

Operační výzkum

Teorie her.

Řešení maticových her převodem na úlohu LP.

Řešení MH převodem na úlohu lineárního programování

Obdržíme soustavu nerovnic:

$$b_{11}t_1 + b_{21}t_2 + \cdots + b_{m1}t_m \geq 1,$$

$$b_{12}t_1 + b_{22}t_2 + \cdots + b_{m2}t_m \geq 1,$$

.....

$$b_{1n}t_1 + b_{2n}t_2 + \cdots + b_{mn}t_m \geq 1,$$

kde $t_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$.

Přitom

$$x_{01} + x_{02} + \cdots + x_{0m} = v' \cdot \sum_{i=1}^m t_i = 1 \implies \sum_{i=1}^m t_i = \frac{1}{v'}.$$

Maximalizovat cenu hry v (resp. v') znamená totéž jako minimalizovat hodnotu

$$\frac{1}{v'} = t_1 + t_2 + \cdots + t_m \quad (= t).$$

Řešení MH převodem na úlohu lineárního programování

Shrnutí 1:

Řešení libovolné MH z **hlediska 1. hráče** lze nalézt pomocí minimalizační úlohy LP

$$t = t_1 + t_2 + \dots + t_m \longrightarrow \min$$

s podmínkami

$$b_{11}t_1 + b_{21}t_2 + \dots + b_{m1}t_m \geq 1,$$

$$b_{12}t_1 + b_{22}t_2 + \dots + b_{m2}t_m \geq 1,$$

.....

$$b_{1n}t_1 + b_{2n}t_2 + \dots + b_{mn}t_m \geq 1,$$

$$t_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Cenu hry pak stanovíme následovně:

$$v = v' - c, \quad t_i, \quad v' = \frac{1}{\sum_{i=1}^m t_i} = \frac{1}{t_{\min}}.$$

Optimální strategii 1. hráče $\vec{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0m})$ stanovíme ze vztahů

$$x_{0i} = t_i v', \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Řešení MH převodem na úlohu lineárního programování

Shrnutí 2: (Analogicky lze formulovat úlohu LP také z **pohledu 2. hráče.**)

Řešení MH z hlediska 2. hráče lze nalézt pomocí maximalizační úlohy LP

$$z = z_1 + z_2 + \dots + z_n \longrightarrow \max$$

s podmínkami

$$b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \dots + b_{1n}z_n \leq 1,$$

$$b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \dots + b_{2n}z_n \leq 1,$$

.....

$$b_{m1}z_1 + b_{m2}z_2 + \dots + b_{mn}z_n \leq 1,$$

$$z_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Cenu hry pak stanovíme následovně:

$$v = v' - c, \quad v' = \frac{1}{\sum_{j=1}^n z_j} = \frac{1}{z_{\max}}.$$

Optimální strategii 2. hráče $\vec{y}_0 = (y_{01}, \dots, y_{0n})$ stanovíme ze vztahů

$$y_{0j} = z_j v', \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Řešení MH převodem na úlohu lineárního programování

Závěr:

Obě úlohy LP, které jsme vytvořili (viz Shrnutí 1, resp. Shrnutí 2), jsou duálně sdružené úlohy.

To znamená, že řešením jedné z nich vyřešíme i druhou, tj. pro určení optimálních strategií obou hráčů, i stanovení ceny hry, stačí řešit jednu (kteroukoli) z těchto úloh LP.

Z hlediska efektivnosti řešení je vhodnější zaujmout postoj 2. hráče, tj. řešit maximalizační úlohu, viz Shrnutí 2.

Řešení MH převodem na úlohu lineárního programování

Př:

MH s platební maticí $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ řešte převodem na úlohu LP.

Řešení:

Ke každému prvku matice A přičteme číslo $c = 3$. Získáme matici

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Úloha LP z hlediska 2. hráče je

$$z = z_1 + z_2 \longrightarrow \max$$

s podmínkami

$$4z_1 + z_2 \leq 1,$$

$$2z_1 + 5z_2 \leq 1,$$

$$z_1, z_2 \geq 0.$$

Úlohu LP řešíme simplexovou metodou v tabulce

Řešení MH převodem na úlohu lineárního programování

Z.p.	z_1	z_2	z'_1	z'_2	b_i	$p = \frac{b_i}{a_{ik}}$ pro $a_{ik} > 0$
z'_1	4	1	1	0	1	1
z'_2	2	(5)	0	1	1	$\frac{1}{5}$
z	-1	-1	0	0	0	max
z'_1	$(\frac{18}{5})$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{9}$
z_2	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$
z	$-\frac{3}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	max
z_1	1	0	$\frac{5}{18}$	$-\frac{1}{18}$	$\frac{2}{9}$	
z_2	0	1	$-\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	
z	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	MAX

Tabulka: Simplexová tabulka při řešení MH

Řešení MH převodem na úlohu lineárního programování

Z optimálních řešení primární a duální úlohy získáme optimální strategie obou hráčů a cenu hry:

$$z_{\max} = \frac{1}{3} \Rightarrow v' = \frac{1}{z_{\max}} = 3 \Rightarrow v = v' - c = 3 - 3 = 0,$$

$$z_1 = \frac{2}{9}, \quad z_2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \vec{y}_0 = \left(\frac{2}{9} \cdot 3, \frac{1}{9} \cdot 3 \right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right),$$

$$t_1 = \frac{1}{6}, \quad t_2 = \frac{1}{6} \Rightarrow \vec{x}_0 = \left(\frac{1}{6} \cdot 3, \frac{1}{6} \cdot 3 \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Obecný postup řešení MH

- 1 Je-li $\alpha = \beta$, v matici existuje sedlový bod a existuje optimální řešení v oboru čistých strategií.
- 2 Je-li $\alpha < \beta$, a lze-li uplatnit princip dominování, uplatníme jej v maximální možné míře.
Tím zmenšíme rozměr platební matice.
- 3 Je-li $\alpha < \beta$, a nelze-li (již) uplatnit princip dominování:
V případě matice typu 2×2 použijeme příslušné vzorce.
- 4 Je-li $\alpha < \beta$, a nelze-li (již) uplatnit princip dominování.
V případě matice typu $2 \times n$, $n \geq 3$, resp. typu $m \times 2$, $m \geq 3$ použijeme grafickou metodu řešení.
- 5 Je-li $\alpha < \beta$, a nelze-li (již) uplatnit princip dominování:
V případě matice typu 3×3 nebo většího nezbývá než použít metodu řešení MH převodem na úlohu LP.
Tato metoda je univerzální metodou řešení MH, tedy funguje vždy.