

Operační výzkum

Vícekriteriální programování.

Lexikografická metoda. Metoda agregace účelových funkcí.

Úvod do vícekriteriálního lineárního programování

Definice:

Úloha vícekriteriálního lineárního programování (VLP) je zobecněním úloh lineárního programování vzhledem k počtu účelových funkcí. Obecně uvažujeme úlohu s k účelovými funkcemi.

Matematický model úlohy vícekriteriálního lineárního programování (VLP) má tvar

$$\begin{bmatrix} z_1 = z_1(\vec{x}) \\ z_2 = z_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ z_k = z_k(\vec{x}) \end{bmatrix} \longrightarrow \text{„max“}$$

při podmínkách

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{x} &\leq \vec{b}, \\ \vec{x} &\geq \vec{o}. \end{aligned}$$

Úvod do vícekriteriálního lineárního programování

Poznámka:

V předešlé definici použité symboly chápeme tímto způsobem:

$z_s = z_s(\vec{x})$, $s = 1, \dots, k$, jsou účelové funkce, jejichž hodnota je funkcí $\vec{x}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ je matice soustavy (nerovnic),}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ je vektor neznámých,}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ je vektor pravých stran (nerovnic) a}$$

$$\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ je nulový vektor.}$$

Úvod do vícekriteriálního lineárního programování

Definice:

Vektor $\vec{x}$, splňující uvedená omezení, se nazývá **přípustné řešení úlohy VLP**. Množinu všech přípustných řešení značíme X_P .

Přípustné řešení $\vec{x}^\circ$ nazveme **nedominovaným řešením** úlohy VLP, jestliže neexistuje přípustné řešení takové, že $\vec{z}(\vec{x}) \geq \vec{z}(\vec{x}^\circ)$ (vektorová nerovnost splněná ve všech k souřadnicích). Množinu všech nedominovaných řešení značíme X_N .

Přípustné řešení, které přináší nejlepší výsledek při zohlednění důležitosti jednotlivých účelových funkcí, nazýváme **kompromisním řešením**.

Kompromisní řešení značíme X_{opt} .

Kompromisní řešení je některé z nedominovaných řešení. K nalezení kompromisního řešení existuje více metod. Přitom kadá z těchto metod může označit jiné řešení za kompromisní. Každá z metod vyžaduje nějakou další informaci k zadané úloze (např. váhy kritérií, apod.)

Lexikografická metoda

Je třeba znát pořadí kritérií (účelových funkcí) podle důležitosti.
Při řešení úlohy VLP lexikografickou metodou se postupuje následovně:

Nejprve se určí množina X_1 všech optimálních řešení vzhledem k nejdůležitější účelové funkci.

Dále se řeší úloha vzhledem ke druhé nejdůležitější účelové funkci, přičemž za množinu všech přípustných řešení nyní bereme množinu X_1 .

Množina X_2 všech optimálních řešení této úlohy je dále množinou všech přípustných řešení třetí jednokritériální úlohy s třetí nejdůležitější účelovou funkcí; atd.

Nakonec získáme lexikograficky optimální řešení úlohy VLP.

Lexikografická metoda

Lexikografická metoda – postup:

Úloha VLP s k účelovými funkcemi se v této metodě nahrazuje řešením nejvýše k jednokriteriálních úloh LP:

- 1 První úloha: Na množině všech přípustných řešení původní úlohy VLP se maximalizuje nejdůležitější účelová funkce. Množinu všech optimálních řešení této jednokriteriální úlohy označíme X_1 .
- 2 Druhá úloha: Na množině X_1 se maximalizuje druhá nejdůležitější účelová funkce. Množinu všech optimálních řešení této jednokriteriální úlohy označíme X_2 .
- 3 Třetí úloha: Na množině X_2 se maximalizuje třetí nejdůležitější účelová funkce. Množinu všech optimálních řešení této jednokriteriální úlohy označíme X_3 .
- 4 Podobně postupujeme i dále. Skončíme buď po vyřešení t -té úlohy ($t < k$), jestliže množina X_t je jednoprvková, nebo nejpozději po vyřešení k -té úlohy.

Za kompromisní řešení úlohy VLP pak považujeme řešení X_t , resp. X_k . V prvním případě je kompromisní řešení jednoprvkové, ve druhém případě může být kompromisních řešení více.

Lexikografická metoda

Př:

Určete graficky množinu X_N všech nedominovaných řešení úlohy VLP a graficky i početně lexikograficky optimální řešení.

$$\begin{bmatrix} z_1 = 5x_1 + x_2 \\ z_2 = \quad \quad x_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{„max“}$$

za podmínek

$$x_1 + x_2 \leq 4, \quad (1)$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 3, \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (3),(4)$$

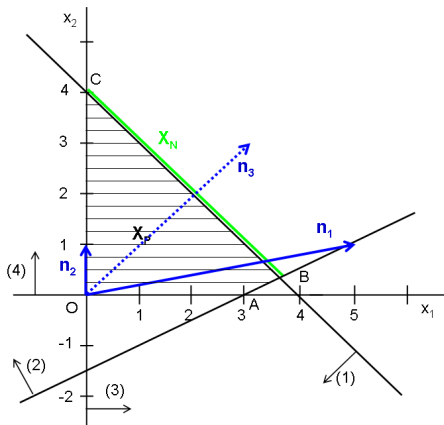
Pořadí důležitosti uvažujte

a) 1. z_1 , 2. z_2 ;

b) 1. z_2 , 2. z_1 .

Lexikografická metoda

Řešení: Množinou X_P všech přípustných řešení úlohy je čtyřúhelník $OABC$, $X_P = 4$ -úh. $OABC$, kde $O = [0, 0]$, $A = [3, 0]$, $B = [11/3, 1/3]$, $C = [0, 4]$.



Obrázek: Úloha VLP, grafické znázornění X_P , X_N

Lexikografická metoda

Na obrázku je množina X_P vyšrafována.

Jsou zde vyznačeny i normálové vektory $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ příslušné účelovým funkcím. Při řešení úlohy VLP lexikografickou metodou se nejprve určí množina X_1 všech optimálních řešení vzhledem k nejdůležitější účelové funkci. V obou případech je množina X_1 jednoprvková, a tedy představuje jediné kompromisní řešení.

Konkrétně:

ad a) $X_1 = B$, tedy $X_{opt,lex}^a = B$, proto $\vec{z}^a = (z_1(B), z_2(B)) = (56/3, 1/3)$.

ad b) $X_1 = C$, tedy $X_{opt,lex}^b = C$, proto $\vec{z}^b = (z_1(C), z_2(C)) = (4, 4)$.

Vzhledem k tomu, jak vyšly obě jednokritériální úlohy (vzhledem k účelové funkci z_1 , resp. z_2), je zřejmé, že množinou X_N všech nedominovaných řešení úlohy VLP je celá úsečka BC :

$$X_N = \overline{BC}.$$

Grafické určení množin X_P , X_N i kompromisního řešení jak v případě a), tak i v případě b) je zřejmé z obrázku.

Lexikografická metoda

Početně pro případ a) postupujeme následovně: Převedeme nerovnice na rovnice zavedením doplňkových proměnných x'_1, x'_2 a anulujeme účelové rovnice, ostatní je zřejmé z tabulky. Nejprve samozřejmě maximalizujeme nejdůležitější účelovou funkci.

Z.p.	x_1	x_2	x'_1	x'_2	b_i	$p = \frac{b_i}{a_{ik}}$ pro $a_{ik} > 0$
x'_1	1	1	1	0	4	4
x'_2	(1)	-2	0	1	3	3
z_1	-5	-1	0	0	0	max_1
z_2	0	-1	0	0	0	max_2
x'_1	0	(3)	1	-1	1	$\frac{1}{3}$
x_1	1	-2	0	1	3	--
z_1	0	-11	0	5	15	max_1
z_2	0	-1	0	0	0	max_2

Tabulka: Lexikografická metoda, první přepočít tabulky

Lexikografická metoda

Z.p.	x_1	x_2	x'_1	x'_2	b_i	$p = \frac{b_i}{a_{ik}}$ pro $a_{ik} > 0$
x'_1	1	1	1	0	4	4
x'_2	(1)	-2	0	1	3	3
z_1	-5	-1	0	0	0	$\max_1$
z_2	0	-1	0	0	0	$\max_2$
x'_1	0	(3)	1	-1	1	$\frac{1}{3}$
x_1	1	-2	0	1	3	--
z_1	0	-11	0	5	15	$\max_1$
z_2	0	-1	0	0	0	$\max_2$
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$	
z_1	0	0	$\frac{11}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{56}{3}$	$\max_1$
z_2	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\max_2$

Tabulka: Lexikografická metoda, kompletní tabulka

Lexikografická metoda

Poznámka:

I z tabulky je zřejmé, že hodnotu účelové funkce z_2 sice zvýšit lze, ale nikoliv bez současného snížení důležitější účelové funkce.

Tedy, řešení $(x_1 = \frac{11}{3}, x_2 = \frac{1}{3})$ je jediným kompromisním řešením úlohy a).

Poznámka:

Úloha b) by se početně řešila analogicky.

Metoda agregace účelových funkcí

Metoda agregace účelových funkcí vyžaduje znalost vah kritérií $v_s, s = 1, 2, \dots, k$. Vyjadřují relativní důležitost kritéria.

Při agregaci účelových funkcí vytváříme z k účelových funkcí jednu novou účelovou funkci. Za kompromisní řešení úlohy VLP pak považujeme optimální řešení úlohy LP vzhledem k této agregované účelové funkci.

Novou účelovou funkci definujeme vztahem

$$z = \sum_{s=1}^k v_s z_s, \quad \text{kde } v_s \geq 0 \quad \forall s = 1, 2, \dots, k, \quad \sum_{s=1}^k v_s = 1.$$

Metoda agregace účelových funkcí

Př:

Předchozí příklad

$$\begin{bmatrix} z_1 = 5x_1 + x_2 \\ z_2 = \quad \quad x_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{„max“}$$

za podmínek

$$x_1 + x_2 \leq 4, \quad (1)$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 3, \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, (3),(4)$$

řešte metodou agregace účelových funkcí pro $v_1 = 0,4$ a $v_2 = 0,6$.

Metoda agregace účelových funkcí

Řešení:

Nejprve vyjádříme agregovanou účelovou funkci:

$$z = v_1 z_1 + v_2 z_2$$

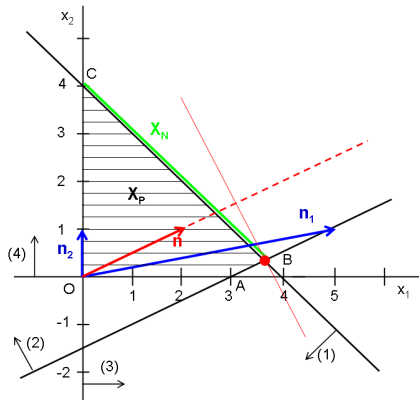
$$z = 0,4 \cdot (5x_1 + x_2) + 0,6 \cdot x_2$$

$$z = 2x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$

Nyní řešíme jednokritériální úlohu LP. To lze buď graficky nebo počteně.

Metoda agregace účelových funkcí

Graficky: Z grafu vyplývá optimální řešení

$$\vec{x}_{opt} = B = (11/3, 1/3), z(x_{opt}) = 23/3, \text{ proto}$$
$$\vec{z}_{opt} = (z_1(B), z_2(B)) = (56/3, 1/3).$$


Obrázek: Úloha VLP, metoda agregace účelových funkcí

Metoda agregace účelových funkcí

Početně:

Z.p.	x_1	x_2	x'_1	x'_2	b_i	$p = \frac{b_i}{a_{ik}}$ pro $a_{ik} > 0$
x'_1	1	1	1	0	4	4
x'_2	(1)	-2	0	1	3	3
z	-2	-1	0	0	0	max
x'_1	0	(3)	1	-1	1	$\frac{1}{3}$
x_1	1	-2	0	1	3	--
z	0	-5	0	2	6	max
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$	
z	0	0	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{23}{3}$	MAX

Tabulka: Metoda agregace účelových funkcí

Metoda agregace účelových funkcí

Z tabulky vyplývá optimální řešení

$$\vec{x}_{opt} = B = (11/3, 1/3), z(x_{opt}) = 23/3, \text{ proto}$$

$$\vec{z}_{opt} = (z_1(B), z_2(B)) = (56/3, 1/3).$$