Cvičení 12

1. Najděte definiční obor, inflexní body a maximální intervaly konvexnosti a konkávnosti následujících funkcí:

   a) $f(x) = x(x^2+3)$, b) $f(x) = \ln(1+x^2)$, c) $f(x) = (x^2-5x+6)\mathrm{e}^x$,

   d) $f(x) = 4\ln(x+3) - 2x + \dfrac{x^2}{2}$, e) $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+6}$, f) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x+1}$,

2. Určete všechny asymptoty následujících funkcí:

   a) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$, c) $f(x) = x + \dfrac{\ln x}{x}$, d) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x-1}$,

3. Nedělat: Určete všechny asymptoty následujících funkcí:

   a) $f(x) = 2x + 2\,\mathrm{arccotg}\, x$,

Výsledky

1. a) mezivýpočty: $D(f) = \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2+3$, $f''(x) = 6x$
   výsledek: ost. konkávní na $(-\infty,\ 0)$, ost. konvexní na $(0,\ \infty)$; infl. bod: $x = 0$,

   b) mezivýpočty: $D(f) = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, $f''(x) = \dfrac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$
   výsledek: ost. konkávní na $(-\infty,\ -1)$ a $(1,\ \infty)$, ost. konvexní na $(-1,\ 1)$; infl. body: $x = -1, x = 1$,

   c) mezivýpočty: $D(f) = \mathbb{R}$, $f'(x) = (x^2-3x+1)\mathrm{e}^x$, $f''(x) = (x-2)(x+1)\mathrm{e}^x$
   výsledek: ost. konvexní na $(-\infty,\ -1)$ a $(2,\ \infty)$, ost. konkávní na $(-1,\ 2)$; infl. body: $x = -1, x = 2$,

   d) mezivýpočty: $D(f) = (-3,\infty)$, $f'(x) = \dfrac{4}{x+3} + x - 2$, $f''(x) = \dfrac{(x+5)(x+1)}{(x+3)^2}$
   výsledek: ost. konvexní na $(-1,\ \infty)$, ost. konkávní na $(-3,\ -1)$; infl. bod: $x = -1$,

   e) mezivýpočty: $D(f) = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{6-2x^2}{(2x^2+6)^2}$, $f''(x) = \dfrac{8x(x-3)(x+3)}{(2x^2+6)^3}$
   výsledek: ost. konkávní na $(-\infty,\ -3)$ a $(0,\ 3)$, ost. konvexní na $(-3,\ 0)$ a $(3,\ \infty)$;
   infl. body: $x = -3, x = 0, x = 3$,

   f) mezivýpočty: $D(f) = (-\infty,\ -1) \cup (-1,\ \infty)$, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x x}{(x+1)^2}$, $f''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(x^2+1)}{(x+1)^3}$
   výsledek: ost. konkávní na $(-\infty,\ -1)$, ost. konvexní na $(-1,\ \infty)$; infl. bod: $x = -1$,

2. a) $x = 1, y = 1$, b) $x = -3, x = 3, y = 0$, c) $x = 0, y = x$, d) $x = 1, y = 3x+3$,

3. a) $y = 2x, y = 2x + 2\pi$.