PŘÍPRAVY KE CVIČENÍ 20

plán k 20. cvičení: *tři příklady na obsah plochy (parabola a osa, parabola a přímka různá od osy, dvě paraboly); délka křivky (jeden lehký příklad, nebo žádný příklad); objem tělesa (dva příklady); obsah pláště tělesa (jeden příklad)*

PŘIPOMENUTÍ 20.1: připomenutí vzorce $S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *za předpokladu, že* f *je nezáporná na* $\langle a, b\rangle$

PŘÍKLADY 20.1: Vypočtěte obsah rovinné plochy vymezené křivkami:

a) $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \le x$, $x \le \pi$; $\quad [2]$
b) $y = 4 - x^2$, $y = 0$; $\quad \left[10 + \frac{2}{3}\right]$

PŘIPOMENUTÍ 20.2: připomenutí vzorce
$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ *za předpokladu, že* $f - g$ *je nezáporná na* $\langle a, b\rangle$

PŘÍKLADY 20.2: Vypočtěte obsah rovinné plochy vymezené křivkami: (stihnout a)-c))

a) $y = x$, $y = -x$, $x = 3$; $\quad [9]$
b) $y = x^2$, $x + y = 2$, $x \ge 0$; $\quad \left[1 + \frac{1}{6}\right]$
c) $y = \mathrm{e}^x$, $y = \mathrm{e}^{-x}$, $x = 1$; $\quad \left[\mathrm{e} - 2 + \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$
d) $y = 2x - x^2$, $x + y = 0$; $\quad \left[4 + \frac{1}{2}\right]$
e) $y = x^2 + 2$, $y = 5x^2 - 2$; $\quad \left[5 + \frac{1}{3}\right]$
f) $y = (x-1)^2$, $y = 1 - x^2$. $\quad \left[\frac{1}{3}\right]$
g) $y = 2^x$, $y = 2$, $x = 0$; $\quad \left[2 - \frac{1}{\ln 2}\right]$

PŘIPOMENUTÍ 20.3: připomenutí vzorce $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$, pro $x \in \langle a, b\rangle$

PŘÍKLADY 20.3: Vypočtěte délku křivky, která je zadána vztahem:

a) $y = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3}$ pro $x \in \langle 0, 4\rangle$; $\quad \left[\frac{26}{3}\right]$
b) $y = \ln x$ pro $x \in \langle \sqrt{3}, \sqrt{15}\rangle$. (Nápověda: Proveďte substituci $t^2 = 1 + x^2$) $\quad \left[2 + \ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5\right]$
c) $y = \mathrm{e}^x$ pro $x \in \langle 0, x_0\rangle$; $\quad \left[\sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x_0}} - \sqrt{2} + x_0 - \ln \frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x_0}}+1}{\sqrt{2}-1}\right]$
d) $y = \ln(\cos x)$ pro $x \in \langle 0, a\rangle$, kde $a < \frac{\pi}{2}$; $\quad \left[\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right)\right]$

PŘIPOMENUTÍ 20.4: připomenutí vzorce $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$

PŘÍKLADY 20.4: Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce $f(x)$ kolem osy x:

a) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ pro $x \in \langle -5, 5\rangle$; $\left[\frac{500\pi}{3}\right]$
b) $f(x) = 2x - x^2$ pro $x \in \langle 0, 2\rangle$; $\quad \left[\left(1 + \frac{1}{15}\right)\pi\right]$
c) $f(x) = 2\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}\right)$ pro $x \in \langle -4, 4\rangle$; $\quad \left[16\pi\left(\mathrm{e}^2 + 4 - \frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)\right]$
d) $f(x) = b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$, $a, b \in (0, \infty)$ pro $x \in \langle 0, a\rangle$. $\quad \left[\frac{3}{7}\pi a b^2\right]$

PŘIPOMENUTÍ 20.5: připomenutí vzorce $S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$; *Máme-li spočítat celý povrch tělesa, musíme k obsahu pláště přičíst obsahy všech vík, které těleso má.*

PŘÍKLADY 20.5: Vypočtěte obsah pláště tělese, které vznikne rotací podgrafu funkce $f(x)$ kolem osy x:

a) $f(x) = 4 + x$ pro $x \in \langle -4, 2\rangle$; $\left[36\sqrt{2}\pi\right]$

b) $f(x) = x^3$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$; $\quad \left[\frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)\right]$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$; $\quad \left[\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)\right]$

d) $f(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$. $\quad \left[\frac{\pi}{4}\left(\mathrm{e}^2 + 4 + \frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)\right]$

nestihne se:

PŘIPOMENUTÍ 20.6: připomenutí vzorců pro křivku G:

$$T = \left[\frac{S_y(G)}{M(G)}, \frac{S_x(G)}{M(G)}\right], \qquad M(G) = \int_a^b \rho(x)H(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$S_x(G) = \int_a^b f(x)\rho(x)H(x)\,\mathrm{d}x, \qquad S_y(G) = \int_a^b x\rho(x)H(x)\,\mathrm{d}x, \qquad H(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

PŘÍKLADY 20.6: Vypočtěte hmotnost a souřadnice těžiště křivky $y = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$, $x \in \langle -1, 1\rangle$ s délkovou hustotou $\rho(x) = 1$.

PŘIPOMENUTÍ 20.7: připomenutí vzorců pro křivočarý obdélník B:

$$T = \left[\frac{S_y(B)}{M(B)}, \frac{S_x(B)}{M(B)}\right], \qquad M(B) = \int_a^b \rho(x)[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x,$$

$$S_y(B) = \int_a^b x\rho(x)[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x, \qquad S_x(B) = \int_a^b \frac{f(x) + g(x)}{2}\rho(x)[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$$

PŘÍKLADY 20.7: Vypočtěte hmotnost a souřadnice těžiště rovinné homogenní plochy B omezené křivkou $y = \frac{x^2}{8}$, osou x a přímkou $x = 8$. Hustota plochy v bodě $[x, y] \in B$ je dána vztahem $\rho_0(x, y) = \rho(x) = 1$.

PŘIPOMENUTÍ 20.8: připomenutí vzorce $Q(B) = \int_a^b \sigma(x)[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$

PŘÍKLADY 20.8: Určete elektrický náboj rozložený na desce B ohraničené křivkami $y = 2x - x^2$, $y = x - 2$, jestliže hustota v bodě $[x, y] \in B$ je dána vztahem $\sigma_0(x, y) = \sigma(x) = 1$.