Operační výzkum

Vícekriteriální programování.

Cílové programování.

Cílové programování

V metodě cílového programování (CP) se vyžaduje znalost tzv. **cílových hodnot** $h_s, s = 1, 2, \ldots, k$ účelových funkcí.
Principem CP je nalezení takového přípustného řešení, které by zabezpečovalo hodnoty účelových funkcí co nejblíže k cílovým hodnotám.

Poznámka: Je zřejmé, že v případě řešení úlohy VLP metodou CP nemá smysl hovořit o typech účelových funkcí – pojmy maximalizační či minimalizační účelová funkce ztrácí smysl.

Vzdálenost hodnot účelových funkcí (pro nějaké řešení $\vec{x}$) od cílových hodnot definujeme takto:

$$d\left(\vec{z}(\vec{x}), \vec{h}\right) = \sum_{s=1}^{k} \mid h_s - z_s \mid .$$

Cílové programování

Definice:

Kladné, resp. **záporné odchylky**, d_s^+, resp. d_s^-, $s = 1, 2, \ldots, k$, jsou definovány následovně. Pro každé řešení $\vec{x}$ a $s = 1, 2, \ldots, k$, nastane právě jedna ze dvou situací:

1. $z_s \geq h_s$, pak $d_s^+ := \mid h_s - z_s \mid \ \wedge \ d_s^- := 0$,
2. $z_s < h_s$, pak $d_s^+ := 0 \ \wedge \ d_s^- := \mid h_s - z_s \mid$.

Pak se úloha VLP převádí na jednokriteriální úlohu LP danou tímto matematickým modelem:

$$d = \sum_{s=1}^{k} \left(d_s^+ + d_s^-\right) \longrightarrow \min$$

při omezeních

$$\vec{z}\,(\vec{x}) - \vec{d}^+ + \vec{d}^- = \vec{h},$$

$$A \cdot \vec{x} \leq \vec{b},$$

$$\vec{x}, \vec{d}^+, \vec{d}^- \geq \vec{o},$$

$$\vec{d}^+ \cdot \vec{d}^- = 0.$$

Cílové programování

Př:

Úlohu VLP

$$\begin{bmatrix} z_1 = & x_1 + x_2 \\ z_2 = & 3x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

za podmínek

$$2x_1 - x_2 \leq 10, \quad (1)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 18, \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \quad (3),(4)$$

řešte metodou CP pro $h_1 = 20; h_2 = 26$.

Cílové programování

Řešení:

Nejprve sestavíme příslušnou úlohu CP (jednokriteriální):

$$d = d_1^+ + d_1^- + d_2^+ + d_2^- \longrightarrow \min$$

při omezeních

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - d_1^+ + d_1^- &= 20, \\ 3x_1 + x_2 - d_2^+ + d_2^- &= 26, \\ 2x_1 - x_2 + x_1' \qquad &= 10, \\ 2x_1 + x_2 \qquad + x_2' &= 18, \\ x_1, x_2, x_1', x_2', d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- &\geq 0, \\ \vec{d}^+ \cdot \vec{d}^- &= 0. \end{aligned}$$

Nyní úlohu CP vyřešíme simplexovou metodou, viz tabulku.

Z.p.	x_1	x_2	x_1'	x_2'	d_1^+	d_1^-	d_2^+	d_2^-	b_i	$p = \frac{b_i}{a_{ik}}$ pro $a_{ik} > 0$
d_1^-	1	1	0	0	-1	1	0	0	20	20
d_2^-	3	1	0	0	0	0	-1	1	26	$\frac{26}{3}$
x_1'	(2)	-1	1	0	0	0	0	0	10	5
x_2'	2	1	0	1	0	0	0	0	18	9
d	4	2	0	0	-2	0	-2	0	46	*min*
d_1^-	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-1	1	0	0	15	10
d_2^-	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	0	0	-1	1	11	$\frac{22}{5}$
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	5	–
x_2'	0	(2)	-1	1	0	0	0	0	8	4
d	0	4	-2	0	-2	0	-2	0	26	*min*
d_1^-	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	-1	1	0	0	9	
d_2^-	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	0	0	-1	1	1	
x_1	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	7	
x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	4	
d	0	0	0	-1	-2	0	-2	0	10	*MIN*

Tabulka: Metoda cílového programování

Cílové programování

V posledním kroku tabulky jsme dospěli k optimálnímu řešení úlohy CP, a tedy ke kompromisnímu řešení původní úlohy VLP:

$$\vec{x}_{opt} = (7, 4), \ \vec{z}(\vec{x}_{opt}) = (11, 25).$$

Poznámka: Modifikace CP, pokud nejsou explicitně zadané cílové hodnoty:

Při řešení úlohy VLP vyřešíme úlohy LP pro jednotlivé účelové funkce $z_i, i = 1, 2, \ldots, k$ zvlášť (řešíme k jednokriteriálních úloh). Tím obdržíme tzv. **ideální hodnoty** $\overline{z_i}$ účelových funkcí, které považujeme za cílové hodnoty:

$$h_i = \overline{z_i} = z_{i,max}, \ i = 1, 2, \ldots, k.$$