

## 4. Simplexová metoda řešení úloh LP

Metoda umělé báze (MUB)

## Algoritmus SM:

SLN

... převedeme SLN na SLR pomocí  
doplňkových proměnných  $x'_i$ .

SLR

**metoda umělé báze**  
(pomocné  
proměnné, pomocná  
úč. funkce)

SLR v kanonickém tvaru  
→ VÝCHOZÍ ZÁKL. PŘÍP. ŘEŠENÍ

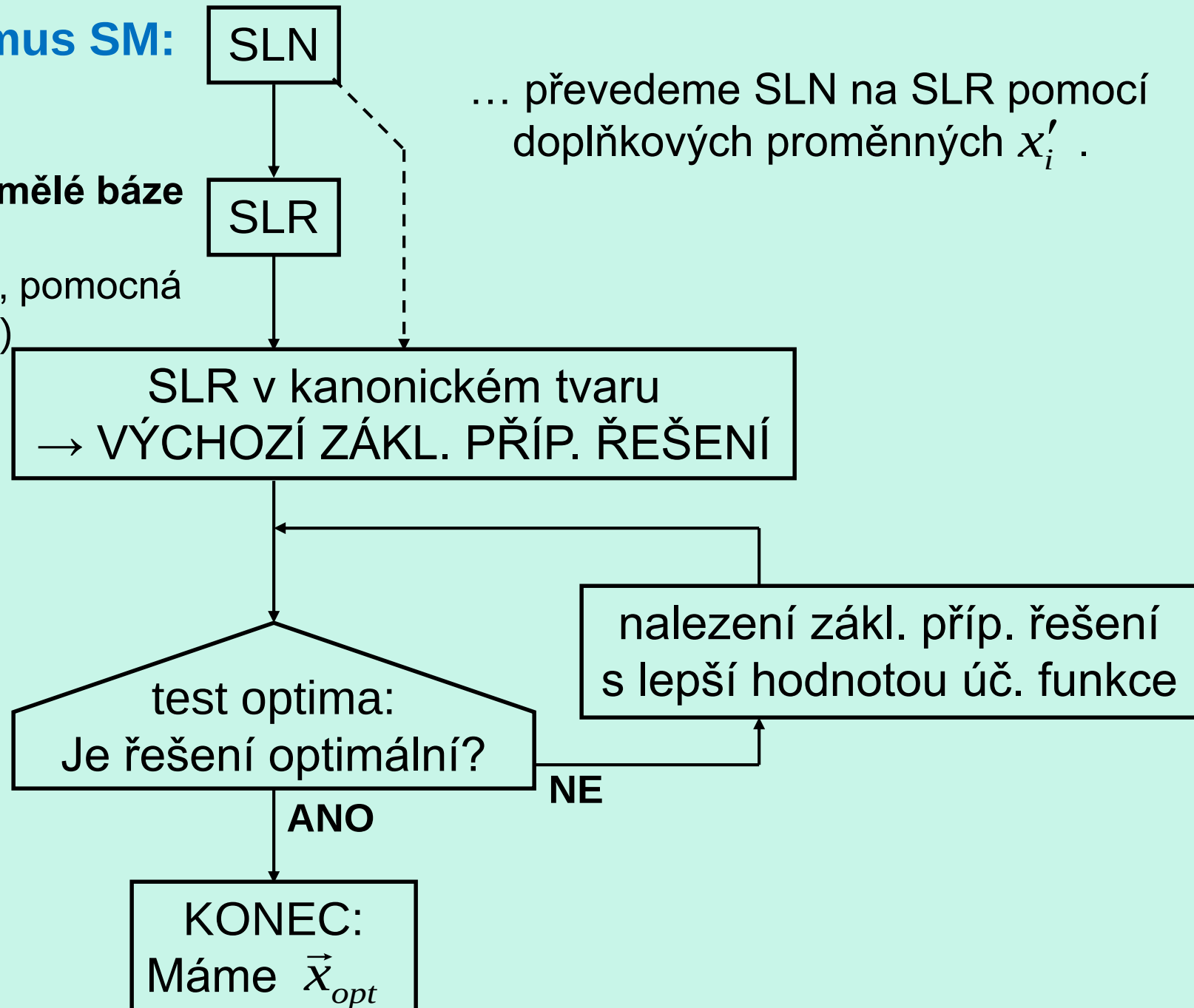
test optima:  
Je řešení optimální?

nalezení zákl. příp. řešení  
s lepší hodnotou úč. funkce

NE

ANO

KONEC:  
Máme  $\vec{x}_{opt}$



# NALEZENÍ VÝCHOZÍHO ŘEŠENÍ

= převedení SLN na SLR v kanonickém tvaru s nezápornou pravou stranou všech rovnic, tj.  $b_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$ .

A) Při zadání úlohy ve tvaru  $A\vec{x} \leq \vec{b}, b_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$ .

Převedením obdržíme:

|                                                    |         |              |
|----------------------------------------------------|---------|--------------|
| $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x'_1$ | $= b_1$ | $x'_1 = b_1$ |
| $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x'_2$ | $= b_2$ | $x'_2 = b_2$ |
| .....                                              |         | .....        |
| $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x'_m$ | $= b_m$ | $x'_m = b_m$ |

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

Základní výchozí řešení je tvaru  $\vec{x} = (0, \dots, 0; b_1, b_2, \dots, b_m)$ .

Řešení je přípustné, neboť  $b_i \geq 0$

(tj. vyhovuje podmínkám nezápornosti).

## Minule jsme řešili...

**Př.:** Řešte úlohu LP:

$$\begin{array}{ll} 7x_1 + 5x_2 \leq 850, & 7x_1 + 5x_2 + x_1' = 850 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 300, & \longrightarrow 2x_1 + 2x_2 + x_2' = 300 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & z - 7x_1 - 6x_2 = 0 (\max) \\ z = 7x_1 + 6x_2 \rightarrow \max & \underbrace{x_{1,2} \geq 0, x_{1,2}' \geq 0} \end{array}$$

Máme výchozí  
základní přípustné  
řešení („můžeme“  
do simplexové tab.)

- ✓ SLR v kanonickém tvaru
- ✓ nezáporné pravé strany

$$\dots \vec{x}_{OPT} = (50, 100; 0, 0), \quad z_{max} = 950$$

B) Je-li některé  $b_i < 0$  , pak danou rovnici násobíme  $(-1)$ .

C) Při zadání úlohy ve tvaru  $A\vec{x} \geq \vec{b}$ ,  $b_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$ .

SLN převedeme na SLR, která však není v kanonickém tvaru.

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 \geq 5 & \longrightarrow & x_1 - 2x_2 - x'_1 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 2 & & 2x_1 + 3x_2 - x'_2 = 2 \end{array}$$

Rovnice nelze násobit  $(-1)$ , protože bychom obdrželi zápornou pravou stranu (řešení by nebylo přípustné). Výchozí přípustné řešení lze získat pomocí metody **UMĚLÉ BÁZE**, tj. zavedením pomocných proměnných a pomocné účelové funkce.

# METODA UMĚLÉ BÁZE

Pomocí doplňkových proměnných lze převést na SLR v kanonickém tvaru pouze SLN typu „ $\leq$ ”.

U SLN typu „ $\geq$ ” a u rovnic „ $=$ ” musíme použít i **pomocných proměnných**  $\rightarrow$  Metoda UMĚLÉ BÁZE.

POSTUP: 1) Pomocí doplňkových proměnných  $x'_i \geq 0$  převedeme SLN na SLR.

2) Pokud SLR není v kanonickém tvaru, pak do rovnic, které neobsahují **základní proměnnou**, uměle zavedeme nezápornou **pomocnou proměnnou**  $x''_i \geq 0$ .

3) Tuto úlohu doplníme zavedením pomocné účelové funkce  $z' = x''_1 + x''_2 + \dots + x''_k \rightarrow \min$ .

Dostáváme tak rozšířenou úlohu LP, pro kterou platí:

**VĚTA:** Každému řešení rozšířené úlohy odpovídá přípustné řešení původní úlohy  $\Leftrightarrow$  všechny pomocné proměnné jsou rovny nule, tj.  $z' = 0$ .

**Př.:**

$$2x_1 + x_2 \leq 10, \quad 2x_1 + x_2 + x'_1 = 10, \quad (1)$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 9, \quad -2x_1 + 3x_2 + x'_2 = 9, \quad (2)$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 8, \quad \xrightarrow{\text{SLN} \rightarrow \text{SLR}} \quad 2x_1 + 4x_2 - x'_3 = 8, \quad (3)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \quad x_{1,2} \geq 0, x'_{1,2,3} \geq 0,$$

$$z = 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \max \quad z - 2x_1 + 3x_2 = 0 \quad (4)$$

Soustava není v kanonickém tvaru, v rovnici (3) chybí základní proměnná, proto ji do této rovnice uměle doplníme  $\rightarrow$  **pomocná proměnná**  $x''_3 \geq 0$ .

Úlohu však musíme doplnit i o pomocnou účelovou funkci

$$z' = x_3'' \rightarrow \min$$

Po anulování pomocné účelové funkce dostáváme  $z' - x_3'' = 0$ .

Připsáním této rovnice pod ostatní bychom však opět porušili kanonický tvar, proto k této rovnici přičteme všechny rovnice, v níž se vyskytují pomocné proměnné (v našem případě pouze rovnici (3)).

Dostáváme úlohu:

$$\begin{array}{rcll} 2x_1 + x_2 + x_1' & = & 10, & x_{1,2} \geq 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_2' & = & 9, & x_{1,2,3}' \geq 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3' + x_3'' & = & 8, & x_3'' \geq 0, \\ z - 2x_1 + 3x_2 & = & 0 & (\max) \\ z' + 2x_1 + 4x_2 - x_3' & = & 8 & (\min) \end{array}$$



| zákl.<br>prom. | $x_1$ | $x_2$ | $x'_1$ | $x'_2$ | $x'_3$ | $x''_3$ | $b_i$ | $b_i/a_{ik}$   |
|----------------|-------|-------|--------|--------|--------|---------|-------|----------------|
| $x'_1$         | 2     | 1     | 1      | 0      | 0      | 0       | 10    | 10             |
| $x'_2$         | -2    | 3     | 0      | 1      | 0      | 0       | 9     | 3              |
| $x''_3$        | 2     | 4     | 0      | 0      | -1     | 1       | 8     | 2              |
| $z$            | -2    | 3     | 0      | 0      | 0      | 0       | 0     | $\max_2$       |
| $z'$           | 2     | 4     | 0      | 0      | -1     | 0       | 8     | $\min_1$       |
| $x'_1$         | 3/2   | 0     | 1      | 0      | 1/4    | -1/4    | 8     |                |
| $x'_2$         | -7/2  | 0     | 0      | 1      | 3/4    | -3/4    | 3     |                |
| $x_2$          | 1/2   | 1     | 0      | 0      | -1/4   | 1/4     | 2     |                |
| $z$            | -7/2  | 0     | 0      | 0      | 3/4    | -3/4    | -6    |                |
| $z'$           | 0     | 0     | 0      | 0      | 0      | -1      | 0     | $\text{MIN}_1$ |

Než začneme řešit původní úlohu, musíme vyřešit úlohu pomocnou.

Snažíme se minimalizovat pomocnou účelovou funkci.

Postupujeme standardním simplexovým algoritmem.

Již po prvním kroku se nám podařilo vyloučit pomocnou proměnnou  $x''_3 \Rightarrow z' = 0$ .

Tím jsme dořešili pomocnou úlohu – našli jsme přípustné výchozí řešení původní úlohy LP a pokračujeme simplexovým algoritmem (vzhledem k účelové funkci  $z$ ) při hledání optimálního řešení.

Pokud nelze zminimalizovat hodnotu  $z'$  na 0, nemá původní úloha přípustné, a tedy ani optimální řešení.

| zákl.<br>prom. | $x_1$ | $x_2$ | $x'_1$ | $x'_2$ | $x'_3$ | $b_i$ | $b_i/a_{ik}$ |
|----------------|-------|-------|--------|--------|--------|-------|--------------|
| $x'_1$         | 3/2   | 0     | 1      | 0      | 1/4    | 8     | 16/3         |
| $x'_2$         | -7/2  | 0     | 0      | 1      | 3/4    | 3     | --           |
| $x_2$          | 1/2   | 1     | 0      | 0      | -1/4   | 2     | 4            |
| $z$            | -7/2  | 0     | 0      | 0      | 3/4    | -6    | max          |
| $x'_1$         | 0     | -3    | 1      | 0      | 1      | 2     | 2            |
| $x'_2$         | 0     | 7     | 0      | 1      | -1     | 17    | --           |
| $x_1$          | 1     | 2     | 0      | 0      | -1/2   | 4     | --           |
| $z$            | 0     | 7     | 0      | 0      | -1     | 8     | max          |
| $x'_3$         | 0     | -3    | 1      | 0      | 1      | 2     |              |
| $x'_2$         | 0     | 4     | 1      | 1      | 0      | 19    |              |
| $x_1$          | 1     | 1/2   | 1/2    | 0      | 0      | 5     |              |
| $z$            | 0     | 4     | 1      | 0      | 0      | 10    | MAX          |

$$\vec{x}^{(1)} = (0, 2; 8, 3, 0)$$

$$z = -6$$

$$\vec{x}^{(2)} = (4, 0; 2, 17, 0)$$

$$z = 8$$

$$\vec{x}^{(3)} = (5, 0; 0, 19, 2) = \vec{x}_{opt}$$

$$\underline{\underline{z_{max} = 10}}$$

**Pozn.:** Na rozdíl od doplňkových proměnných  $x_i'$  nemá pomocná proměnná  $x_i''$  žádný věcný význam. Slouží jen k nalezení výchozího přípustného řešení.

**ZÁVĚR:** Rozšířenou úlohu LP řešíme ve dvou fázích:

1. Minimalizujeme pomocnou účelovou funkci  $z'$  postupným vyřazováním pomocných proměnných a zařazováním proměnných, které mají věcnou interpretaci. Mohou nastat 2 situace:
  - a)  $\min z' > 0$  ...pův. úLP nemá příp. řešení,
  - b)  $\min z' = 0$  ... máme výchozí příp. řešení pův. úLP.
2. Pokud nastala situace 1.b), řešíme původní úlohu vzhledem k původní účelové funkci – pokračujeme od nalezeného přípustného řešení původní úlohy.

**Př.:** Řešte početně směšovací úlohu z první přednášky:

|              | Krmiva |       | Požadovaná<br>množství |
|--------------|--------|-------|------------------------|
|              | $K_1$  | $K_2$ |                        |
| Ca [mg/kg]   | 10     | 8     | 308                    |
| Mg [mg/kg]   | 8      | 1     | 214                    |
| Cena [Kč/kg] | 1500   | 240   | min.                   |

ekonomický model

## MATEMATICKÝ MODEL:

$$z = 1500x_1 + 240x_2 \rightarrow \min$$

$$10x_1 + 8x_2 \geq 308$$

$$8x_1 + x_2 \geq 214$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Děkuji za pozornost.