

Operační výzkum

Teorie her.

Hra v normálním tvaru. Optimální strategie. Maticové hry.

Teorie her – úvod

Definice: Teorie her (TH) metodou matematického modelování studuje **rozhodovací situace**, v níž vystupuje jeden nebo více **rozhodovatelů**, tj. rozhodujících se subjektů, institucí či mechanismů volících svá **rozhodnutí**. Každý z rozhodovatelů má určitou **množinu rozhodnutí**, z níž rozhodnutí vybírá. Tato rozhodnutí vedou k tomu, že každý z rozhodovatelů realizuje **zisk**, nebo **ztrátu**.

Terminologie TH převzatá z klasických her:

rozhodovatel	→	hráč
rozhodovací situace	→	hra
rozhodnutí	→	strategie
množina rozhodnutí	→	prostor strategií
důsledek rozhodnutí	→	výplatní funkce
zisk	→	výhra
ztráta	→	prohra, záporná výhra

Hra v normálním tvaru

Definice: Základním matematickým modelem TH je **hra v normálním tvaru**:

Je dána množina $Q = \{1, 2, \dots, k\}$, tj. **množina všech hráčů** (hráči jsou označeni čísly).

Každý hráč má svůj **prostor strategií** $X_i, i \in Q$. Prvky prostoru strategií, tj. **strategie** označujeme malými písmeny.

Pro každého hráče je dána **výplatní funkce** $F_i, i \in Q$ definovaná na kartézském součinu $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$. Přiřazuje každé k -tici $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ hodnotu $F_i(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}$ – vyjadřuje hodnotu výhry i -tého hráče.

Hra v normálním tvaru je tedy charakterizována třemi typy prvků:

- 1 $Q = \{1, 2, \dots, k\}$, tj. množinou hráčů,
- 2 $X_1, X_2, \dots, X_k$, tj. prostory strategií hráčů,
- 3 $F_1, F_2, \dots, F_k$, tj. výplatními funkcemi hráčů.

Hra v normálním tvaru

Průběh hry v normálním tvaru:

Každý z k hráčů zvolí nějakou strategii ze svého prostoru strategií. Potom hráči své volby zveřejní a i -tý hráč obdrží částku $F_i(x_1, x_2, \dots, x_k)$.

Poznámka: Je-li $F_i(x_1, x_2, \dots, x_k) < 0$, i -tý hráč prohrává částku $|F_i(x_1, x_2, \dots, x_k)|$.

Příklad hry

Př 1.:

$Q = \{1, 2\}$, tj. hra dvou hráčů;

$X_1 = \{1, 2, \dots, 10\}$, $X_2 = \{1, 2, \dots, 5\}$;

$F_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $F_2(x_1, x_2) = -(x_1 + x_2)$.

Jak má každý z hráčů hrát, aby si vedl co nejlépe?

Řešení: Je zřejmé, že nejlepší strategií 1. hráče je $x_1 = 10$ a 2. hráče je $x_2 = 1$.

Příklad hry

Př 2.:

Modifikujme Př. 1. následovně:

$Q = \{1, 2\}$, tj. hra dvou hráčů;

$X_1 = \{1, 2, \dots, 10\}$, $X_2 = \{1, 2, \dots, 5\}$;

$F_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 + x_2}$, $F_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$.

Jak má každý z hráčů hrát, aby si vedl co nejlépe?

Řešení: Je zřejmé, že nejlepší strategií 1. hráče je $x_1 = 10$ a 2. hráče je $x_2 = 1$.

Intuitivní nalezení nejlepších strategií je již obtížnější. Platí ale

$$F_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 + x_2} = x_1 - x_2,$$

a proto je v zájmu obou hráčů, aby $x_1 = 10$ a $x_2 = 1$.

Klasifikace rozhodovacích situací

a) Podle počtu hráčů

- $k = 1$ – vede opět k lineárnímu programování;
- $k = 2$ – nejpropracovanější část TH (tímto se budeme dále zabývat);
- $k > 2$ – možnost vzniku koalic;
- $k = \infty$ – velký počet rozhodovatelů,
 - mnohdy není možné zjistit jejich přesný počet,
 - modely ekonomii s tržním hospodářstvím.

Inteligentní hráč = rozhodovatel, který provádí analýzu situace, volí své strategie tak, aby maximalizoval svou výhru.

Neinteligentní hráč = ekvivalent náhodného mechanismu, své strategie volí náhodně, např. příroda, krupiér při ruletě, apod.

Klasifikace rozhodovacích situací

b) Podle počtu strategií

Konečná hra – prostory strategií všech hráčů jsou konečné množiny.

Nekonečná hra – prostor strategií aspoň u jednoho hráče je nekonečná množina.

c) Podle součtu výplatních funkcí

Hra s konstantním součtem – platí:

$$\sum_{i=1}^k F_i(x_1, x_2, \dots, x_k) = K, \quad \forall k\text{-tici}(x_1, x_2, \dots, x_k), x_i \in X_i, \quad K \text{ je konstanta.}$$

Je-li navíc $K = 0$, jde o **hru s nulovým součtem**.

Hra s nekonstantním součtem – platí:

$$\sum_{i=1}^k F_i(x_1, x_2, \dots, x_k) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

(Hodnota součtu závisí na jednotlivých strategiích, které zvolí hráči.)

Antagonistické konflikty

Antagonistickým konfliktem nazýváme rozhodovací situaci se dvěma inteligentními hráči, jejichž zájmy jsou zcela v protikladu. Zisk jednoho hráče jde zcela na úkor druhého hráče.

Matematickým modelem antagonistického konfliktu je **hra dvou hráčů s konstantním součtem**:

$$Q = \{1, 2\};$$

$$X_1, X_2;$$

$$F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2); F_1(x_1, x_2) + F_2(x_1, x_2) = K \quad \forall x_1 \in X_1, x_2 \in X_2.$$

Označení: Protože se dále omezíme jen na dva hráče, budeme je odlišovat různými písmeny (nikoliv indexy). Budeme používat nová značení:

$$X_1 \longrightarrow X \quad x_1 \longrightarrow x,$$

$$X_2 \longrightarrow Y \quad x_2 \longrightarrow y.$$

Optimální strategie

V antagonistickém konfliktu považujeme za optimální takovou strategii, od níž žádná odchylka nemůže hráči přinést výhodu za předpokladu, že druhý hráč zachová svou optimální strategii.

Definice: Necht' $Q = \{1, 2\}$; X, Y ; $F_1(x, y), F_2(x, y), F_1 + F_2 = K$ je hra s konstantním součtem.

Optimální strategií prvního hráče nazveme takovou strategii $\bar{x} \in X$, ke které existuje strategie $\bar{y} \in Y$ tak, že

$$\begin{aligned} F_1(x, \bar{y}) &\leq F_1(\bar{x}, \bar{y}) \\ F_2(\bar{x}, y) &\leq F_2(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

Věta: Mějme hru s konstantním součtem

(tj. $Q = \{1, 2\}$; X, Y ; $F_1(x, y), F_2(x, y), F_1 + F_2 = K$).

Potom $\bar{x}, \bar{y}$ jsou optimální v této hře právě tehdy, jsou-li $\bar{x}, \bar{y}$ optimální ve hře s nulovým součtem:

$$Q = \{1, 2\}; X, Y;$$

$$F^{(1)}(x, y) = F_1(x, y) - F_2(x, y), \quad F^{(2)}(x, y) = F_2(x, y) - F_1(x, y).$$

Maticové hry

Maticové hry (MH) jsou konečné hry dvou hráčů s nulovým součtem.

Nechť hráči A, B mají své strategie $A_1, A_2, \dots, A_m; B_1, B_2, \dots, B_n$.

Pak hru lze popsat **platební maticí** $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

$$A = \begin{array}{c} \text{strategie} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{matrix} \end{array} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Definice: Strategie $A_1, A_2, \dots, A_m$ a $B_1, B_2, \dots, B_n$ obou hráčů nazýváme jejich **čistými strategiemi**.

Platba, která odpovídá čistým strategiím A_i, B_j , je a_{ij} (= výhra hráče A , záporná výhra hráče B).

Maticové hry řešitelné v oboru čistých strategií

Př: Mějme hru popsanou platební maticí A .

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{strategie} & B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{array} \right) \end{array}$$

Jak mají hráči hrát, aby si vedli co nejlépe?

Maticové hry řešitelné v oboru čistých strategií

Řešení:

Provedeme detailní analýzu:

Bude-li hráč A hrát strategii A_1 , jeho nejhorší možný výsledek bude $\min(0, 1) = 0$,

Bude-li hráč A hrát strategii A_2 , jeho nejhorší možný výsledek bude $\min(1, 4) = 1$,

Bude-li hráč A hrát strategii A_3 , jeho nejhorší možný výsledek bude $\min(-3, 2) = -3$.

Hráč A si zvolí tu strategii, která mu přinese nejlepší z nejhorších možných výsledků, tj.

$$\max(0, 1, -3) = 1 = \alpha.$$

Bude-li hráč A hrát strategii A_2 , má při každé hře zaručenu výhru alespoň ve výši $\alpha = 1$ Kč.

Maticové hry řešitelné v oboru čistých strategií

Podobně z pozice hráče B :

Bude-li hráč B hrát strategii B_1 , jeho nejhorší možný výsledek bude $\max(0, 1, -3) = 1$,

Bude-li hráč B hrát strategii B_2 , jeho nejhorší možný výsledek bude $\max(1, 4, 2) = 4$.

Hráč B si zvolí tu strategii, která mu přinese nejlepší z nejhorších možných výsledků, tj.

$$\min(1, 4) = 1 = \beta.$$

Bude-li hráč B hrát strategii B_1 , má při každé hře zaručenu prohru nejvýše $\beta = 1$ Kč.

Poznámka:

Všimněte si, že $\alpha = \beta = 1$. Prvek $a_{21} = \alpha = \beta$ nazýváme **sedlovým bodem**. Je nejmenší ve svém řádku a největší ve svém sloupci.

Maticové hry řešitelné v oboru čistých strategií

Postup pomocí sedlového bodu:

Platí:

$\max_i \min_j a_{ij} = \alpha \dots$ **dolní cena hry** (minima po řádcích a z nich maximum),

$\min_j \max_i a_{ij} = \beta \dots$ **horní cena hry** (maxima po sloupcích a z nich minimum).

Obecně platí: $\alpha \leq \beta$.

Pokud $\alpha = \beta$, pak v matici existuje prvek a_{ij} , který je ve svém řádku nejmenší a ve svém sloupci největší. Nazývá se **sedlový bod** a označuje **optimální čisté strategie** $A_0 = A_i$ a $B_0 = B_j$.

Platbu, která odpovídá optimálním strategiím, nazýváme **cenou hry** a označujeme v :

$$E(A_0, B_0) = a_{ij} = v.$$

Definice:

Je-li $v = 0$, hra je **spravedlivá**,

Je-li $v \neq 0$, hra je **nespravedlivá**.

Maticové hry řešitelné v oboru čistých strategií

Př: Řešte MH s platební maticí

$$\begin{pmatrix} 20 & -30 & 0 & 10 \\ -40 & 60 & 20 & -35 \\ 70 & 20 & 20 & 50 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$A_0 = A_3,$$

$$B_0 = B_3,$$

$v = 20$. Hra je nespravedlivá, zvýhodňuje hráče A .

Maticové hry řešené v oboru smíšených strategií

V případech, kdy

$$\alpha < \beta, \quad \text{a tedy} \quad \max_i \min_j a_{ij} < \min_j \max_i a_{ij},$$

musíme MH řešit v oboru smíšených strategií.

Definice:

Smíšenou strategií 1. hráče

rozumíme m -tici $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$, kde $x_i \geq 0$ a $\sum_{i=1}^m x_i = 1$.

Smíšenou strategií 2. hráče

rozumíme n -tici $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$, kde $y_j \geq 0$ a $\sum_{j=1}^n y_j = 1$.

Poznámka:

x_i vyjadřuje pravděpodobnost, s jakou 1. hráč užívá i -tou čistou strategii A_i ,
 y_j vyjadřuje pravděpodobnost, s jakou 2. hráč užívá j -tou čistou strategii B_j .

Maticové hry řešené v oboru smíšených strategií

Nemá-li hra sedlový bod, je pro oba hráče výhodné své jednotlivé (čisté) strategie rozumně střídat.

Výraz $E(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$ nazýváme **střední cenou hry** (= očekávaná výhra

1. hráče = očekávaná prohra 2. hráče).

Definice:

Smíšené strategie $\vec{x}_0, \vec{y}_0$, pro které platí rovnost

$$\max_{\vec{x}} \min_{\vec{y}} E(\vec{x}, \vec{y}) = \min_{\vec{y}} \max_{\vec{x}} E(\vec{x}, \vec{y}) = E(\vec{x}_0, \vec{y}_0),$$

se nazývají **optimální smíšené strategie**.

Cena hry pak je $v = E(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

Základní věta teorie MH:

Každá maticová hra má řešení v oboru smíšených strategií.

Poznámka: Existuje řada metod řešení MH. Vždy jde o to nalézt optimální smíšené strategie obou hráčů $\vec{x}_0, \vec{y}_0$ a cenu hry $v = E(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

Maticové hry typu 2×2

Předpokládejme, že MH daná platební maticí

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ nemá sedlový bod.}$$

Hledáme tedy optimální smíšené strategie $\vec{x}_0 = (x_1, x_2)$, $\vec{y}_0 = (y_1, y_2)$,
přičemž $x_1 + x_2 = 1$, $y_1 + y_2 = 1$; $x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$.

Pro tyto optimální smíšené strategie musí platit:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 &= v, & a_{11}y_1 + a_{12}y_2 &= v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 &= v, & a_{21}y_1 + a_{22}y_2 &= v. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy rovnic získáme neznámé x_1, x_2, y_1, y_2, v :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_{22} - a_{21}}{a}, & x_2 &= \frac{a_{11} - a_{12}}{a}, \\ y_1 &= \frac{a_{22} - a_{12}}{a}, & y_2 &= \frac{a_{11} - a_{21}}{a}, \\ v &= \frac{\det(A)}{a}, \end{aligned}$$

kde $a = a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}$, $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Maticové hry typu 2×2

Př: Řešte MH s platební maticí $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení:

Optimální strategie získáme dosazením do vzorců:

$$a = a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} = 4 + 3 - 1 - 2 = 4, \quad \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 4 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 10,$$

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a} = \frac{3 - 1}{4} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{a_{12} - a_{11}}{a} = \frac{4 - 2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a} = \frac{3 - 2}{4} = \frac{1}{4}, \quad y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a} = \frac{4 - 1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$v = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Tedy:

$$\vec{x}_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad \vec{y}_0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right), \quad v = \frac{5}{2}.$$

Maticové hry typu 2×2

Př: Řešte MH s platební maticí $A = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Řešení:

Optimální strategie obou hráčů a cena hry jsou:

$$\vec{x}_0 = \left(\frac{9}{20}, \frac{11}{20} \right), \quad \vec{y}_0 = \left(\frac{3}{10}, \frac{7}{10} \right), \quad v = \frac{23}{10}.$$

Hra je nespravedlivá, zvýhodňuje hráče A.

Maticové hry typu 2×2

Př: Řešte MH s platební maticí $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení:

Optimální strategie obou hráčů a cena hry jsou:

$$\vec{x}_0 = (1, 0), \vec{y}_0 = (0, 1), v = 3.$$

Hra je nespravedlivá, zvýhodňuje hráče A .

Poznámka: Při řešení předchozí MH bylo potřeba si uvědomit, že v platební matici existuje sedlový bod ($\alpha = \beta$), čili řešení v čistých strategiích. Formální dosazení do vzorců by dalo špatné výsledky!