení je dána průnikem všech těchto množin (polorovin a přímek).

2. Na této množině hledáme extrém účelové funkce.

- Vyznačíme normálový vektor $\vec{n}$ příslušný účelové funkci z.
- U maximalizační úlohy najdeme takovou kolmici na vektor $\vec{n}$, která je nejdále ve směru $\vec{n}$ a má neprázdný průnik s množinou X_P.
- U minimalizační úlohy pak najdeme takovou kolmici na vektor $\vec{n}$, která je nejdále proti směru $\vec{n}$ a má neprázdný průnik s množinou X_P.
- Tento poslední neprázdný průnik tvoří množinu X_{OPT} všech optimálních řešení úlohy LP.

GRAFICKÁ METODA ŘEŠENÍ ÚLOH LP

Př. Graficky řešte úlohu výrobního plánování zadanou matematickým modelem (viz výše):

$$\left.z = 3x_1 + 2x_2 \to \max\right\}\quad \text{2. Nalezneme maximum na } X_P$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 1000 \\ 4x_1 + x_2 &\le 1100 \\ x_1 \ge 0, x_2 &\ge 0 \end{aligned}\right\}\quad \text{1. Určíme množinu } X_P$$

- Množinu X_P všech přípustných řešení nalezneme jako průnik jednotlivých omezujících podmínek (nerovnic).
- 4 nerovnice → 4 poloroviny – zakreslíme každou zvlášť a určíme průnik

GRAFICKÁ METODA ŘEŠENÍ ÚLOH LP

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$ $\vec{n} = (3, 2)$ $(\overrightarrow{n'} = (300, 200))$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 1000,$$ (1) [0, 200]; [500, 0]

$$4x_1 + x_2 \leq 1100,$$ (2) [0, 1100]; [275, 0]

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$ (3), (4)

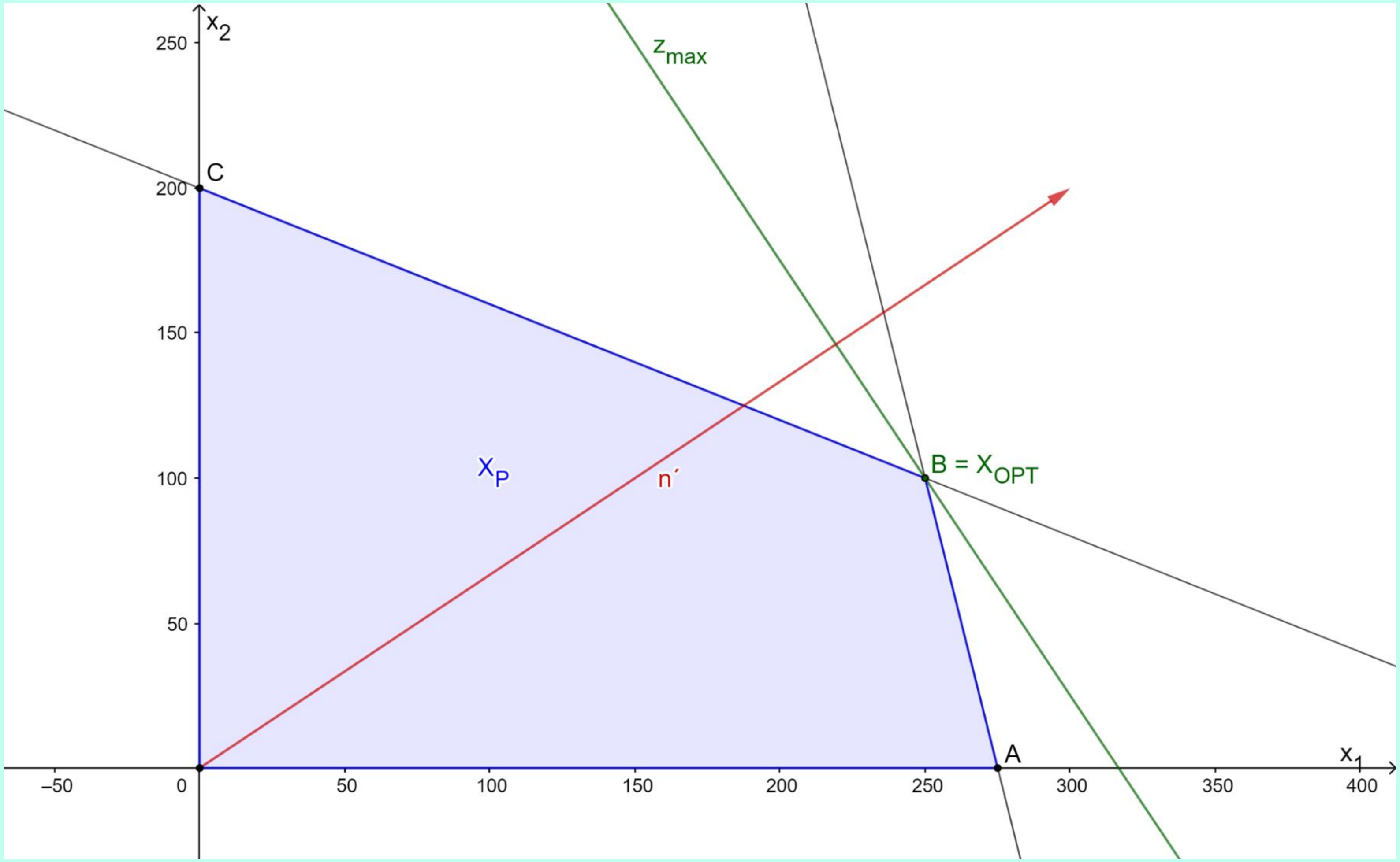
$X_P = (1) \cap (2) \cap (3) \cap (4)$

$X_P =$ 4úhelník OABC: O=[0, 0], A=[275, 0], B=[250, 100], C=[0, 200]

Na X_P hledáme maximum funkce z.

(kolmici na normálový vektor $\vec{n}$ funkce z, která je nejdále ve směru a má neprázdný průnik s X_P)

GRAFICKÁ METODA ŘEŠENÍ ÚLOH LP



$$X_{OPT} = B = [250, 100] \qquad z_{max} = 3 \cdot 250 + 2 \cdot 100 = 950\ Kč$$

Děkuji za pozornost.