

CVIČENÍ 9

PŘÍKLADY 9.1: Určete derivaci k funkci f .

a) $f(x) = 2e^{3x}$

b) $f(x) = 5 \sin 3x$

c) $f(x) = \arcsin(x^2)$

d) $f(x) = \sqrt{\sin x}$

e) $f(x) = 3 \ln 5x$

f) $f(x) = -\cos^2 x$

g) $f(x) = \ln(1 + \cos x)$

h) $f(x) = \arccos(1 - x^2)$

i) $f(x) = \operatorname{tg}(x^2 + 5)$

j) $f(x) = (3x^2 + 2)^3$

k) $f(x) = (2x^3 - x)^5$

l) $f(x) = \frac{1}{(x^3 - 1)^2}$

m) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

n) $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{\sin x}}$

o) $f(x) = \arcsin \frac{x}{2}$

p) $f(x) = \ln \frac{2}{x} - \ln \frac{x}{4}$

q) $f(x) = \sin(\sin(x))$

r) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{6x - 1}$

s) $f(x) = \sqrt{e^{-x} + 1}$

t) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

u) $f(x) = \ln \frac{(x+2)^2}{x-1}$

Výsledky:

a) $f(x) = 6e^{3x}$

b) $f(x) = 15 \cos(3x)$

c) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

d) $f(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

e) $f(x) = \frac{3}{x}$

f) $f(x) = 2 \cos(x) \sin(x)$

g) $f(x) = \frac{-\sin x}{1 + \cos x}$

h) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1 - (1 - x^2)^2}}$

i) $f(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2 + 5)}$

j) $f(x) = 18x(3x^2 + 2)^2$

k) $f(x) = 5(2x^3 - x)^4(6x^2 - 1)$

l) $f(x) = \frac{-6x^2}{(x^3 - 1)^3}$

m) $f(x) = \frac{-1}{x \ln^2 x}$

n) $f(x) = \frac{-\cos(x)}{\sin(x)\sqrt[3]{\sin x}}$

o) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

p) $f(x) = -\frac{2}{x}$

q) $f(x) = \cos(\sin(x)) \cos(x)$

r) $f(x) = \frac{1}{2x\sqrt{6x - 1}}$

s) $f(x) = \frac{-e^{-x}}{2\sqrt{e^{-x} + 1}}$

t) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

u) $f(x) = \frac{x - 4}{(x + 2)(x - 1)}$

PŘÍKLADY 9.2: Určete derivaci k funkci f .

$$\text{a) } f(x) = \frac{4}{(2x+1)^2}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{1}{8} \sin \frac{x}{2}$$

$$\text{c) } f(x) = 2\sqrt{2x+4}$$

$$\text{d) } f(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(x+4)^3}}$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

$$\text{f) } f(x) = \ln(2x+1)$$

$$\text{g) } f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$\text{h) } f(x) = \sin^3 x$$

$$\text{i) } f(x) = e^{x^2}$$

$$\text{j) } f(x) = 2xe^{x^2}$$

$$\text{k) } f(x) = x^3e^{-x}$$

$$\text{l) } f(x) = \ln(1+x^2)$$

$$\text{m) } f(x) = \frac{1}{(x+3)(x+1)}$$

$$\text{n) } f(x) = \frac{x(x^2+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\text{o) } f(x) = 2 \operatorname{arctg}(x-3)$$

$$\text{p) } f(x) = e^{2x+3}$$

Výsledky:

$$\text{a) } f(x) = \frac{-16}{(2x+1)^3}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{1}{16} \cos \frac{x}{2}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+4}}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{(x+4)^5}}$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{f) } f(x) = \frac{2}{2x+1}$$

$$\text{g) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{h) } f(x) = 3 \sin^2(x) \cos(x)$$

$$\text{i) } f(x) = 2xe^{x^2}$$

$$\text{j) } f(x) = (4x^2+2)e^{x^2}$$

$$\text{k) } f(x) = -x^2(x-3)e^{-x}$$

$$\text{l) } f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$\text{m) } f(x) = \frac{-2x-4}{(x^2+4x+3)^2}$$

$$\text{n) } f(x) = \frac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

$$\text{o) } f(x) = \frac{2}{1+(x-3)^2}$$

$$\text{p) } f(x) = 2e^{2x+3}$$

PŘÍKLADY 9.3: Určete derivaci k funkci f .

$$\text{a) } f(x) = x \sin^2 x$$

$$\text{b) } f(x) = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$$

$$\text{c) } f(x) = \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$$

$$\text{d) } f(x) = e^{\sqrt{2x}} (\sqrt{2x}-1)$$

$$\text{e) } f(x) = (1-x^2)\sqrt{x^2+1}$$

$$\text{f) } f(x) = x^2 + 2x(\sin x) \cos x + \cos^2 x$$

$$\text{g) } f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$$

$$\text{h) } f(x) = \ln((x+2)^2(x-1))$$

Výsledky:

$$\text{a) } f(x) = \sin^2(x) + 2x \sin(x) \cos(x)$$

$$\text{b) } f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{\arcsin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{d) } f(x) = e^{\sqrt{2x}}$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{-3x^3-x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{f) } f(x) = 4x \cos^2 x$$

$$\text{g) } f(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\text{h) } f(x) = \frac{3x}{(x+2)(x-1)}$$

PŘÍKLADY 9.4: Určete f'' .

a) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 12,$

$$[f'(x) = 6x^2 - 2x, f''(x) = 12x - 2]$$

b) $f(x) = \ln^2 x,$

$$\left[f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}, f''(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2} \right]$$

c) $f(x) = \frac{1 - 4x}{x^2 + 2},$

$$\left[f'(x) = \frac{4x^2 - 2x - 8}{(x^2 + 2)^2}, f''(x) = \frac{-8x^3 + 6x^2 + 48x - 4}{(x^2 + 2)^3} \right]$$

d) $f(x) = e^x(2x^7 - 6x^4 + 1),$

$$[f'(x) = e^x(2x^7 + 14x^6 - 6x^4 - 24x^3 + 1), f''(x) = e^x(2x^7 + 28x^6 + 84x^5 - 6x^4 - 48x^3 - 72x^2 + 1)]$$

PŘÍKLADY 9.5: Určete f''' .

a) $f(x) = x^3 e^x$

$$[f'(x) = e^x x^2(x + 3), f''(x) = e^x x(x^2 + 6x + 6), f'''(x) = e^x(x^3 + 9x^2 + 18x + 6)]$$

b) $f(x) = 81x^2 - 5 + x$

$$[f'(x) = 162x + 1, f''(x) = 162, f'''(x) = 0]$$

c) $f(x) = e^{x^2 - 2x}$

$$[f'(x) = e^{x^2 - 2x} 2(x - 1), f''(x) = e^{x^2 - 2x} (4x^2 - 8x + 6), f'''(x) = e^{x^2 - 2x} (8x^3 - 24x^2 + 36x - 20)]$$

d) $f(x) = \ln \frac{x}{1 - 2x}$

$$\left[f'(x) = -\frac{1}{x(2x - 1)}, f''(x) = \frac{4x - 1}{x^2(2x - 1)^2}, f'''(x) = \frac{12x - 24x^2 - 2}{x^3(2x - 1)^3} \right]$$

Vytisknout, rozstříhat a rozdat lepším studentům: (je zde nakopírovaná dvakrát stejná verze)

PŘÍKLADY 9.6: Určete derivaci k funkci f .

a) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 3})$

b) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$

c) $f(x) = \operatorname{arctg}(x - \sqrt{1 + x^2})$

d) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$

e) $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \sin x + \ln \cos \sin x$

f) $f(x) = e^x - (\sin e^x) \cos^3 e^x - (\sin^3 e^x) \cos e^x$

g) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

Výsledky:

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3}}$

b) $f(x) = \frac{-1}{\cos x}$

c) $f(x) = \frac{1}{2(x^2 + 1)}$

d) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}$

e) $f(x) = (\cos x) \tan^3(\sin x)$

f) $f(x) = 2e^x \sin^2 e^x$

g) $f(x) = \frac{1}{2} (x + \sqrt{x + \sqrt{x}})^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{2}(x + \sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}) \right] = \dots = \frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x+1}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

PŘÍKLADY 9.7: Určete derivaci k funkci f .

a) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 3})$

b) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$

c) $f(x) = \operatorname{arctg}(x - \sqrt{1 + x^2})$

d) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$

e) $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \sin x + \ln \cos \sin x$

f) $f(x) = e^x - (\sin e^x) \cos^3 e^x - (\sin^3 e^x) \cos e^x$

g) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

Výsledky:

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3}}$

b) $f(x) = \frac{-1}{\cos x}$

c) $f(x) = \frac{1}{2(x^2 + 1)}$

d) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}$

e) $f(x) = (\cos x) \tan^3(\sin x)$

f) $f(x) = 2e^x \sin^2 e^x$

g) $f(x) = \frac{1}{2} (x + \sqrt{x + \sqrt{x}})^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{2}(x + \sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}) \right] = \dots = \frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x+1}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$