

2. Matematické základy lineárního programování

- Soustavy lineárních rovnic
- Soustavy lineárních nerovnic

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Definice: Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých rozumíme systém rovnic

[illegible]

kde A je matice soustavy, $\vec{x}^T$ je vektor neznámých a $\vec{b}^T$ je vektor absolutních členů.

Matice $R = \left(A \middle| \vec{b}^T \right)$ je tzv. **rozšířená matice soustavy**.

Podmínky řešitelnosti udává **FROBENIOVA VĚTA**:

Soustava (*) má řešení $\Leftrightarrow$ hodnost matice A je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy, tj. $h(A)=h(R)$.

VĚTA O POČTU ŘEŠENÍ:

- a) je-li $h(A)=h(R)=n$... soustava (*) má právě 1 řešení,
- b) je-li $h(A)=h(R)=h < n$... soustava (*) má nekonečně mnoho řešení závislých na $n-h$ parametrech,
- c) je-li $h(A) < h(R)$... soustava (*) nemá řešení.

Pozn.: V úlohách LP se nejčastěji budeme setkávat s případem b), kdy soustava bude mít nekonečně mnoho řešení.

Př.: Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \\x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 5\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\1 & -2 & 1 & 5 & 5\end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\0 & 0 & 0 & 4 & 4\end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$h(A) = h(R) = 2 < 4 = n \Rightarrow \infty$ řešení

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$n - h = 4 - 2 = 2$ parametry, např.

$$x_4 = 1$$

$$\left. \begin{array}{l}x_2 = s \\x_3 = t\end{array} \right\} s, t \in R \Rightarrow x_1 = 1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2s - t$$

A tedy obecné řešení je $\vec{x} = \{2s - t, s, t, 1\}; s, t \in R$.

Chceme-li určit nějaké konkrétní řešení, zvolíme za s a t konkrétní čísla.

Př.: Určete alespoň 4 konkrétní řešení předchozí soustavy rovnic.

Zvolíme $s = 2; t = 1 \dots\dots \vec{x} = (3; 2; 1; 1)$

$$s = 1; t = 0 \dots\dots \vec{x} = (2; 1; 0; 1)$$

$$s = -1; t = 1 \dots\dots \vec{x} = (-3; -1; 1; 1)$$

$$s = 0; t = 0 \dots\dots \vec{x} = (0; 0; 0; 1) \quad \text{základní} \\ \text{degenerované řešení}$$

Definice: Řešení, ve kterém za parametry volíme nuly, se nazývá **základní řešení**. Neznámé $x_1, x_2, \dots, x_h$ jsou tzv. **základní (bázické) proměnné**, ostatní neznámé $x_{h+1}, x_{h+2}, \dots, x_n$ ($(n-h)$ parametrů) nazýváme **vedlejšími proměnnými**.

Př.: V našem příkladě jsme za parametry volili neznámé $x_2, x_3 \Rightarrow x_2, x_3$ jsou vedlejší proměnné. x_1, x_4 jsou základní proměnné.

Řešení $\vec{x} = (0, 0, 0, 1)$ je základní řešení soustavy, protože jsme za vedlejší proměnné (tj. za parametry) zvolili nuly.

Definice: Jsou-li všechny základní proměnné $x_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, h$, řešení nazýváme **nedegenerované**, je-li alespoň jedna základní proměnná $x_i = 0$, řešení je **degenerované**.

Př.: Řešení $\vec{x} = (0, 0, 0, 1)$ je degenerované, neboť základní proměnná $x_1 = 0$.

SLR v kanonickém tvaru

$$\begin{array}{rclcl}
 & + a_{1,h+1}x_{h+1} & + \dots & + a_{1,n}x_n & = b_1 \\
 & + a_{2,h+1}x_{h+1} & + \dots & + a_{2,n}x_n & = b_2 \\
 & & & \vdots & \\
 x_h & + a_{h,h+1}x_{h+1} & + \dots & + a_{h,n}x_n & = b_h
 \end{array} \quad (**)$$

ZÁKLADNÍ PROMĚNNÉ **VEDLEJŠÍ PROMĚNNÉ**

Z tohoto tvaru lze přímo určit základní řešení SLR;
 tj. $x_{h+1} = \dots = x_n = 0 \Rightarrow x_1 = b_1; x_2 = b_2; \dots; x_h = b_h \Rightarrow$
 A tedy základní řešení je $\vec{x} = (b_1, b_2, \dots, b_h; 0, \dots, 0)$.

Matice soustavy (**)

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,h+1} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,h+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{h,h+1} & \cdots & a_{h,n} \end{pmatrix}$$

obsahuje právě h sloupcových jednotkových vektorů přiřazených základním neznámým (obsahuje jednotkovou submatici).

Toho využíváme při řešení soustavy (*). Matici A upravíme pomocí elementárních ekvivalentních úprav na matici A_h . Soustavy (*) a (**) jsou ekvivalentní a řešení určíme ze soustavy (**).

K úpravám použijeme úplnou eliminaci.

Př.: Nalezněte všechna základní řešení SLR:

$$x_1 + 11x_2 + 4x_4 = 30$$

$$2x_1 + 8x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 18$$

$$6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 22$$

zákl. prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
	1	11	0	4	30
	2	8	-2	2	18
	0	6	2	2	22
x_1	1	11	0	4	30
	0	-14	-2	-6	-42
	0	6	2	2	22
x_1	1	11	0	4	30
	0	-8	0	-4	-20
x_3	0	3	1	1	11
x_1	1	3	0	0	10
x_4	0	2	0	1	5
x_3	0	1	1	0	6

○ **PIVOT = KLÍČOVÝ PRVEK**
(nelze za něj zvolit nulu!)

x_2 je vedlejší proměnná (parametr),
zvolíme $x_2 = 0 \Rightarrow \vec{x} = (10, 0, 6, 5)$.

zákl. prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_1	1	3	0	0	10
x_4	0	2	0	1	5
x_3	0	1	1	0	6
x_1	1	0	-3	0	-8
x_4	0	0	-2	1	-7
x_2	0	1	1	0	6
x_3	-1/3	0	1	0	8/3
x_4	-2/3	0	0	1	-5/3
x_2	1/3	1	0	0	10/3
x_3	0	0	1	-1/2	7/2
x_1	1	0	0	-3/2	5/2
x_2	0	1	0	1/2	5/2

x_2 je vedlejší proměnná (parametr),
zvolíme $x_2 = 0 \Rightarrow \vec{x} = (10, 0, 6, 5)$.

x_3 je vedlejší proměnná,
zvolíme $x_3 = 0 \Rightarrow \vec{x} = (-8, 6, 0, -7)$.

x_1 je vedlejší proměnná,
zvolíme $x_1 = 0 \Rightarrow \vec{x} = (0, \frac{10}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{5}{3})$.

x_4 je vedlejší proměnná,
zvolíme $x_4 = 0 \Rightarrow \vec{x} = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, 0)$.

Pozn.: Počet všech základních řešení soustavy ***m*** lineárně nezávislých rovnic o ***n*** neznámých je

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

V našem příkladě $m=3$ rovnice, $n=4$ neznámé $\rightarrow$ počet základních řešení je

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = \frac{4 \cdot 3!}{3!} = 4.$$

Př.: Nalezněte všechna základní řešení SLR:

zákl. prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
	1	1	-3	1	2
	4	1	0	1	14
	1	-2	1	-1	2
x_1	1	1	-3	1	2
	0	-3	12	-3	6
	0	-3	4	-2	0
x_1	1	0	1	0	4
x_2	0	1	-4	1	-2
	0	0	-8	1	-6
x_1	1	0	1	0	4
x_2	0	1	4	0	4
x_4	0	0	-8	1	-6

$$x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 2$$

$$4x_1 + x_2 + x_4 = 14$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 2$$

x_3 je vedlejší proměnná, zvolíme
 $x_3 = 0 \Rightarrow \vec{x}^{(1)} = (4, 4, 0, -6)$.

zákl. prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_1	1	0	1	0	4
x_2	0	1	4	0	4
x_4	0	0	-8	1	-6
x_3	1	0	1	0	4
x_2	-4	1	0	0	-12
x_4	8	0	0	1	26
x_3	0	0	1	-1/8	3/4
x_2	0	1	0	1/2	1
x_1	1	0	0	1/8	13/4
x_3	0	1/4	1	0	1
x_4	0	2	0	1	2
x_1	1	-1/4	0	0	3

x_3 je vedlejší proměnná, zvolíme
 $x_3 = 0 \Rightarrow \vec{x}^{(1)} = (4, 4, 0, -6)$.

x_1 je vedlejší proměnná, zvolíme
 $x_1 = 0 \Rightarrow \vec{x}^{(2)} = (0, -12, 4, 26)$.

x_4 je vedlejší proměnná, zvolíme
 $x_4 = 0 \Rightarrow \vec{x}^{(3)} = (\frac{13}{4}, 1, \frac{3}{4}, 0)$.

x_2 je vedlejší proměnná, zvolíme
 $x_2 = 0 \Rightarrow \vec{x}^{(4)} = (3, 0, 1, 2)$.

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH NEROVNIC

Úlohy LP vedou často k SLN.

Definice: Je-li A matice soustavy, $\vec{x}^T$ je vektor neznámých a $\vec{b}^T$ je vektor absolutních členů, rozumíme soustavou m lineárních nerovnic o n neznámých systém nerovnic

$$A\vec{x}^T \leq \vec{b}^T, \text{ tj. } a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i, \quad (\leq)$$

resp.

$$A\vec{x}^T \geq \vec{b}^T, \text{ tj. } a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i, \quad (\geq)$$

pro $i = 1, 2, \dots m$.

Nerovnice převádíme na rovnice pomocí tzv. **DOPLŇKOVÉ PROMĚNNÉ** x'_i .

$$x'_i = |L_i - P_i| \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m.$$

L_i , resp. P_i značí příslušnou levou, resp. pravou stranu i -té nerovnice

Potom ($\leq$) přejde v rovnice $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x'_i = b_i$,

($\geq$) přejde v rovnice $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x'_i = b_i$.

pro $i = 1, 2, \dots, m$.

Získáme S m LR o $m+n$ neznámých.

Každému řešení SLN odpovídá řešení SLR a naopak.

Př.: Řešte SLN

$$7x_1 + 5x_2 \leq 850$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 300$$

Určete řešení $(x_1, x_2; 0, 0)$.

Řešení: $7x_1 + 5x_2 + x'_1 = 850$

$$2x_1 + 2x_2 + x'_2 = 300$$

$$x'_1 \geq 0, x'_2 \geq 0$$

zákl. prom.	x_1	x_2	x'_1	x'_2	b_i
x'_1	7	5	1	0	850
x'_2	2	2	0	1	300
x'_1	2	0	1	-5/2	100
x_2	1	1	0	1/2	150
x_1	1	0	1/2	-5/4	50
x_2	0	1	-1/2	7/4	100

$x_1, x_2 \dots$ vedlejší proměnné
 $\vec{x}^{(1)} = (0, 0; 850, 300)$

$x_1, x'_2 \dots$ vedlejší proměnné
 $\vec{x}^{(2)} = (0, 150; 100, 0)$

$x'_1, x'_2 \dots$ vedlejší proměnné
 $\vec{x}^{(3)} = (50, 100; 0, 0)$

Děkuji za pozornost.