

8. Přiřazovací problém

- matematický model úlohy
- maďarská metoda – minimalizační úloha
- maximalizační úloha

PŘÍŘAZOVACÍ PROBLÉM

- Úloha optimálního přiřazení (např. strojů na pracovišti, pracovišť k pracovníkům atp.), za předpokladu, že právě jeden činitel prvního druhu je přiřazen právě jednomu činiteli druhého druhu
- Speciální typ dopravní úlohy ($m = n$; $a_i = b_j = 1, \forall i, j$; $x_{ij} \in Z$)

Př.: Podnik má k dispozici 3 jeřáby, které má přepravit na 3 pracoviště. Vzdálenosti mezi jednotlivými jeřáby a stanovišti jsou uvedeny v tabulce. Hledáme optimální řešení, tj. takový plán přepravy, aby celkový počet ujetých kilometrů byl minimální

c_{ij}	P_1	P_2	P_3
J_1	4	3	1
J_2	1	2	6
J_3	4	5	3

Řešení – matematický model příkladu

$$\text{Řešení } X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{čtvercová matice řádu 3})$$

- x_{ij} ... i -tý jeřáb (ne)přiřazen k j -tému pracovišti

$x_{ij} = 1$... i -tý jeřáb přiřazen na j -té pracoviště

$x_{ij} = 0$... i -tý jeřáb **nepřiřazen** na j -té pracoviště

$$J_1: x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$

$$P_1: x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$$

$$J_2: x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$

$$P_2: x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$$

$$J_3: x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$$

$$P_3: x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$$

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + \dots + c_{33}x_{33} \rightarrow \min$$

Vlastnosti řešení

Příklad

- čtvercová matice řádu 3
- 3 proměnné nabývají hodnotu 1
- $6 = (3^2 - 3)$ proměnných = 0
- $5 = (2 \cdot 3 - 1)$ zákl. prom.

Obecně

- čtvercová matice řádu n
- n proměnných nabývá hodnotu 1
- $(n^2 - n)$ proměnných = 0
- $(2n - 1)$ zákl. proměnných

→ pro $n > 1$ vždy **degenerované řešení**

MAŘARSKÁ METODA – úloha minimalizační

✓ *úloha je minimalizační*

1. Provedeme redukci sazeb c_{ij} matice:

- i. od každého řádku matice odečteme nejmenší sazbu v tomto řádku
- ii. od každého sloupce matice odečteme nejmenší sazbu v tomto sloupci

2. Hledáme **maximální** počet nezávislých nul (NN)

✓ *každá z NN se nachází v jiném řádku a jiném sloupci*

- i. volíme (= označíme) tu NN, která se ve svém řádku/sloupci nachází samostatně
- ii. vynecháme řádky a sloupce, na jejichž průsečíku se NN nacházejí, a ve vzniklé submatici hledáme NN, která se ve svém ř./sl. nachází samostatně
- iii. pokud každý ř./sl. obsahuje víc než jednu (neoznačenou) nulu, vybereme ten s nejmenším počtem nul, a v něm libovolnou označíme za NN

3. Pokud jsme našli právě n nezávislých nul, obsadíme jejich pole hodnotou 1 a ostatní pole hodnotou 0 = optimální řešení X_{OPT} ; dopočteme z

MAĎARSKÁ METODA (pokračování)

4. Máme-li méně než n nezávislých nul, zjistíme, zda jsme vybrali maximální možný počet

Königova věta: Maximální počet NN v matici = minimálnímu počtu krycích čar, jimiž je možno pokrýt všechny nulové sazby v matici.

- i. ř. a sl., v nichž **ne**leží NN, označíme *; nulovými sazbami těchto ř./sl. vedeme svislé/vodorovné krycí čáry
- ii. vynecháme ř. a sl. označené * a pokryté ř. a sl. a pokračujeme dle i.
- iii. zůstanou-li nepokryté už jen NN, vedeme i přes ně minimum krycích čar

5. Je-li počet NN = počtu krycích čar $\rightarrow$ další redukce sazeb v matici (nesedí-li počet, někde jsme udělali chybu – nevybrali jsme max. počet NN)

MAĎARSKÁ METODA (závěr)

5. Další redukce sazeb v matici:
 - i. z nepokrytých polí vybereme minimální sazbu
 - ii. tuto sazbu **odečteme** od všech prvků nepokrytých krycími čarami a **přičteme** ke všem prvkům, kde se krycí čáry kříží
 - iii. sazby v polích pokrytých jedinou krycí čarou zůstávají beze změny
6. Opět hledáme maximální počet nezávislých nul...

Optimální řešení X_{OPT} vždy získáme tak, že v matici (řádu n) umístíme „jedničky“ na pozice n nezávislých nul, zbývající pole budou mít hodnotu 0. Hodnotu účelové funkce z získáme tak, že sečteme původní hodnoty sazeb na pozicích, kde se nacházejí NN (tam se realizuje přiřazení).

MAŘARSKÁ METODA – poznámky

- 1) Výchozí redukce sazeb neovlivní tvar řešení. (Redukovaná matice má ale nižší hodnotu účelové funkce.) Redukce sazeb zajistí, že v každém ř. i sl. bude alespoň jedna 0.
- 2) Algoritmus vždy končí nalezením právě n nezávislých nul. Každé n -tici nezávislých nul odpovídá jedno optimální řešení. (Kolik možností výběru n nezávislých nul, tolik optim.)
- 3) Ve chvíli, kdy máme vést krycí čáry přes označené NN, nezáleží na tom, zda je vedeme vodorovně, nebo svisle. (Počet je stejný.)
- 4) Ani redukce sazeb po konstrukci krycích čar nemění tvar optimálního řešení.

Př.: 4 auta se nacházejí na 4 stanovištích $S_i, i = 1, 2, 3, 4$. Je třeba je přemístit na 4 pracoviště $P_j, j = 1, 2, 3, 4$. Údaje o vzdálenostech v km (= sazby c_{ij}) uvádí tabulka. Nalezněte optimální řešení, zajišťující minimální celkový počet ujetých kilometrů.

c_{ij}	P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	5	17	23	10
S_2	6	15	17	15
S_3	20	10	10	15
S_4	10	15	20	15

PŘÍŘAZOVACÍ PROBLÉM maximalizačního typu

- Přířazovací problém maximalizačního typu řešíme převedením na minimalizační přířazovací problém se stejnou množinou všech optimálních řešení jako původní maximalizační úloha.
- Převod provádíme tak, že všechny prvky matice sazeb (původní maximalizační úlohy) vynásobíme číslem -1 .
- (Získáme tak minimalizační úlohu se stejnou množinou X_{OPT} .)
- Dále postupujeme maďarskou metodou... a je to 😊

PŘÍŘAZOVACÍ PROBLÉM maximalizačního typu

Př.: Ve firmě mohou 4 pracovníci $P_i, i = 1, 2, 3, 4$ vyrábět 4 výrobky $V_j, j = 1, 2, 3, 4$ (podle toho, na kterou ze 4 výrobních linek jsou přiřazeni). Tabulka uvádí počet c_{ij} výrobků V_j , který je pracovník P_i schopen vyrobit za 1 hod. Nalezněte optimální přiřazení tak, aby celkový počet výrobků vyrobených za 1 hod byl maximální.

c_{ij}	V_1	V_2	V_3	V_4
P_1	5	17	23	10
P_2	6	15	17	15
P_3	20	10	10	15
P_4	10	15	20	15