

3. Simplexová metoda řešení úloh LP

OBECNÁ ÚLOHA LP

Obecně jde o to, nalézt maximum (resp. minimum) lineární účelové funkce při splnění podmínek vyjádřených lineárními rovnicemi či nerovnicemi a podmínkami nezápornosti.

Soustavu lineárních nerovnic (SLN) lze vždy pomocí doplňkových proměnných převést na soustavu lineárních rovnic (SLR).

Obecně tedy můžeme matematický model úlohy LP zapsat následovně:

Hledáme řešení soustavy m rovnic o n neznámých ($m < n$)

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \tag{1}$$

takové, aby byly splněny podmínky nezápornosti, tj.

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \dots; x_n \geq 0, \quad (2)$$

a aby účelová funkce

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \quad (3)$$

nabývala maxima (resp. minima).

Příslušná SLR (1) má nekonečně mnoho řešení ($m < n$).

Smysl mají pouze **PŘÍPUSTNÁ ŘEŠENÍ**

(tj. řešení splňující navíc podmínky nezápornosti (2)).

Přípustné řešení, pro něž účelová funkce nabývá maximum (resp. minimum), se nazývá **OPTIMÁLNÍ ŘEŠENÍ**.

ZÁKLADNÍ VĚTA LP:

Úloha LP má optimální řešení, právě když má základní optimální řešení.

Důsledek:

Při hledání optimálního řešení se můžeme omezit jen na **ZÁKLADNÍ**

ŘEŠENÍ, kterých je konečně mnoho $\dots \binom{n}{m}$.

Smysl mají jen **ZÁKLADNÍ PŘÍPUSTNÁ ŘEŠENÍ**

(tj. základní řešení splňující i podmínky nezápornosti).

Algoritmus SM:

SLN

... převedeme SLN na SLR pomocí
doplňkových proměnných x'_i .

SLR

metoda umělé báze
(pomocné
proměnné, pomocná
úč. funkce)

SLR v kanonickém tvaru
→ VÝCHOZÍ ZÁKL. PŘÍP. ŘEŠENÍ

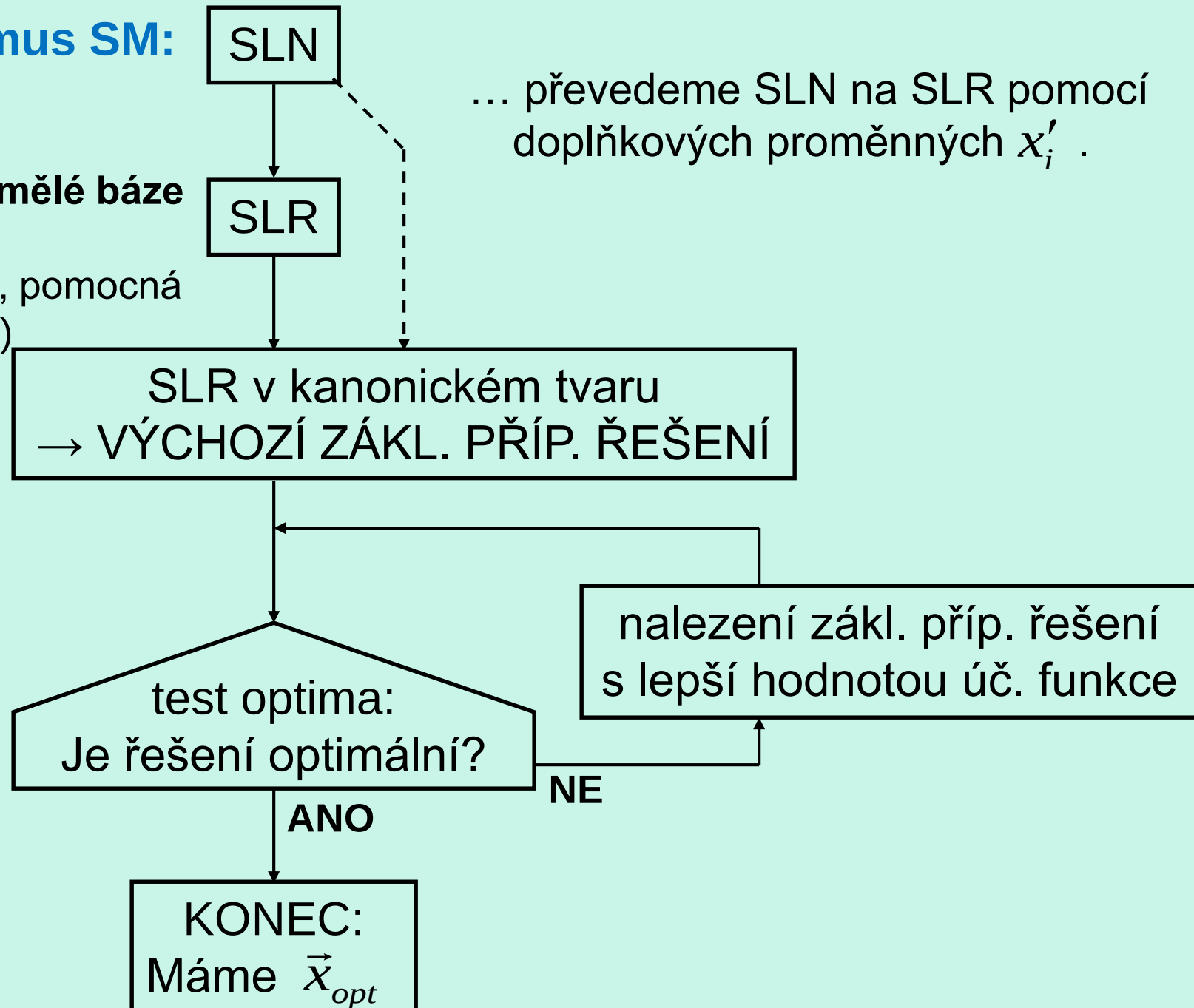
test optima:
Je řešení optimální?

nalezení zákl. příp. řešení
s lepší hodnotou úč. funkce

NE

ANO

KONEC:
Máme $\vec{x}_{opt}$



NALEZENÍ VÝCHOZÍHO ŘEŠENÍ

= převedení SLN na SLR v kanonickém tvaru s nezápornou pravou stranou všech rovnic, tj. $b_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$.

A) Při zadání úlohy ve tvaru $A\vec{x} \leq \vec{b}, b_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$.

Převedením obdržíme:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x'_1 = b_1$$

$$x'_1 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x'_2 = b_2$$

$$x'_2 = b_2$$

.....

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x'_m = b_m$$

$$x'_m = b_m$$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

Základní výchozí řešení je tvaru $\vec{x} = (0, \dots, 0; b_1, b_2, \dots, b_m)$.

Řešení je přípustné, neboť $b_i \geq 0$

(tj. vyhovuje podmínkám nezápornosti).

B) Je-li některé $b_i < 0$, pak danou rovnici násobíme (-1) .

C) Při zadání úlohy ve tvaru $A\vec{x} \geq \vec{b}$, $b_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$.

SLN převedeme na SLR, která však není v kanonickém tvaru.

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 \geq 5 & \longrightarrow & x_1 - 2x_2 - x'_1 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 2 & & 2x_1 + 3x_2 - x'_2 = 2 \end{array}$$

Rovnice nelze násobit (-1) , protože bychom obdrželi zápornou pravou stranu (řešení by nebylo přípustné). Výchozí přípustné řešení lze získat pomocí metody **UMĚLÉ BÁZE**, tj. zavedením pomocných proměnných a pomocné účelové funkce (později).

SIMPLEXOVÁ TABULKA

Př.: Uvažujme matematický model úlohy LP:

$$z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 1000,$$

$$4x_1 + x_2 \leq 1100,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



$$2x_1 + 5x_2 + x'_1 = 1000,$$

$$4x_1 + x_2 + x'_2 = 1100,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x'_1 \geq 0, x'_2 \geq 0$$

$$z - 3x_1 - 2x_2 = 0 \quad (\max)$$

1. SLN $\rightarrow$ SLR (zavedením doplňkových proměnných x'_i)

2. Anulujeme účelovou funkci.

Získali jsme SLR v kanonickém tvaru, tzn. že máme výchozí základní přípustné řešení.

Tuto soustavu přepíšeme do simplexové tabulky.

SIMPLEXOVÁ TABULKA

Zákl. prom.	x_1	x_2	x'_1	x'_2	b_i	$p = \frac{b_i}{a_{ik}}, \text{ pro } a_{ik} \geq 0$
x'_1	2	5	1	0	1000	
x'_2	4	1	0	1	1100	
z	-3	-2	0	0	0	max

Základní proměnné

Matice soustavy

Sloupec absolutních členů rovnic $b_i \geq 0$

Sloupec pro určení klíčového řádku

Koeficienty anulované účelové rovnice

Hodnota účelové funkce příslušná danému základnímu přípustnému řešení.

TEST OPTIMÁLNOSTI ŘEŠENÍ

1) U MAXIMALIZAČNÍCH ÚLOH platí:

je-li aspoň u jedné vedlejší proměnné x_j koeficient c_j v anulované účelové funkci (**řádek**) ZÁPORNÝ, je možné hodnotu z účelové funkce zvětšit, tzn., řešení ještě není optimální.

Je-li v **řádku** záporných koeficientů více, vybereme nejmenší z nich. Tímto výběrem je určen **klíčový sloupec**.

Jsou-li **všechny koeficienty** u vedlejších proměnných v anulované funkci **nezáporné**, řešení je **optimální**.

TEST OPTIMÁLNOSTI ŘEŠENÍ

2) U MINIMALIZAČNÍCH ÚLOH platí:

je-li aspoň u jedné vedlejší proměnné x_j koeficient c_j v anulované účelové funkci (**řádek**) KLADNÝ, je možné hodnotu z účelové funkce snížit, tzn. řešení ještě není optimální.

Je-li v **řádku** kladných koeficientů více, vybereme největší z nich. Tímto výběrem je určen **klíčový sloupec**.

Jsou-li **všechny koeficienty** u vedlejších proměnných v anulované funkci **nekladné**, řešení je **optimální**.

ZLEPŠOVÁNÍ ŘEŠENÍ

Zatím jsme určili, kterou proměnnou musíme mezi základní proměnné zařadit, aby se hodnota účelové funkce zlepšila. Nyní musíme rozhodnout, kterou ze základních proměnných musíme vyloučit (určení **klíčového řádku**).

Zjistíme, ve kterých rovnicích má zařazovaná proměnná kladné koeficienty (tj. vybereme všechny kladné koeficienty v klíčovém sloupci).

Těmito koeficienty $a_{ik} > 0$ dělíme absolutní členy b_i a podíly zapisujeme do pravého **sloupce** v simplexové tabulce.

Vybereme **minimum** ze všech podílů $p = \frac{b_i}{a_{ik}}$ pro $a_{ik} > 0$.

Rovnice, v níž je tento podíl nejmenší, obsahuje vylučovanou proměnnou (**klíčový řádek**).

Pozn.: Pravidlo pro určení vylučované proměnné (klíčového řádku) je stejné u maximalizačních i minimalizačních úloh.

Výměnu zařazované a vylučované proměnné provedeme úplnou eliminací.

POSTUP algoritmu simplexové metody:

- 1) Určíme *klíčový sloupec*, tj. zařazovanou proměnnou, podle toho, který záporný (u max. úloh), resp. kladný (u min. úloh) koeficient v **řádku** odpovídajícím účelové funkci má největší absolutní hodnotu.
- 2) Určíme *klíčový řádek*, tj. vylučovanou proměnnou, podle toho, který podíl $p = \frac{b_i}{a_{ik}}$ pro $a_{ik} > 0$ je ve **sloupci** nejmenší.
- 3) Určíme *klíčový prvek* (pivot) jako průsečík klíčového řádku a klíčového sloupce.
- 4) Provedeme úplnou eliminaci:
Dělíme všechny prvky klíčového řádku klíčovým prvkem.
Prvky klíčového sloupce nahradíme základním sloupcovým jednotkovým vektorem (s „1“ na pozici pivota).
Ostatní prvky dopočítáme.

Celý postup opakujeme tak dlouho, až budou v **řádku** odpovídajícím účelové funkci všechny koeficienty nezáporné (u max. úloh), resp. nekladné (u min. úloh) $\Rightarrow$ úloha LP *má optimální řešení*.

V případě, že nelze určit klíčový řádek, tj. všechny koeficienty v klíčovém sloupci jsou záporné, úloha *nemá optimální řešení*.

zákl. prom.	x_1	x_2	x'_1	x'_2	b_i	b_i/a_{ik}
x'_1	2	5	1	0	1000	500
x'_2	4	1	0	1	1100	<u>275</u>
z	<u>-3</u>	-2	0	0	0	max
x'_1	0	18/4	1	-1/2	450	<u>100</u>
x_1	1	1/4	0	1/4	275	1100
z	0	<u>-5/4</u>	0	3/4	825	max
x_2	0	1	2/9	-1/9	100	
x_1	1	0	-1/18	5/18	250	
z	0	0	5/18	11/18	950	MAX

Zpátky k našemu
příkladu...

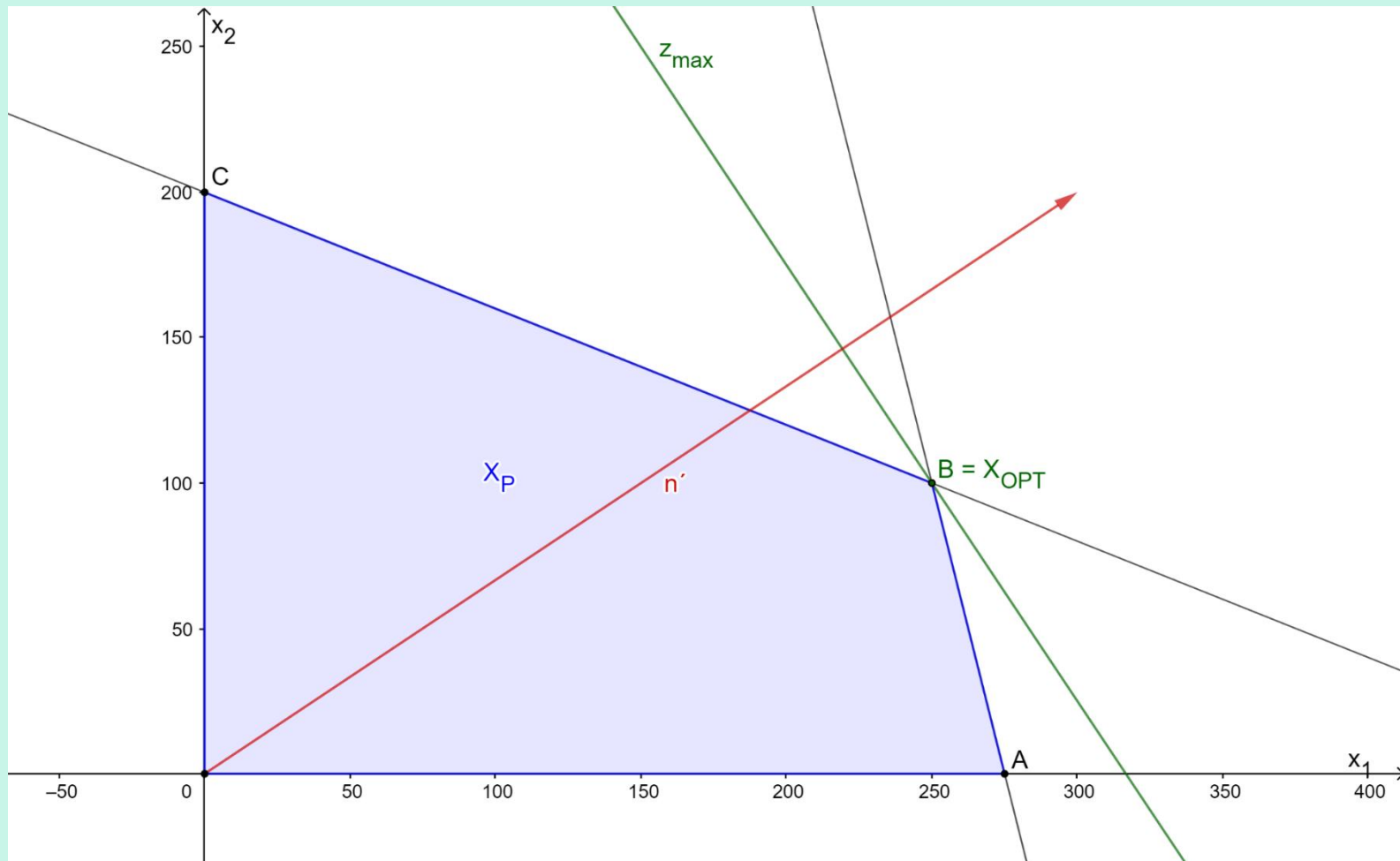
$$\vec{x}_{opt} = (250, 100; 0, 0)$$

$$z = 950$$

Interpretace výsledku:

(Úloha výrobního plánování.) Je optimální vyrábět 250 ks výrobku V_1 a 100 ks výrobku V_2 . Přitom bude dosaženo maximálního zisku ve výši 950 Kč. Jelikož doplňkové proměnné jsou nulové, suroviny budou beze zbytku zužitkovány (přeměněny na výrobky).

ŘEŠENÍ GRAFICKOU METODOU...



$$X_{OPT} = B = [250, 100] \quad z_{max} = 3 \cdot 250 + 2 \cdot 100 = 950 \text{ Kč}$$

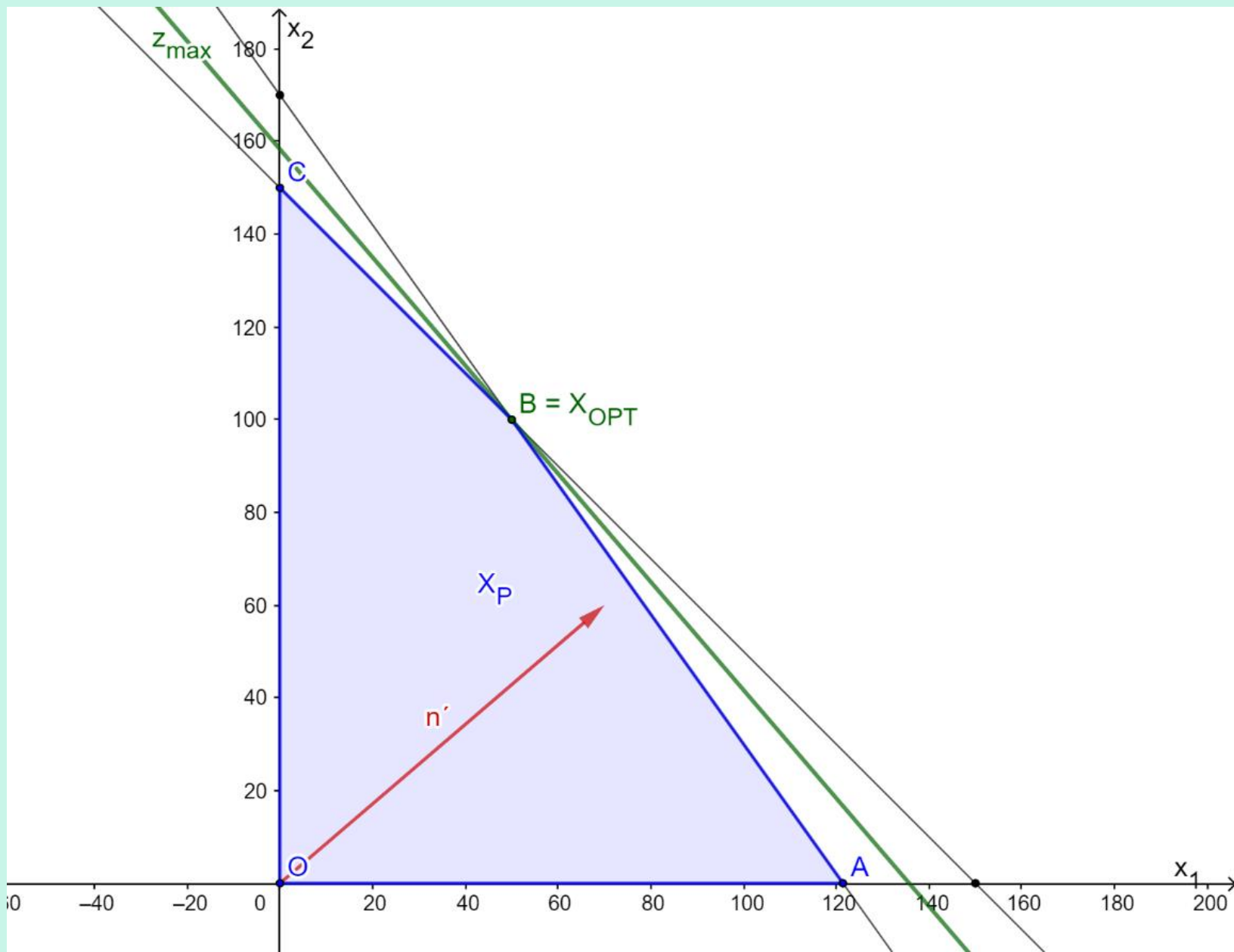
Př.: Řešte úlohu LP:

$$7x_1 + 5x_2 \leq 850,$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 300,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$z = 7x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$



Děkuji za pozornost.