# Cvičení 13

1. Vyšetřete průběh následujících funkcí:

   a) $f(x) = x^4 - 2x^2$, b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$, c) $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$,

   d) $f(x) = \ln(4 - x^2)$, e) $f(x) = x\ln(x)$.

2. Nalezněte absolutní extrémy následujících funkcí:

   a) $f(x) = x^2 - 6x + 10, \quad x \in \langle -1, 5\rangle$, b) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}, \quad x \in \langle 0, 1\rangle$,

   c) $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}, \quad x \in \langle -4, 0\rangle$, d) $f(x) = \sin(2x) - x, \quad x \in \left\langle \dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\rangle$,

3. Parní kotel má tvar rotačního válce o objemu $V$. Najděte rozměry (tj. výšku $h$ a poloměr podstavy $x$) kotle tak, aby měl co nejmenší povrch $S$.

# Výsledky

1. a) mezivýpočty: $D(f) = \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x(x-1)(x+1)$, $f''(x) = 4(3x^2 - 1)$
   výsledek: klesá na $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 0, 1\rangle$, roste na $\langle -1, 0\rangle$, a $\langle 1, \infty\rangle$;
   max: $f(0) = 0$, min: $f(-1) = -1$, $f(1) = -1$,
   ost. konvexní na $\left(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ a $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} \infty\right)$, ost. konkávní na $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$,
   infl. body: $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, asymptoty nemá.

   b) mezivýpočty: $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $f'(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x^2}$, $f''(x) = \dfrac{6}{x^4}$
   výsledek: roste na $(-\infty, 0)$ a $\langle \sqrt[3]{2}, \infty)$, klesá na $(0, \sqrt[3]{2}\rangle$, max nemá, min: $f(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$,
   ost. konvexní na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$; infl. body nemá; asymptoty: $y = x$, $x = 0$.

   c) mezivýpočty: $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$, $f'(x) = \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$, $f''(x) = \dfrac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^3}$
   výsledek: klesá na $(-\infty, -1)$ a $(-1, 0\rangle$, roste na $(0, \infty)$, min: $f(0) = 1$,
   ost. konkávní na $(-\infty, -1)$ ost. konvexní na $(-1\ \infty)$, infl. bod: $x = -1$, asymptoty: $x = -1$, $y = 0$,

   d) mezivýpočty: $D(f) = (-2, 2)$, $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$, $f''(x) = \dfrac{-2(x^2+4)}{(x^2-4)^2}$
   výsledek: roste na $(-2, 0)$ klesá na $(0, 2)$, max: $f(0) = \ln(4)$
   ost. konkávní na $(-\infty, \infty)$, asymptoty: $x = -2$, $x = 2$,

   e) mezivýpočty: $D(f) = (0, \infty)$, $f'(x) = 1 + \ln x$, $f''(x) = \dfrac{1}{x}$,
   výsledek: klesá na $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$, roste na $\left(\dfrac{1}{e}, \infty\right)$ ost. konvexní na $(0, \infty)$, asymptoty nemá:

2. a) mezivýpočty: $f'(x) = 2(x-3)$, výsledek: max: $f(-1) = 17$, min: $f(3) = 1$,

   b) mezivýpočty: $f'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$, výsledek: max: $f0) = \dfrac{\pi}{4}$, min: $f(1) = 0$,

   c) mezivýpočty: $f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, výsledek: max: $f(0) = -1$, min: $f(-4) = \dfrac{-21}{5}$,

   d) mezivýpočty: $f'(x) = 2\cos(2x) - 1$, výsledek: max: $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, min: $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$,

3. objem: $V = \pi x^2 h$. Odtud se vyjádří $h = \dfrac{V}{\pi x^2}$ a dosadí do vzorce pro povrch: $S(x) = 2\pi x h + 2\pi x^2$. Hledáme minimum funkce $S(x) = \dfrac{2V}{x} + 2\pi x^2$, kde $x > 0$. Po zderivování dostáváme: $S'(x) = \dfrac{-2V}{x^2} + 4\pi x = \dfrac{4\pi(x^3 - \frac{V}{2\pi})}{x^2}$. Funkce $S(x)$ klesá na $\left(0, \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)$, roste na $\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}, \infty\right)$. V bodě $x_0 = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ má lokální minimum. Po dosazení je $h = \dfrac{V}{\pi x_0^2} = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$.